HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	前向きステップにおける剥離渦
Author(s)	谷口，清一；木谷，勝；有江，幹男
Citation	北海道大學工學部研究報告，77，1-11
Issue Date	1975-10-04
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41316
Type	departmental bulletin paper
File Information	77_1-12.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第77号 (昭和50年)

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 77 (1975)

前向きステップにおける剝離渦

谷口清一* 木谷 勝** 有江幹男**

(昭和50年3月31日受理)

Separation Eddy in front of a Forward-facing Step on a Plane Boundary

Seiichi TANIGUCHI Masaru KIYA Mikio ARIE

(Received March 31, 1975)

Abstract

This paper describes numerical solutions of the Navier-Stokes equations for a two-dimensional flow over a forward-facing step attached to a plane boundary. An upwind-difference scheme was employed to obtain the numerical solutions for Reynolds numbers ranging from 100 to 2500. Results are presented for the pressure distribution, the separation points and the displacement and momentum thicknesses of the laminar boundary layer upstream of the step. Pohlhausen's second shape-factor at the separation points calculated on the basis of the numerical solutions was found to be hardly influenced by the change of the Reynolds number. The separation point shifts upstream as the Reynolds number becomes larger. However, its location tends to approach to a fixed point when the Reynolds number becomes larger than approximately 1200.

Flow visualization by aluminum-dust with the aid of a slit light was also performed for the purpose of comparing the numerical solutions with the actual flow patterns. A fairly good agreement between the calculated and observed flow patterns was obtained.

2. 緒 言

流体が固体壁に沿って流れる場合，しばしば剝離を生ずることがある。剝離の原因は固体壁自身の形状によることもあるし，固体壁上の突起物あるいは障害物によることもある。剝離が生ずると一般には剝離渦が形成され，流れ学的に複雑な挙動を示すようになる。工学的観点からすれば剝離発生の条件を明らかにし，これを制御することは抗力の減少，流体機械の性能向上を計る上などで重要な意義がある。

固体壁に沿って発達する境界層の解析は Prandtl の境界層方程式にもとづいて行なうことができる。1960年代までは主にこの方法によって数多くの境界層問題が解析されてきた。しかし Prandtl の境界層方程式の導出法より明らかなように，剝離渦が生じている流れに対してこの方程式を適用することは非常に困難である。流れ場に剝離渦が生じている問題を理論的に取り扱うためには Navier-Stokes 方程式を対象としなければならない。Navier-Stokes 方程式の解析はそ

* 北見工業大学 機械工学科
** 機械工学科 流体工学第一講座

の非線形性に基づく数学的取り扱い上の困難さのために，特殊な二，三の例を除いてはきわめて困難である。しかし近年における電算機の大型化，高速度化に伴い Navier-Stokes 方程式を階差式に変換して数値的に解く方法が急速に発達し，かなりの成果を収めている。

剝離を伴う物体周辺の流れにおいては圧力，剪断応力などが複雑な分布状態を示すとともに，工学的にも重要な問題を含む場合が多い。二次元的構造物周辺の流れについて考えてみると，構造物前方には正の圧力勾配が誘起され，この圧力勾配のために生ずる前方剝離渦と構造物前縁から剝離して物体後方に形成される後方渦 (wake) の二種類の渦が観察される。後方渦については Macagno[2], Roache[3] らの数値解による報告があり，またいくつかの可視化実験の報告[4] もある。

本論文は平板上に設けられたステップにより誘起される剝離渦を二次元定常流として取り扱ったものである。基礎方程式としての Navier-Stokes 方程式を upwind-difference 法[5] によって階差式に変換し S.O.R. 法による繰り返し計算を行って正の圧力勾配が存在する流れ場での境界層特性，剝離条件および剝離渦の特性などを明らかにすることを試みてある。更に数値解と実際の流れ場とを比較検討するためにアルミニウム粉末を用いた可視化実験をあわせて実施してある。

2. 基礎方程式および境界条件

二次元定常流を解析するための基礎方程式は次の 3 式で与えられる (Fig. 1 参照)。

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{3}$$

ここに，p は ρU_0^2 で無次元化された圧力，Re は $Re=U_0H/\nu$ として定義される Reynolds 数である。ただし U_0 はステップの十分上流における近寄り速度，H はステップの高さである。上式に流れ関数 ψ および渦度 ζ を代入して整理することにすれば，

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{4}$$

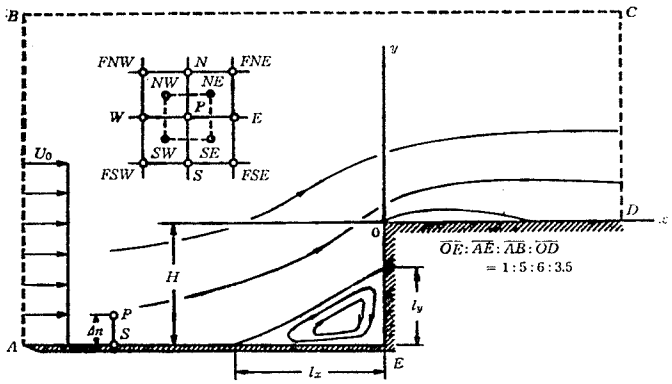


Fig. 1. Geometry of flow field and finite-difference mesh.

