



Title	有限長変断面棒における弾性波の伝播
Author(s)	台丸谷, 政志; Daimaruya, Masashi; 石川, 博将 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 77, 25-32
Issue Date	1975-10-04
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41315">https://hdl.handle.net/2115/41315</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	77_25-32.pdf



## 有限長変断面棒における弾性波の伝播

台丸谷政志 石川博将 秦 謹一  
三橋正信\* 小島文明\*\* 田代 進\*\*\*  
山 蔦 康 一\*\*\*\* 東 猴 雅 文\*\*\*\*\*  
(昭和 50 年 3 月 31 日受理)

### Wave Propagation in a Finite Length Bar with a Nonuniform Section

Masashi DAIMARUYA Hiromasa ISHIKAWA Kin-ich HATA  
Masanobu MITSUHASHI Fumiaki KOZIMA Susumu TASHIRO  
Koh-ich YAMATSUTA Masafumi TOKKOH

(Received March 31, 1975)

#### Abstract

The propagation of an elastic disturbance in a finite length bar with continuously varied cross-sections is studied by using the method of the Laplace transform. The inversion integral is reduced to the calculation of residues at the poles given by the eigenfunctions of the fixed-free bar with a variable cross section and the propagation solutions are represented in the form of infinite series. The results of this study can be applied only to thin rods with small changes of area and to waves which are long compared to the radius.

Numerical examples are worked out for the case of a truncated cone and the propagation waves are shown for two reflections in the bar. Also, the strain waves vs. time for different locations of the bar are measured and compared with the theoretical results.

#### 1. 緒 言

弾性波の伝播に関して重要な問題のひとつに断面積が軸方向に変化する漸変断面棒中のそれがある。変断面棒の縦振動問題<sup>1)</sup>、特に音響学における各種ホーンの調和波動の伝播に関する研究<sup>2)</sup>は数多くなされているが、衝撃負荷による応力波の伝播、構造物の衝撃強さという観点から解析されているものは少ないようである。これらの問題の厳密な解析には三次元弾性論の適用が必要であることは自明のことであるが、三次元理論による厳密な解析は非常に困難であり、たとえ軸対称一様断面棒に関しても有限長の場合にはその厳密解が得られていないのが現状である。したがって今までに発表されているこの種の問題の研究報告も断面の変化を考慮した一次元理論、いわゆる“Webster”ホーン方程式<sup>2)</sup>によるものがほとんどである。この一次元理論による

機械工学第二学科 塑性加工学講座

\* 現在、 檜崎造船 (株)    \*\* 小野田セメント (株)    \*\*\* 大成建設 (株)

\*\*\*\* (株) 小松製作所    \*\*\*\*\* 川崎重工業 (株)

処理は断面の変化が小さく波長が棒の半径に比べて大きい場合は妥当であることが知られている<sup>3)</sup>。このような条件のもとに、半無限長変断面棒における弾性波の伝播についての研究は J. W. Landon, H. Quinney<sup>4)</sup> 以来、幾人かの研究者によってなされており最近では、田中<sup>5)</sup>、V. H. Kenner<sup>6),7)</sup> 等の研究報告がある。しかし有限長棒に関しては T. Tsui<sup>8)</sup>、H. D. Fisher<sup>9)</sup> らによる仮想仕事の原理に基づく解析あるいは摂動法を用いた G. H. Handelman<sup>10)</sup> の解析、その他、若干例が見出される程度である。

本報では2個のパラメータによって決定される漸変断面を有する有限長棒がその一端に一定速度衝撃を受ける場合の弾性波伝播の挙動をラプラス変換法によって解析した。また一例として截頭円錐の場合に関して数値計算を行ない実験結果との比較を行なった。

## 2. 解 析

### 2.1 基礎式および一般解

変断面棒の軸を  $x$  軸にとり弾性波面は軸に垂直であり、その波長は棒の半径に比べて十分大きいとすれば、変断面棒に関する運動方程式いわゆる Webster ホーン方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ E(x) A(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} = \rho A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

