HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	有限要素法によるマイクロ波平面回路の計算機解析 ： 直角コーナ及びT分岐
Author(s)	川端, 一彰; 伊藤, 精彦; 立蔵, 公一 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 77, 61-68
Issue Date	1975-10-04
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41317
Type	departmental bulletin paper
File Information	77_61-68.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第77号（昭和50年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 77 (1975)

有限要素法によるマイクロ波平面回路の計算機解析

——直角コーナ及びT分岐——

川端一彰* 伊藤精彦*
立蔵公一* 松本 正*

（昭和50年3月31日受理）

Computer Analysis of Microwave Planar Circuits by Finite Element Method

—— Right Angle Corners and Tee Junctions ——

Kazuaki KAWABATA Kiyohiko ITOH
Kouichi TATEKURA Tadashi MATSUMOTO

(Received March 31, 1975)

Abstract

A computer analysis of microwave planar circuits, especially right angle corners and tee junctions, is described.

The admittance matrix of a arbitrarily shaped planar circuit is formulated in terms of eigenfunctions related to the circuit geometry. The necessary eigenfunctions are found by the use of a high order finite element technique.

In this paper, to show the accuracy of the improvement achieved by means of the higher order representation, the eigenvalues of a rectangular planar circuit were calculated. The most appropriate trimming of right angle corners and tee junctions to reduce the standing-wave ratio is discussed.

1. 緒 言

近年，有限要素法は，構造力学や電磁界問題など，広い分野にわたって用いられ，その優秀性が高く評価されている。従来，多くの有限要素法においては，領域を分割した要素内において，決定すべき未知関数を1次の多項式で近似する方法が取られてきたが，本文では，高次の多項式で近似する[1]。高次の多項式近似を適用することにより，固有値問題を解法した場合の固有値がより正確に求まった。

さて一方，現在，マイクロ波集積回路が進歩するにともない，回路設計において，より厳密な取り扱いが必要となってきた。さらに，設計の自由度を増すという意味において，平面回路[2]が提案され，種々の研究が行なわれている。平面回路を一つの電気回路として考えた場合の回路網定数の決定は，平面回路の形状による2次元スカラヘルムホルツ方程式の固有値問題を解くことに帰着される。固有値，固有関数が解析的に決定できない任意形状の平面回路に対しては，有

* 電子工学科 電波伝送工学講座

限要素法が固有値問題を解くうえに，一つの有用な数値計算法となる。

本文では，高次の有限要素法により，マイクロストリップ線路型平面回路のうちで，アレイアンテナなどの給電用回路素子として用いられる，直角コーナ及びT分岐の角取り問題について計算機解析を行なった。直角コーナについては，A. A. Oliner の式による計算値と本解析値を比較し，さらに，角を取っていた場合の整合帯域の広がりを示している。T分岐についても同様に，接合部にきざみを入れていった場合の一般的傾向を示している。

2. 有限要素法によるポテンシャル問題

有限要素法は，対象とする領域をいくつかの有限の広がりをもつ要素に分割し，その要素内で決定すべき未知関数を N 次の多項式で近似する。さらに，変分原理により，微分方程式を代数方程式に変換し，重ね合わせにより領域全体の方程式を組み立て，解を求める方法である。

本文で取り扱う，2次元スカラポテンシャル問題は，ヘルムホルツの方程式と境界条件から成り立つ境界値問題として公式化される。

$$(\nabla^2+\lambda^2)\phi = 0 \tag{1}$$

ここで，ϕ は決定すべきポテンシャルである。式(1)と等価で，最小化を必要とする汎関数 $\boldsymbol{F}$ は，自然境界条件を仮定すると，Euler の理論により，式(2)で定義される。

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}\int_R \left(|\mathrm{grad}\,\phi|^2-\lambda^2\phi^2\right)dS \tag{2}$$

領域 R を，多くの多角形を単純で正確に近似できる三角形要素に分割する。三角形を解析する場

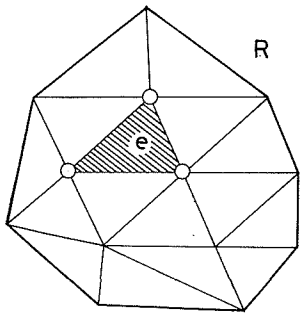


図1　領域の分割

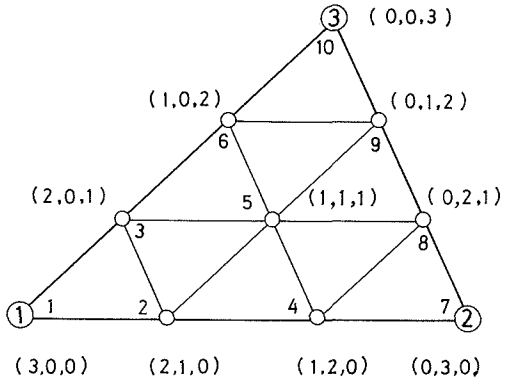


図2　N=3 の場合の三角形面積座標
(1/3 を省略)