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{5}$$

であるから上記基礎方程式は,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right) \tag{6}$$

$$-\zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \tag{7}$$

となり，これらの2式は未知数 ψ, ζ についての連立方程式を構成する。

境界条件は平板前縁において一様流入条件を仮定し，固体壁上ではすべりがなく，上部境界においては流線が平板と平行であるものとし，更に流出条件として流出断面における流れは壁面とほぼ平行であるものと想定し，二次の外挿法を適用した。即ちこれらの境界条件を Fig. 1 によって示すと

$$\overline{AB};\ \psi = y, \qquad \zeta = 0 \tag{8}$$

$$\overline{AEOD};\ \psi = 0, \qquad \zeta = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} \tag{9}$$

$$\overline{BC};\ \psi = \psi_{LID}\ (\text{一定}), \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \tag{10}$$

$$\overline{CD};\ \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = 0, \qquad \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0 \tag{11}$$

である。

3. 階差方程式

(6), (7) 式を数値的に解くためには，これらの方程式を階差式に変換しなければならない。従来 Navier-Stokes 方程式を解くためには中心階差法が多く採用されてきた。しかし本論文では Reynolds 数の大きな領域における解の不安定性を除くために Greenspan によって開発された upwind-difference 法を採用する。この方法による解の安定性は Spalding ら[5] により数値実験的に検討され，Thoman and Szewczyk[6], Roache[3], 木谷・有江[7] らによって応用されている。

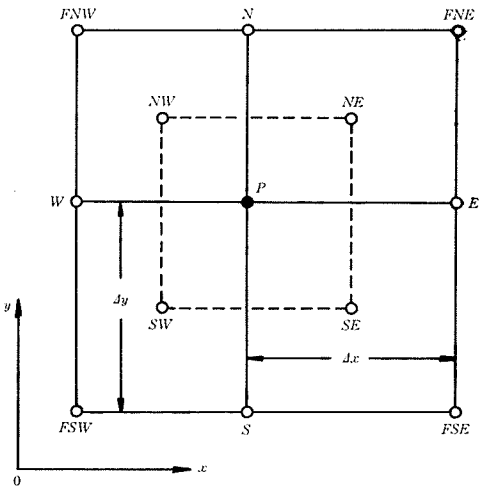


Fig. 2. Finite-difference mesh for numerical calculation.

メッシュ幅の設定に当たっては特に流れの変化の激しいステップ前後を細かく分割するために可変メッシュとし，次のような座標系を選んだ。

$$\left.\begin{aligned} x &= a \sinh \xi \\ y &= b \sinh \eta \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

ここに a, b は座標の拡大係数で本計算では $a=0.4991$, $b=0.6625$ とし，ξ, η 座標におけるメッシュ幅を $\Delta\xi=\Delta\eta=0.1$ とした。

Fig. 2 に示した記号を用いると (6), (7) 式の階差式はそれぞれ

$$A_P\zeta_P = A_N\zeta_N + A_S\zeta_S + A_E\zeta_E + A_W\zeta_W \tag{13}$$

$$A_P^*\psi_P = A_N^*\psi_N + A^*\psi_S + A_E^*\psi_E + A_W^*\psi_W + \frac{(x_E-x_W)(y_N-y_S)}{2}\zeta_P \tag{14}$$

となる。ここに

$$\left.\begin{aligned} A_N &= \frac{y_N-y_S}{y_N-y_P}(\psi_{NE}-\psi_{NW}+|\psi_{NE}-\psi_{NW}|)+\frac{2(x_E-x_W)}{Re(y_N-y_P)} \\ A_S &= \frac{y_N-y_S}{y_P-y_S}(\psi_{SW}-\psi_{SE}+|\psi_{SW}-\psi_{SE}|)+\frac{2(x_E-x_W)}{Re(y_P-y_S)} \\ A_E &= \frac{x_E-x_W}{x_E-x_P}(\psi_{SE}-\psi_{NE}+|\psi_{SE}-\psi_{NE}|)+\frac{2(y_N-y_S)}{Re(x_E-x_P)} \\ A_W &= \frac{x_E-x_W}{x_P-x_W}(\psi_{NW}-\psi_{SW}+|\psi_{NW}-\psi_{SW}|)+\frac{2(y_N-y_S)}{Re(x_P-x_W)} \\ A_P &= A_N+A_S+A_E+A_W \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} A_N^* &= (y_N-y_S)/(x_E-x_P) \\ A_S^* &= (y_N-y_S)/(x_P-x_W) \\ A_E^* &= (x_E-x_W)/(y_N-y_P) \\ A_W^* &= (x_E-x_W)/(y_P-y_S) \\ A_P^* &= A_N^*+A_S^*+A_E^*+A_W^* \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