ここで、 $t$  は時間、 $u$  は  $x$  方向変位、 $\rho$  は密度、 $E(x)$  は縦弾性係数、 $A(x)$  は棒の断面積である。ここでは均質な変断面棒を考え、 $E(x) = E$  とし、断面積は2個のパラメータによって決定される次式で与えられるものとする。

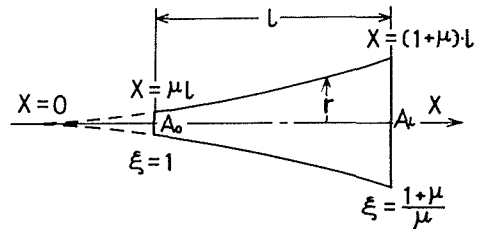


図1 変断面棒

$$A(x) = A_0 \left( \frac{x}{\mu l} \right)^n \quad (2)$$

ここで、 $l$  は棒の長さ、 $n, \mu$  は任意定数、 $A_0$  は  $x = \mu l$  における断面積である。式(2)を式(1)に代入すれば次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{n}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3)$$

ここで次の無次元変数を導入し、

$$\xi = \frac{x}{\mu l}, \quad \tau = \frac{c_0 t}{\mu l} \quad (4)$$

初期条件

$$(u)_{\tau=0} = \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_{\tau=0} = 0 \quad (5)$$

を考慮して、式(3)をラプラス変換すれば次式の常微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2 \bar{u}}{d\xi^2} + \frac{n}{\xi} \frac{d\bar{u}}{d\xi} - p^2 \bar{u} = 0 \quad (6)$$

ここで、

$$\bar{u}(\xi, p) = \int_0^\infty u(\xi, \tau) e^{-p\tau} d\tau \quad (7)$$

いま式(6)において、 $n = 1 - 2\alpha$  と置換えて次式のように変形する。

$$\frac{d^2}{d\xi^2} (\xi^{-\alpha} \bar{u}) + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi^{-\alpha} \bar{u}) - \left\{ p^2 + \left( \frac{\alpha}{\xi} \right)^2 \right\} (\xi^{-\alpha} \bar{u}) = 0 \quad (8)$$

式(8)は Bessel の微分方程式であり次の一般解が得られる。

$$\bar{u}(\xi, p) = \xi^\alpha \left\{ c_1 I_\alpha(\xi p) + c_2 K_\alpha(\xi p) \right\} \quad (9)$$

ここで、 $c_1, c_2$  は積分定数であり、 $I_\alpha, K_\alpha$  はそれぞれ  $\alpha$  次の第 1 種、第 2 種の変形 Bessel 関数である。したがってラプラス像空間におけるひずみ、応力の一般解が次式のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varepsilon}(\xi, p) &= \xi^\alpha \cdot p \left\{ c_1 I_{\alpha-1}(\xi p) + c_2 K_{\alpha-1}(\xi p) \right\} \\ \sigma(\xi, p) &= E \cdot \bar{\varepsilon}(\xi, p) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで、 $\bar{\varepsilon}(\xi, p), \bar{\sigma}(\xi, p)$  は式(7)と同様に定義される  $\varepsilon(\xi, \tau), \sigma(\xi, \tau)$  のラプラス変換である。

## 2.2 一定速度衝撃

衝撃の形は種々あるがいずれにしても変断面棒に関しては理論上の境界条件を実験条件として正確に実現することは非常に困難である。本報では境界条件が簡単な関数で与えられ、かつ近似的にしろ実験的に確かめることができる剛体による一定速度衝撃を考える。変断面棒の一端が一定速度  $v_0$  の衝撃を受け他端は自由であると仮定すれば境界条件は次式のように与えられる。

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=\mu t} = v_0 H(t), \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=(1+\mu)t} = 0 \quad (11)$$

ここで、 $H(t)$  は Heaviside のステップ関数。

式(11)を式(4)の無次元変数で表わしラプラス変換すれば次式が得られる。

$$\bar{u}(1, p) = \frac{v'_0}{p^2}, \quad \frac{d}{d\xi} \bar{u}(\lambda, p) = 0 \quad (12)$$

ここで、 $v'_0 = \mu l v_0 / c_0$ ,  $\lambda = 1 + 1/\mu$

式(9), (10) および式(12)より積分定数が次式のように得られる。

$$c_1 = \frac{v'_0}{p^2} \frac{K_\nu(\lambda p)}{I_{\nu+1}(p) K_\nu(\lambda p) + I_\nu(\lambda p) K_{\nu+1}(p)}, \quad c_2 = \frac{v'_0}{p^2} \frac{I_\nu(\lambda p)}{I_{\nu+1}(p) K_\nu(\lambda p) + I_\nu(\lambda p) K_{\nu+1}(p)} \quad (13)$$

ここで、 $\nu = \alpha - 1 = -(n+1)/2$ 。よって、式(9), (10), (13)より本問題に対するラプラス像空間における変位、ひずみ、応力が得られ、ひずみに関しては次式となる。

$$\frac{\bar{\varepsilon}(\xi, p)}{v'_0} = \xi^\alpha \frac{I_\nu(\xi p) K_\nu(\lambda p) - I_\nu(\lambda p) K_\nu(\xi p)}{p \{ I_{\nu+1}(p) K_\nu(\lambda p) + I_\nu(\lambda p) K_{\nu+1}(p) \}} \quad (14)$$

ここで、ラプラス逆変換積分を求めるため

$$\left. \begin{aligned} F_\nu(p) &= I_\nu(\xi p) K_\nu(\lambda p) - I_\nu(\lambda p) K_\nu(\xi p) \\ G_\nu(p) &= p \left\{ I_{\nu+1}(p) K_\nu(\lambda p) + I_\nu(\lambda p) K_{\nu+1}(p) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

と置いて式(14)の特異点を調べる。問題は Sturm-Liouville 系<sup>11)</sup>であるから、 $G_\nu(p) = 0$ を満足する根  $p$  を  $p = \pm i\omega$  とおいて式(15)に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} I_\nu(z) &= i^{-\nu} J_\nu(iz), & H_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z) + iY_\nu(z) \\ K_\nu(z) &= \frac{1}{2} \pi i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz), & H_\nu^{(2)}(z) &= J_\nu(z) - iY_\nu(z) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

なる関係式より<sup>12)</sup>次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} F_\nu(\pm i\omega) &= -\frac{\pi}{2} \left\{ J_\nu(\xi\omega) Y_\nu(\lambda\omega) - J_\nu(\lambda\omega) Y_\nu(\xi\omega) \right\} \\ G_\nu(\pm i\omega) &= \frac{\pi}{2} \omega \left\{ J_{\nu+1}(\omega) Y_\nu(\lambda\omega) - J_\nu(\lambda\omega) Y_{\nu+1}(\omega) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここで、 $J_\nu$ 、 $Y_\nu$ はそれぞれ $\nu$ 次の Bessel 関数、Neumann 関数であり、 $H_\nu^{(1)}$ 、 $H_\nu^{(2)}$ はそれぞれ $\nu$ 次の第1種、第2種の Hankel 関数である。式(17)より、 $\lim_{\omega \rightarrow 0} F_\nu(\pm i\omega)$ は有限であり、かつ $\lim_{\omega \rightarrow 0} G_\nu(\pm i\omega) = \lambda^\nu$ となるから、 $p=0$ は式(14)の特異点でないことがわかる。また $G_\nu(\pm i\omega)=0$ を満足する根 $\omega$ は無数に存在しすべて単根である。よってこれらを $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ とすれば、式(14)は

$$p = \pm i\omega_j \quad (j=1, 2, 3, \dots) \quad (18)$$

なる1位の極の無限集合を持つことがわかる。さらに $p \rightarrow \infty$ とき、

$$\frac{\bar{\varepsilon}(\xi, p)}{v'_0} \cdot e^{p\tau} \sim 0 \left[ \frac{1}{p} \exp \left\{ \tau - (\xi - 1) \right\} p \right] \quad (19)$$