である。次に境界条件式(8)～(11)に対する階差式を求めると，(i, j) を格子番号とするとき

$$\psi_{1,j} = y_j, \qquad \zeta_{1,j} = 0 \tag{17}$$

$$\psi_{i,A} = 0, \qquad \zeta_{i,A} = -\frac{3\psi_{i,A+1}}{\Delta y^2} - \frac{\zeta_{i,A+1}}{2} \tag{18}$$

$$\psi_{E,j} = 0, \qquad \zeta_{E,j} = -\frac{3\psi_{E-1,j}}{\Delta x^2} - \frac{\zeta_{E-1,j}}{2} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \psi_{D,j} &= \left(1+\frac{x_D-x_{D-1}}{x_{D-1}-x_{D-2}}\right)\psi_{D-1,j} - \left(\frac{x_D-x_{D-1}}{x_{D-1}-x_{D-2}} - \frac{x_D-x_{D-1}}{x_{D-2}-x_{D-3}}\right)\psi_{D-2,j} \\ &\quad - \left(\frac{x_D-x_{D-1}}{x_{D-2}-x_{D-3}} + \frac{x_D-x_{D-1}}{x_{D-3}-x_{D-4}}\right)\psi_{D-3,j} + \frac{x_D-x_{D-1}}{x_{D-3}-x_{D-4}}\psi_{D-4,j}, \\ \zeta_{D,j} &= \left(1+\frac{x_D-x_{D-1}}{x_{D-1}-x_{D-2}}\right)\zeta_{D-1,j} - \left(\frac{x_D-x_{D-1}}{x_{D-1}-x_{D-2}} - \frac{x_D-x_{D-1}}{x_{D-2}-x_{D-3}}\right)\zeta_{D-2,j} \\ &\quad - \left(\frac{x_D-x_{D-1}}{x_{D-2}-x_{D-3}} - \frac{x_D-x_{D-1}}{x_{D-3}-x_{D-4}}\right)\zeta_{D-3,j} + \frac{x_D-x_{D-1}}{x_{D-3}-x_{D-4}}\zeta_{D-4,j} \end{aligned} \tag{20}$$

$$\psi_{i,LID} = \psi_0(\text{const.}), \qquad \zeta_{i,LID} = \zeta_{i,LID-1} \tag{21}$$

となる。以上でステップ周辺の流れ場を計算するための階差方程式および境界条件がすべて用意されたことになる。数値解を求めるには各格子点に適当な初期値を与えて S.O.R. 法による繰り返し計算を行う。各格子点における n 回目と $(n+1)$ 回目の近似解との間の関係は次のようになる。

$$\psi^{n+1} = \psi^n + \alpha(\psi^{n+1/2} - \psi^n) \tag{22}$$

$$\zeta^{n+1} = \zeta^n + \beta(\zeta^{n+1/2} - \zeta^n) \tag{23}$$

ここに $\psi^{n+1/2}$, $\zeta^{n+1/2}$ は (13), (14) 式によって求められた近似解であり，α, β は緩和係数である。なお ε_1,

Table 1. Relaxation parameters.

Re	α	β	number of iteration
100	1.10	0.60	900
300	0.50	0.30	400
600	0.40	0.25	501
1200	1.00	0.10	910
2500	1.00	0.10	901

ε_2 を適当な値に指定した正の定数として，すべての格子点で

$$\left|\frac{\psi^{n+1}-\psi^n}{\psi_B}\right| \leqq \varepsilon_1 \qquad \left|\frac{\zeta^{n+1}-\zeta^n}{\zeta_O}\right| \leqq \varepsilon_2$$

が満たされたときに収束解が得られたものと判定することとし，本計算では $\varepsilon_1=\varepsilon_2=5.0\times10^{-5}$ を採用した。また ψ_A, ζ_0 は Fig. 1 における B 点，O 点での ψ, ζ の値である。本計算において用いた α, β の値および反復回数を各 Reynolds 数に対して Table 1 に示してある。

4. 計算結果および考察

数値計算は Re 数が 100, 300, 600, 1200, 2500 の 5 通りについて行ったがその例を $Re=300$, 600, 1200 の場合について Fig. 3 (a), (b), (c) に示してある。