であるから Jordan の補助定理より、式(14)のラプラス逆変換積分は図2に示される閉路積分に置換えられ、式(18)で与えられる極の回りの留数計算に帰着される。すなわち、 $\tau > \xi - 1$ のとき、

$$\frac{\varepsilon(\xi, \tau)}{v'_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \xi^\alpha \frac{F_\nu(p)}{G_\nu(p)} e^{p\tau} dp = \sum_{j=1}^{\infty} \text{Res} \left\{ \xi^\alpha \frac{F_\nu(p)}{G_\nu(p)} e^{p\tau} \right\}_{p=\pm i\omega_j} \quad (20)$$

ここで、 $\text{Res} \{ \}$ は留数を表わす。さらに $p = \pm i\omega_j$  ( $j=1, 2, 3, \dots$ )は1位の極であるから留数は次式で計算される。

$$\text{Res} \left\{ \frac{F_\nu(p)}{G_\nu(p)} e^{p\tau} \right\}_{p=\pm i\omega_j} = \lim_{p \rightarrow \pm i\omega_j} \frac{F_\nu(p)}{G'_\nu(p)} e^{p\tau} \quad (21)$$

ここで、 $G_\nu(p)$ の $p$ に関する1回微分 $G'_\nu(p)$ は式(15)より次式のように得られる。

$$\frac{d}{dp} G_\nu(p) = p \left\{ I_\nu(p) K_\nu(\lambda p) - I_\nu(\lambda p) K_\nu(p) \right\} - \lambda p \left\{ I_{\nu+1}(p) K_{\nu+1}(\lambda p) - I_{\nu+1}(\lambda p) K_{\nu+1}(p) \right\} \quad (22)$$

したがって、式(21)、(22)および式(16)の関係式より次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \text{Res} \left\{ \frac{F_\nu(p)}{G_\nu(p)} e^{p\tau} \right\}_{p=\pm i\omega_j} &= \frac{2g_\nu(\xi\omega_j, \lambda\omega_j)}{\omega_j \{g_\nu(\omega_j, \lambda\omega_j) - \lambda g_{\nu+1}(\omega_j, \lambda\omega_j)\}} \sin(\omega_j \tau) \\ g_\nu(\xi\omega_j, \lambda\omega_j) &= J_\nu(\xi\omega_j) Y_\nu(\lambda\omega_j) - J_\nu(\lambda\omega_j) Y_\nu(\xi\omega_j) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

よって、式(20)、(23)よりひずみに関する逆変換解すなわち原空間におけるひずみが次式のように得られる。

$$\frac{\varepsilon(\xi, \tau)}{v'_0} = 2\xi^\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_\nu(\xi\omega_j, \lambda\omega_j)}{\omega_j \{g_\nu(\omega_j, \lambda\omega_j) - \lambda g_{\nu+1}(\omega_j, \lambda\omega_j)\}} \sin(\omega_j \tau) H\{\tau - (\xi - 1)\} \quad (24)$$

ここで、 $\omega_j$ は次式を満足する第 $j$ 番目の正根である。

$$J_{\nu+1}(\omega_j) Y_\nu(\lambda\omega_j) - J_\nu(\lambda\omega_j) Y_{\nu+1}(\omega_j) = 0 \quad (25)$$

式(24)、(25)は任意の $n$ に関して成立するが、 $n=0$ (一様断面棒)の特別な場合には式(4)の無次元変数は、 $0 \leq \xi (=x/l) \leq 1$ 、 $\tau = c_0 t/l$ のように定義される。すなわち、 $n=0$ の場合は一定速

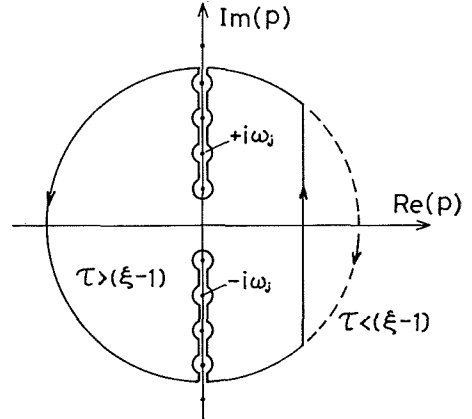


図2 反転積分路

度衝撃を受ける一様断面棒に関する周知の解となり次式が得られる。

$$\frac{\varepsilon(\xi, \tau)}{v_0'} = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j-1} \sin \{(1-\xi) \omega_j\} \sin (\omega_j \tau) H(\tau-\xi) \quad (26)$$

ただし、 $\xi = x/l$ ,  $\tau = c_0 t/l$ ,  $v_0' = l v_0/c_0$ ,  $\omega_j = (2j-1) \pi/2$

### 3. 数値計算および実験

断面形状は任意定数  $\mu, n$  によって決るが、 $\mu > 0$  のとき  $n < 0$  であれば  $A_0 > A_l$  となり、 $n > 0$  であれば  $A_0 < A_l$  となる。 $n > 0$  の場合の変断面棒形状を 図 3 に示す。また  $\mu$  は変断面棒の両端の半径  $(r)_{\xi=1} = r_0$ ,  $(r)_{\xi=\lambda} = r_l$  を用いて、式 (2) より次式のように表わされる。