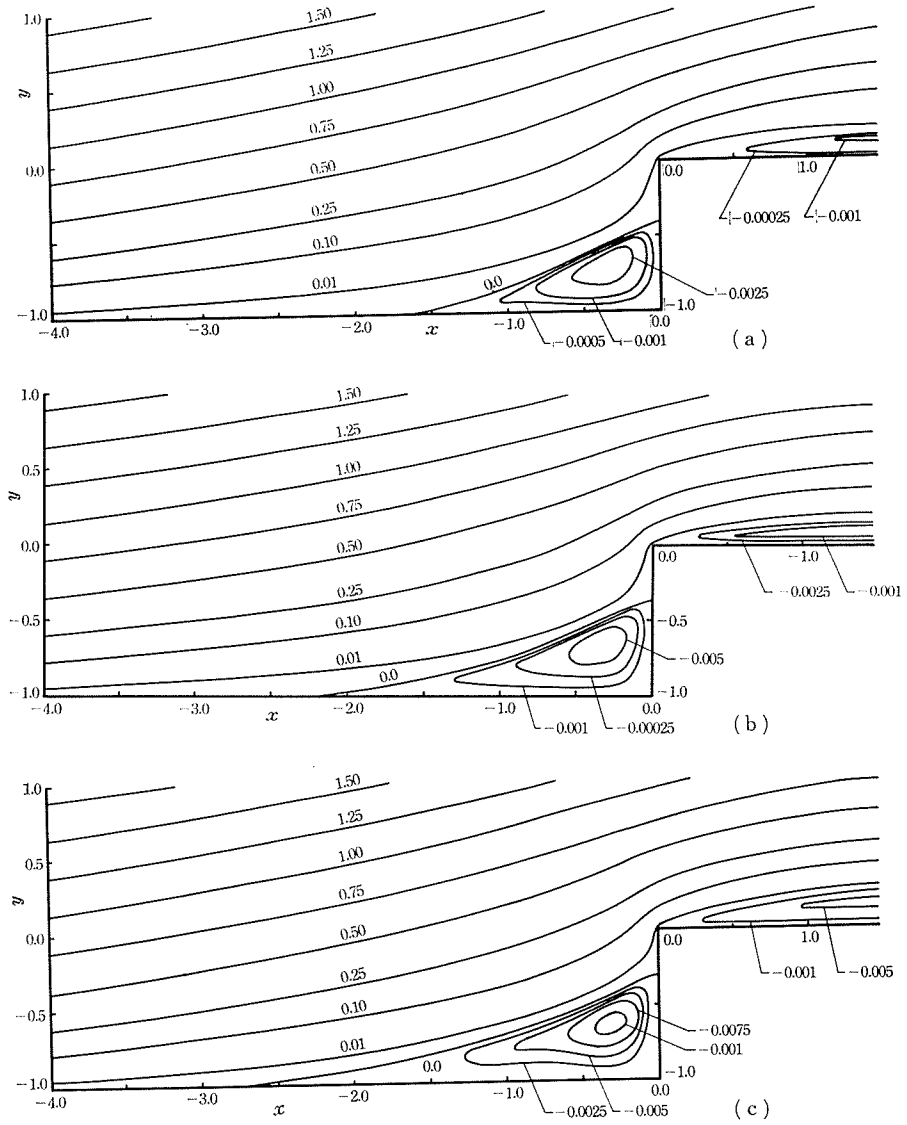


Fig. 3. Flow patterns; (a) $Re=300$, (b) $Re=600$, (c) $Re=1200$.

一連の計算によるとステップ前方の剝離渦は Re 数が増大するとともに大きくなる。しかし Fig. 4 からも明らかなようにステップ前方の剝離渦は本研究において取り扱っている流れ場の幾何学的形状に関する限り，$Re=1200$ および 2500 において渦の大きさにはそれ程変化がみられない。このことから流れが層流状態を保つ限り Re 数をこれ以上大きくしても剝離渦の大きさは，余り変化しないと考えられる。ステップ周辺の等渦度線図を Fig. 5 に示す。これらの図によると強い渦度がステップ先端より発生して下流方向に流されていることがわかる。更に Re 数の増加と共に強い渦度領域が下流に伸び壁面に近付いてくることが判る。速度分布図 (Fig. 6) においては x 方向の速度成分 u を実線で，y 方向の速度成分 v を破線で示してある。u の分布は下流方向に進むにつれてステップの存在のために壁面近傍の速度欠損が次第に大きくなり，ついには剝離型の分布状態になる。剝離点をこえると逆流を生じステップ前方に剝離渦を形成しているのが判る。流速 v についてみると流入境界に近い部分では流れが壁面とほぼ平行であるために v は極めて小さく，下流に進むにつれて速度ベクトルが次第に立ち上っていくために v も順次大きくなりステップ端近傍で最大となっている。ステップ上を更に下流に進むと速度ベクトルも壁面と平行になるため，v の大きさも急速に小さくなることが認められる。

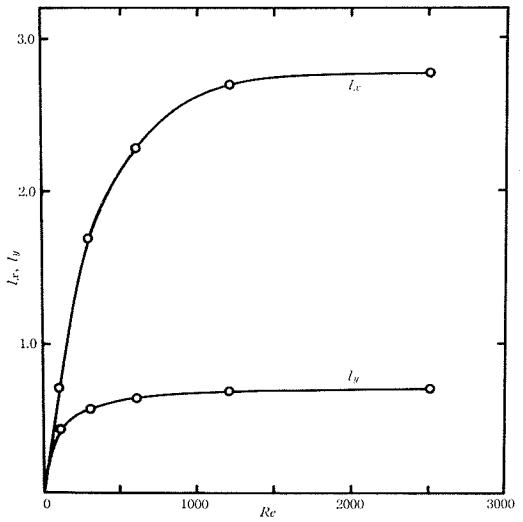
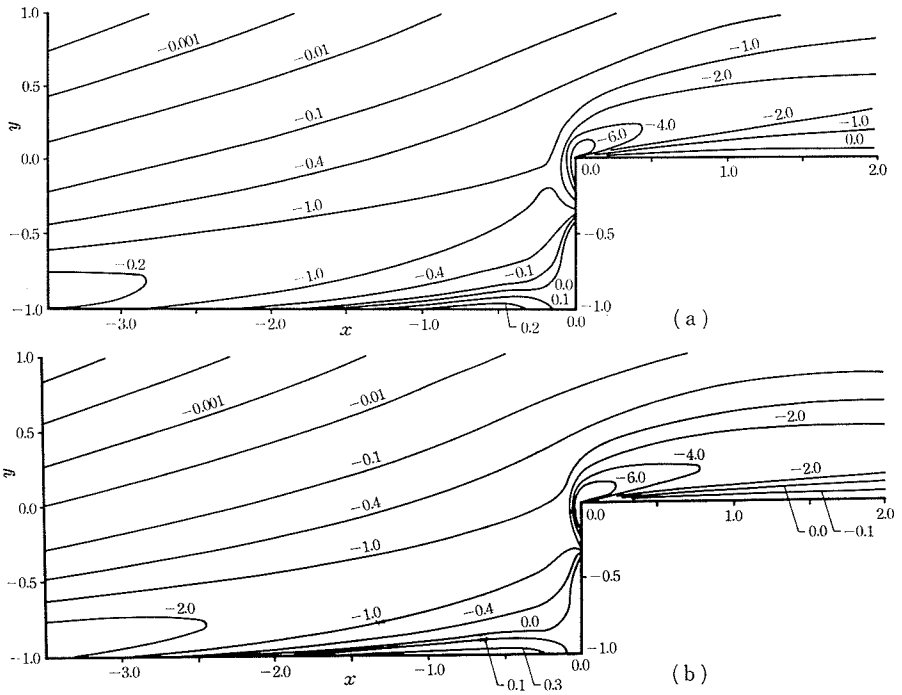


Fig. 4. Variation of length of vortices with Reynolds number.



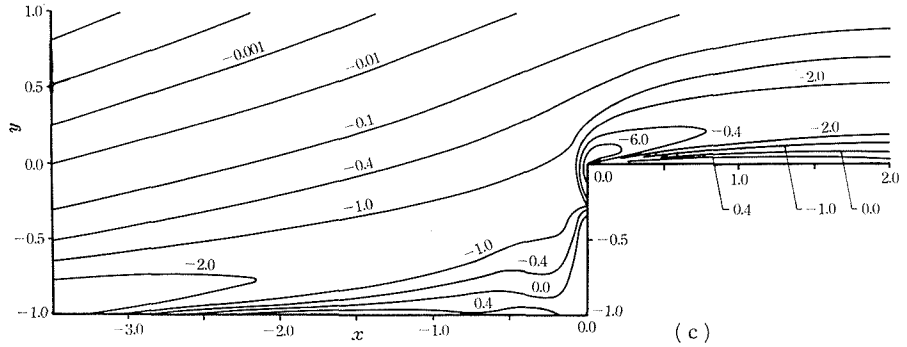


Fig. 5. Lines of constant vorticity; (a) $Re=300$, (b) $Re=600$, (c) $Re=1200$.

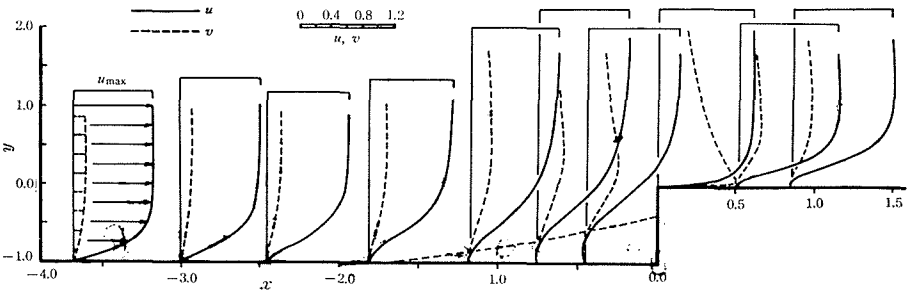


Fig. 6. Velocity distribution; $Re=300$.

境界層の排除厚さ δ^* および運動量厚さ θ は次式で与えられる。

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1-\frac{u}{U}\right) dy \tag{25}$$

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right) dy \tag{26}$$

ここに u は境界層内の x 方向の速度成分, U は主流速度である。上式に基づいて求めた δ^*, θ の分布を Fig. 7 および Fig. 8 に示してある。

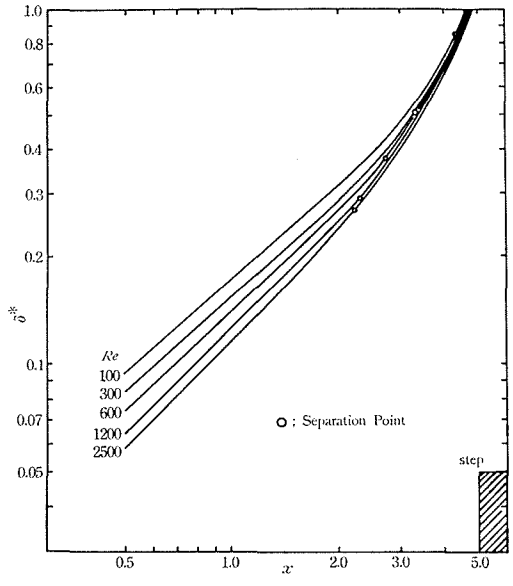


Fig. 7. Distribution of displacement thickness.