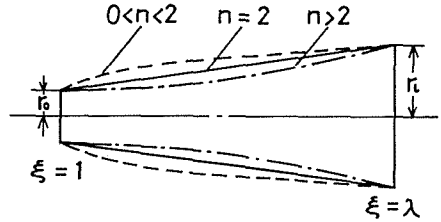


図 3  $n > 0$  の場合の変断面棒形状

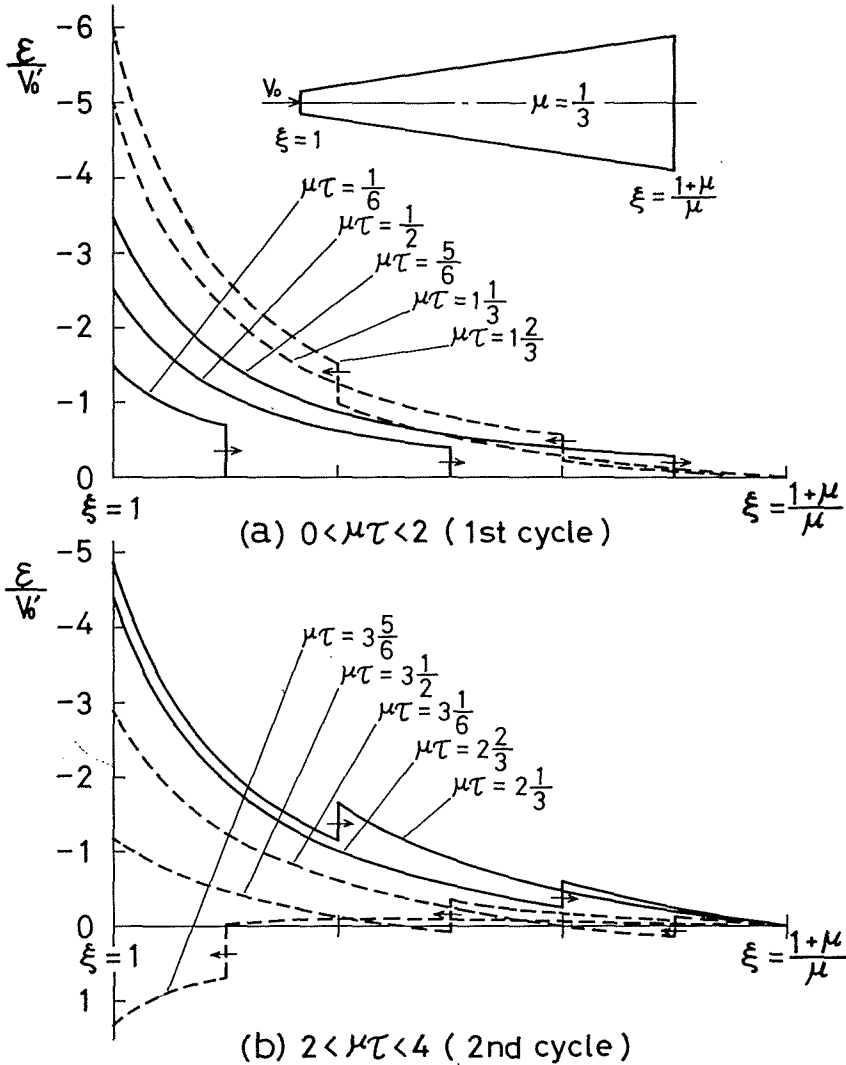


図 4 一定速度衝撃を受ける截頭円錐棒 ( $n=2, \mu=1/3$ ) を伝播するひずみ波

$$\mu = \frac{1}{(r_l/r_0)^2 - 1} \quad (27)$$

図3に示されるように  $n=2$  の場合は截頭円錐柱となる。数値計算例として、この截頭円錐の場合のひずみ波伝播に関して数値計算を行なう。

$n=2$  の場合は  $\alpha=-1/2$ ,  $\nu=-3/2$  となり、また  $m$  は正の整数として

$$\left. \begin{aligned} J_{m+\frac{1}{2}}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{m+\frac{1}{2}} \left( -\frac{d}{zdz} \right)^m \frac{\sin z}{z}, & Y_{-m-\frac{1}{2}}(z) &= (-1)^m J_{m+\frac{1}{2}}(z) \\ J_{-m-\frac{1}{2}}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{m+\frac{1}{2}} \left( \frac{d}{zdz} \right)^m \frac{\cos z}{z}, & Y_{m+\frac{1}{2}}(z) &= (-1)^{m+1} J_{-m-\frac{1}{2}}(z) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

なる半整数次の Bessel 関数の関係<sup>12)</sup> を用いれば、式(24), (25)は次式となる。

$$\frac{\varepsilon(\xi, \tau)}{v_0} = -2\xi^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^2} \frac{(1+\lambda\xi\omega_j^2) \sin\{(\lambda-\xi)\omega_j\} - (\lambda-\xi)\omega_j \cos\{(\lambda-\xi)\omega_j\}}{\lambda(\lambda-1) \sin\{(\lambda-1)\omega_j\} - \cos\{(\lambda-1)\omega_j\}} \sin(\omega_j\tau) H\{\tau - (\xi-1)\} \quad (29)$$

$$\cot\{(\lambda-1)\omega_j\} = \frac{1}{\lambda\omega_j} \quad (30)$$

超越方程式(25)あるいは式(30)の根は曲線追跡法によって求められる。ここでは、二分法<sup>13)</sup>によって小数点以下6桁まで求めた。なお式(30)あるいは一般的に式(25)を満足する  $\omega_j$  は一端固定、他端自由な変断面棒の固有振動数である。また級数解(29)の収束はゆるやかで精度を1%以下の誤差におさえるためには  $j=200$  前後の項数が必要であった。

図4は小径端に一定速度衝撃を受ける截頭円錐棒を伝播する各時刻におけるひずみ波で、式(29), (39)より計算した理論値である。ただし、棒の寸法は  $r_0=5$  mm,  $r_l=20$  mm, したがって  $\mu=1/3$  の場合である。図4(a)は1往復目の波形で、実線で示される波形は無次元時間  $0 \leq \tau \leq 1/\mu$  の進行波であり、破線は自由端よりの反射波を含む  $1/\mu \leq \tau \leq 2/\mu$  の波形である。図4(b)は2往復目の波形である。数値のマイナスは圧縮、プラスは引張りを表わす。ただし、各波頭の矢印はそれらの進行方向を示す。