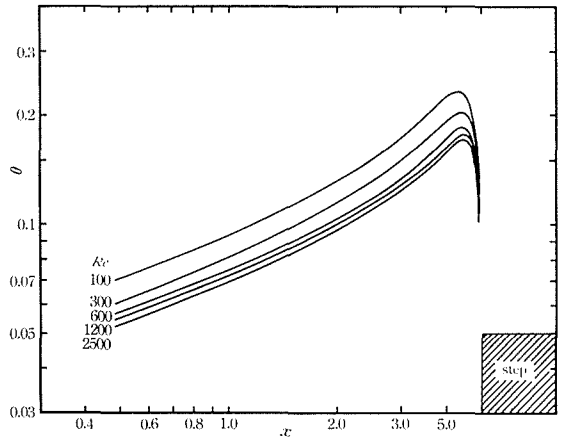


Fig. 8. Distribution of momentum thickness.

Fig. 7 によると排除厚さ δ^* はステップ位置に近付く程増大し，剝離点近傍ではその増加の割合が大きくなっていることが判る。このことは運動量厚さ θ についても同様である。

静圧分布は基礎式 (1) および (2) を圧力 p についてそれぞれ x 方向，y 方向について積分することによって求められる。いま x 方向について考えてみると，

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{1}{Re}\frac{\partial \zeta}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2)+\zeta v \tag{27}$$

であるから上式を x 方向に積分して

$$\begin{aligned}p_{i+1,j}&=p_{i,j}-\frac{1}{Re}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\partial \zeta}{\partial y}dx-\frac{1}{2}(u^2+v^2)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}+\int_{x_i}^{x_{i+1}}\zeta v dx\\&=p_{i,j}-\frac{1}{2Re}(x_{i+1}-x_i)\left\{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)_{i+1,j}+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)_{i,j}\right\}-\frac{1}{2}\left\{(u^2+v^2)_{i+1,j}-(u^2+v^2)_{i,j}\right\}\\&\quad+\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)\left\{(\zeta v)_{i+1,j}+(\zeta v)_{i,j}\right\}\end{aligned} \tag{28}$$

が得られる。同様に y 方向については，

$$\begin{aligned}p_{i,j+1}&=p_{i,j}-\frac{1}{2Re}(y_{j+1}-y_j)\left\{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_{i,j+1}+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_{i,j}\right\}-\frac{1}{2}\left\{(u^2+v^2)_{i,j+1}-(u^2+v^2)_{i,j}\right\}\\&\quad-\frac{1}{2}(y_{j+1}-y_j)\left\{(u\zeta)_{i,j+1}+(u\zeta)_{i,j}\right\}\end{aligned} \tag{29}$$

式 (28) および (29) を用いてステップ前方の平板およびステップ面に沿う静圧分布を求め，その結果を Fig. 9 および Fig. 10 に示してある。

Fig. 9 は $x=-4$ における平板上の静圧を基準圧力として圧力係数の形でまとめたものである。各 Re 数にわたってステップ前方で圧力が急速に立ち上っているが，ステップ位置に近付くにつれ圧力勾配は次第に小さくなっていることが判る。このことは，渦領域においては圧力の変化がそれ程大きくないことを示すものである。Fig. 10 ではステップ前面に沿う圧力分布をその最大値を 1 として表示してある。この図によると最大圧力点はおおよそ剝離渦の再付着点に対応し，Re 数の増加と共にステップの上方に移動している。またステップ先縁における圧力は Re 数の減少と共に減少している。

次に剝離条件について考察してみる。正の圧力勾配が存在する場合，平板に沿って発達する層流境界層は剝離点に近付くにつれて急速に厚さを増し，剝離点で流体塊が平板よりはがれるに至る。Kármán および Pohlhausen[1] は二次元層流境界層方程式に 4 次の多項式で近似した速度分布を代入して剝離条件を求めている。本数値解に基づいて彼ら

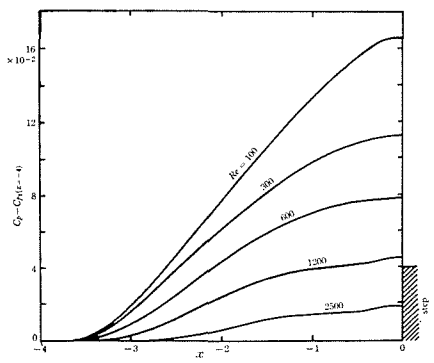


Fig. 9. Pressure distribution along the surface of the flat plate upstream of the step.

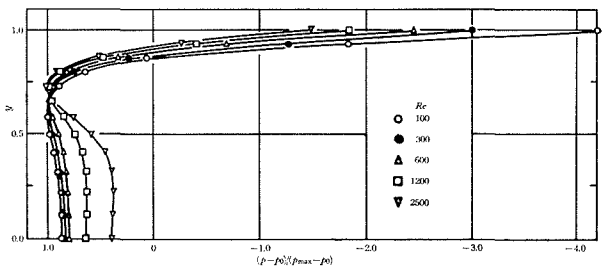


Fig. 10. Pressure distribution along the surface of the step.

の与えた第2形状係数

$$K = -\theta^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu U} \qquad (30)$$

を算出した結果を Fig. 11 に示す。この図に示されている破線は境界層理論から求められた Pohlhausen の剥離条件であり，本計算結果は Pohlhausen の値よりも幾分小さくなっている。しかしこれらの値は Re 数によらずほぼ一定値となっていて Pohlhausen の条件はこの場合にも適用できるものと考えられる。

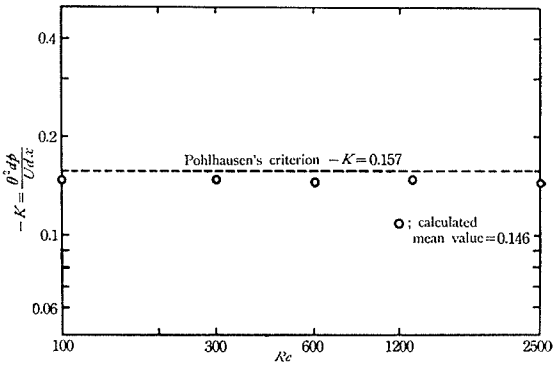


Fig. 11. Pohlhausen's second shape factor at the separation point.

5. 可視化実験

ステップ前方における剥離渦の数値解と実際の流れとを比較検討するためにアルミニウム粉末法による流れの可視化を試みた。アルミニウム粉末法による流れの可視化の具体的方法は有江ら[8]により詳しく述べられているが，本研究においても液面上に浮遊しているアルミニウム粉末を利用するのではなく，スリット光源を用い液体中に浮遊しているアルミニウム粉末をトレーサとして可視化する方法を用いた。

5-1 実験装置

Fig. 12 に示すように実験装置は Towing Tank (幅 40 cm×深さ 80 cm×長さ 400 cm) と自台式走車の底部に釣り下げられた供試物体，および台車上に設置されたカメラより成っている。液体中に浮遊するアルミニウム粉末をトレーサとして用いるために，光源はカメラ軸と垂直な面に設置されている。二次元的に流れの可視化を行うために，光は二枚のスリットを通り水面下 20～30 mm の位置に厚さ約 7 mm の光膜を作り，水中に浮遊しているアルミニウム粉末を照射する。アルミニウム粉末は光を反射し，トレーサとして平板上におかれたステップ周辺の流れの可視化に供される。供試物体は Fig. 1 に示した寸法比で作られている。ただし，ステップの高さは 4 cm である。

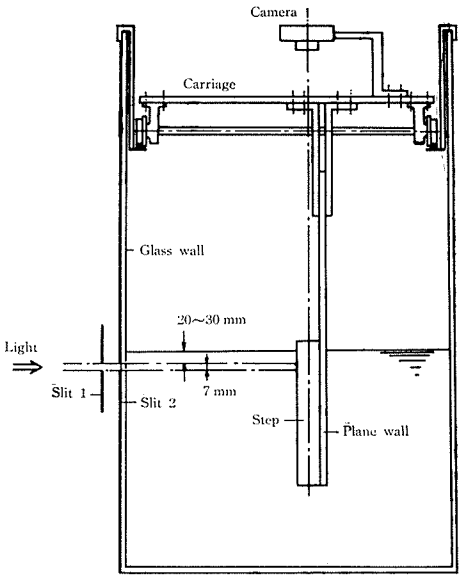


Fig. 12. Apparatus for flow visualization.

5-2 観測結果および考察

観測においては自走台車の速度を変化させることにより Re 数を変化させた。その範囲は約 $290 < Re < 550$ である。この Re 数以上の広い範囲にわたる実験は装置上困難であった。

Fig. 13 に Re 数の変化に伴うステップ前方の剥離渦が示してある。これらの写真によると前方剥離渦はステップ高さの約 2.2 倍の所からはじまり，ステップの高さの約 0.7 倍の所でステップ面に再付着していることが判る。この前方剥離渦は比較的安定