これら理論波形の妥当性を検討するため Hopkinson bar 形<sup>14)</sup> の実験を行なった。使用した截頭円錐棒は鋼でその寸法は、棒Aとして  $r_0=5$ ,  $r_l=12.5$ ,  $l=750$  (単位はmm) したがって  $\mu=2/3$ , 棒Bとして  $r_0=5$ ,  $r_l=20$ ,  $l=750$  したがって  $\mu=1/3$  の2

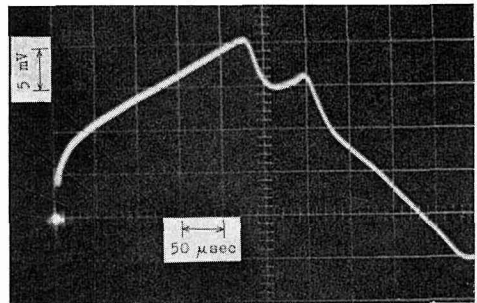


図5 棒A ( $r_0=5$ ,  $r_l=12.5$ ,  $l=750$ ) の衝撃端より150 mmの位置におけるひずみ波の時間変動

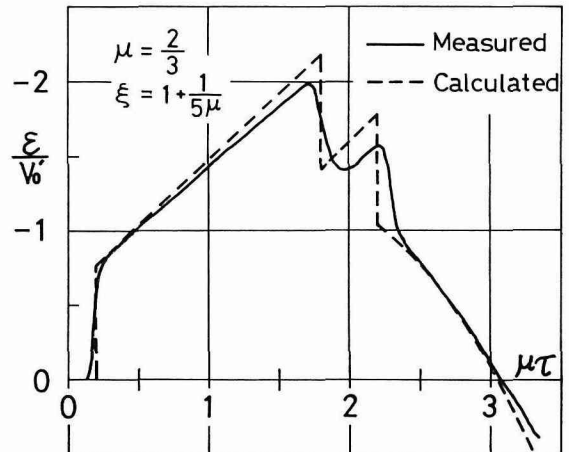


図6 棒A ( $n=2$ ,  $\mu=2/3$ ) の衝撃端より1/5位置におけるひずみ波の時間変動の実験値と理論値の比較

種類である。式(11)の境界条件をそのまま実験条件として実現することは困難であるが、上述の寸法の異なる2種類の截頭円錐棒の各小径端に半径20 mm、長さ750 mmの一樣断面棒を衝突させて一定速度衝撃状態が近似的に実現されるように実験を行なった。実験方法の詳細は省略するが、棒の各点にそれぞれ半導体ひずみゲージを軸対称に4枚ずつ接着しホイートストン・ブリッジ回路を通して直接プラン管オシログラフにつなぎ、ひずみ波形の時間変動を測定した。