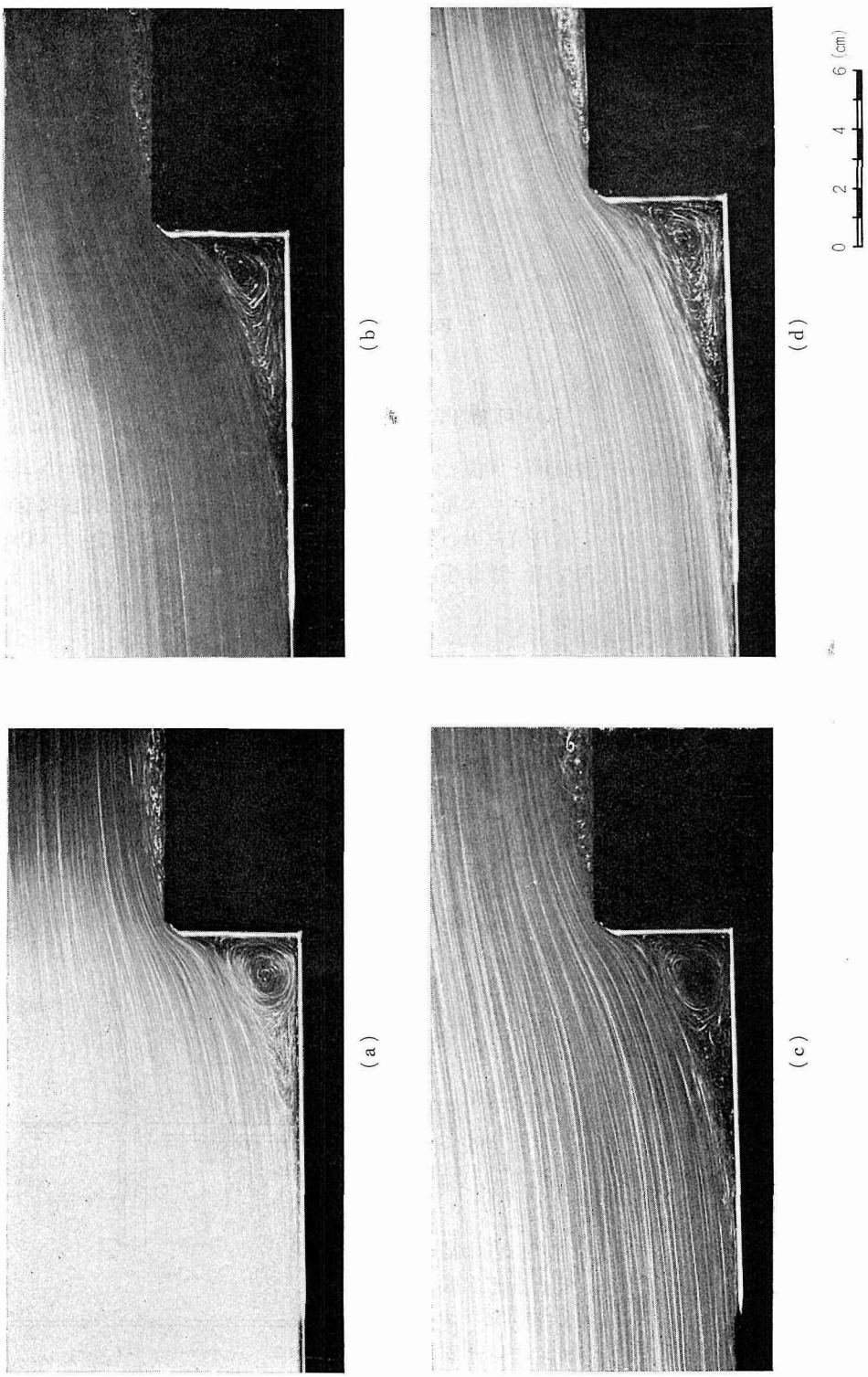


Fig. 13. Flow patterns visualized by aluminium-dust method.
(a) $Re=298$, (b) $Re=455$, (c) $Re=494$, (d) $Re=511$

していて長時間撮影（約40秒）を行なった場合についても同一の形状が認められた。$Re=300$ および600の場合に対する数値計算の結果と可視化写真とを比較すると，ステップ周辺の流れおよび渦の形状について比較的良い一致をみることができる。しかし Re 数の増加に伴う剥離渦の増大は撮影された写真の範囲では認められなかった。

6. 結　　言

本研究の結果次のことが明らかになった。平板上にステップが設置された場合，ステップ前方の平板に沿って発達する境界層は急速に厚くなり，遂にはステップ前方において剥離するにいたる。この剥離点は Reynolds 数によって異なるが，Reynolds 数が1200以上になると剥離点の位置は余り変化しなくなる。剥離条件として Pohlhausen の第2形状係数を計算した結果と Pohlhausen が境界層方程式ならびに4次の多項式による速度分布近似式を用いて求めた結果と比較すると，Pohlhausen の値より若干低い値を示すものの Reynolds 数とは無関係に一定値をとり，剥離条件を与える Pohlhausen の条件式はこの場合にも適用できるものと考えられる。

数値解と実際の流れとを比較検討するためにアルミニウム粉末をトレーサとして用いる可視化実験をあわせて行った。測定された Reynolds 数の範囲は $290<Re<550$ である。ステップ前方の剥離渦およびステップ周辺の流れについて数値計算結果と観測結果とは比較的良好な一致をみた。

参 考 文 献

1) H. Schlichting: Boundary-Layer Theory, 6th, ed., (1968), McGraw-Hill.
2) E. Macagno and T. Hung: J. Fluid Mechanics, **28-1** (1967), p. 43.
3) P. Roache: AIAA Journal, **8-3** (1968), p. 530.
4) 福迫・木谷・有江：北大工学部研究報告, **54** (昭和44), p. 155.
5) D. B. Spalding *et al.*: Physics of Fluids, **12-12** (1969), p. II-21.
6) D. Thoman and A. A. Szewczyk: Physics of Fluids, **12-12** (1969), p. II-76.
7) 木谷・有江：日本機械学会論文集, **41-346** (昭和50-6), p. 1830.
8) 有江・木谷・田村：流れの可視化シンポジウム, 第2回 (1974), p. 121.