図5は棒Aの衝撃端より150 mmの距離の位置におけるひずみの測定例である。

図6は図5を無次元変数 $\xi$ ,  $\tau$ で処理したひずみ波の時間変動を実線で、対応する計算値を破線で示した図である。

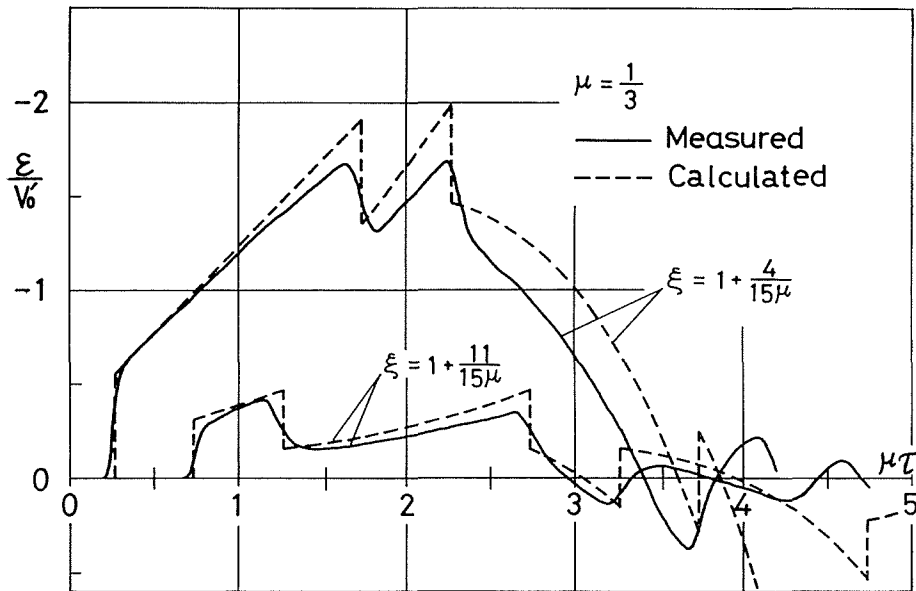


図7 棒B ( $n=2$ ,  $\mu=1/3$ )の衝撃端より4/15, 11/15位置におけるひずみ波の時間変動の実験値と理論値の比較

図7は棒Bの衝撃端よりの距離200 mmおよび550 mmの各位置におけるひずみ波の時間変動を図6と同様な処理によって示した図である。 $\mu\tau=4$ 前後、すなわち波頭の2往復時間範囲では実験値と計算値は良く一致しており、波頭が2往復する時間ぐらまでは一定速度衝撃状態が近似的に実現されていると判断される。したがってさらに大きな衝撃体を用いればさらに長い時間範囲で実験値が一致することが予想される<sup>15)</sup>。また図6, 7ともに各位置におけるひずみの最大値を比較すれば計算値が実験値よりも大きくなっている。これは実験的には完全な剛体による一定速度衝撃でないこと等によるであろう。すなわち、変断面棒に比べてさらに剛体に近い寸法の大きな衝撃体を用いれば実験値と計算値は定量的にもより一致することが推察される。

#### 4. 結 言

漸変断面を有する有限長棒を伝播する弾性波の挙動を一定速度衝撃状態を仮定してラプラス変換法を用いて解析した。逆変換積分は一端固定、他端自由な変断面棒の固有振動数を極とする留数計算に帰着され、無限級数表示による解が得られた。一例として截頭円錐柱の場合に関してひずみ波形の数値計算を行ないその伝播波形を明らかにした。また変断面棒上の各点におけるひ

ずみ波の時間変動を測定し、計算値との比較を行なった結果、実験波形と理論波形は定量的にもかなり良く一致し解析結果の妥当性が確認された。

#### 参 考 文 献

- 1) 得丸英勝：振動論(昭48)，コロナ社。
- 2) E. Eisner：J. Acoust. Soc. Am., 41 (1967), 1126.
- 3) D. Rader and M. Mao：Experi. Mech., 72-2 (1972), 90.
- 4) J. W. Landon and H. Quinney：Proc. Royal Soc. London, Ser. A, 103 (1923), 622.
- 5) 田中 昇：機論, 27-176 (昭36), 501.
- 6) V. H. Kenner and W. Goldsmith：Experi. Mech., 8-10 (1968), 442.
- 7) V. H. Kenner, W. Goldsmith and J. I. Sackman：Trans. ASME., Ser. E, 36 (1969), 445.
- 8) T.-Y. Tsui：Trans. ASME., Ser. E, 35 (1968), 824.
- 9) H. D. Fisher：Trans. ASME., Ser. E, 39 (1972), 1159.
- 10) G. H. Handelman and L. A. Rubinfeld：Trans. ASME., Ser. E, 39 (1972), 278.
- 11) R. V. Churchill：Operational Mathematics, 2nd ed. (1958), McGraw-Hill.
- 12) N. W. McLachlan：Bessel Functions for Engineers (1955), Oxford University Press.
- 13) T. R. McCalla：数値計算法概論(昭47)，サイエンス社。
- 14) H. Kolsky：Stress Waves in Solids (1963), Dover Publications.
- 15) 松本浩之，三室 弘，松森保雄，中原一郎：機論, 29-197 (昭38), 49.