合，三角形面積座標[3] (L_1, L_2, L_3) を用いるのが便利である。一般に，一つの三角形要素において，N 次の多項式で近似する場合の節点 P_{ijk} の集合は，式(3)で定義される。

$$P_{ijk} = (L_1, L_2, L_3) = \left(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}, \frac{k}{N}\right) \tag{3}$$
$$0 \leqq i, j, k \leqq N, \qquad i+j+k = N$$

i, j, k は整数であり，$N=3$ の場合の座標を図2に示す。

節点 P_{ijk} におけるポテンシャルの値を ϕ_{ijk} とすれば，ϕ の多項式表現は，式(4)となる。

$$\phi(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i}\alpha_{ijk}\,\phi_{ijk} \tag{4}$$

α_{ijk} は，L_1, L_2, L_3 の多項式表現であり，一般に，N 次の場合は，式(5)の補助関数を用いて表わされる。

$$\left.\begin{aligned} U_m(Z) &= \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{NZ-j+1}{j}\right) \qquad m \geq 1 \\ &= 1 \qquad\qquad\qquad\qquad m = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

節点 P_{ijk} の節点番号を1から M までの連続数におきかえる。ただし，$M=1/2\,(N+1)(N+2)$ となり，N 次で近似した場合の要素内の全節点数である。変分原理より，汎関数 F を最小化する条件は

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \phi_m} = 0 \qquad m = 1, 2 \cdots\cdots M$$

となるから，式(2)は要素内で式(6)に変換される。

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{S}^{(e)}\boldsymbol{\Phi}^{(e)} = \lambda^2 \boldsymbol{T}^{(e)}\boldsymbol{\Phi}^{(e)} \\ &S_{pq}^{(e)} = \frac{1}{2A^{(e)}}\sum_{i=1}^{3}\cot\theta_i^{(e)}\int_s\left(\frac{\partial\alpha_p}{\partial L_j}-\frac{\partial\alpha_p}{\partial L_k}\right)\left(\frac{\partial\alpha_q}{\partial L_j}-\frac{\partial\alpha_q}{\partial L_k}\right)dS \\ &T_{pq}^{(e)} = \int_s \alpha_p\alpha_q\, dS \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ただし，$A^{(e)}$, $\theta_i^{(e)}$ は，それぞれ三角形要素の面積，頂角を表わす。式(6)より，領域全体の方程式は，重ね合わせにより，式(7)となる。

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Phi} = \lambda^2 \boldsymbol{T}\boldsymbol{\Phi} \tag{7}$$

$\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$ は，それぞれ構造力学における剛性マトリクス，荷重マトリクスに対応する。解ベクトル $\boldsymbol{\Phi}$ は，節点におけるポテンシャルを表わす。

3. 有限要素法による平面回路解析[4)]

平面回路が任意形状の場合，つまり，固有関数が解析的に決定できない場合には，純数値的な解法が必要となる。そこで，有限要素法により，調和関数と固有関数を形状より決定し，n ポートの平面回路のアドミタンスマトリクスを求める。

平面回路は，式(8)のヘルムホルツの方程式と境界条件を満足する。

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 v + k^2 v = 0 \qquad (\text{in } R) \\ &\frac{\partial v}{\partial n} = 0 \qquad (\text{on } C) \\ &v = V_k \qquad (\text{on } r_k,\ k=1, 2 \cdots\cdots n) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

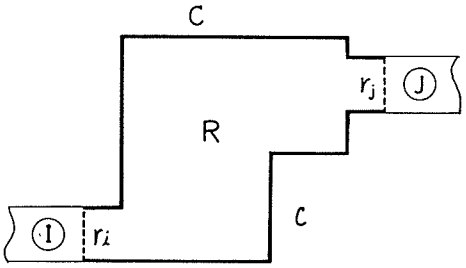


図3　平面回路

式(8)を，前章で述べた有限要素法が適用でき，ポート上での数値積分が入らないようにするために，$v=u+w$ なる変数変換を行なって，2つの方程式，式(9)，式(10)に分離する。

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 u = 0 \qquad (\text{in } R), \qquad V_k = 1 \qquad \text{on } r_k \\ &\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad (\text{on } C), \qquad V_k = 0 \qquad \text{on } r_i \qquad (i \neq k) \\ &u = V_k \qquad (\text{on } r_k) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 w+k^2 w=-k^2 u && (\text{in } R)\\ &\frac{\partial w}{\partial n}=0 && (\text{on } C)\\ &w=0 && (\text{on } r_k,\quad k=1\cdots\cdots n)\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

有限要素法により求めた式(9)の解を Ψ_k とし，また式(10)の同次方程式をみたす固有関数，固有値をそれぞれ Φ_m, λ_m^2 とすると，平面回路のアドミタンスマトリクスは，式(10)で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Y}&=j\frac{\sqrt{\varepsilon/\mu}}{h}\sum_{m=0}\frac{k}{\lambda_m^2-k^2}\boldsymbol{B}^{(m)}\\ B_{pq}^{(m)}&=\lambda_m^2\frac{\tilde{\Psi}_p\boldsymbol{T}\Phi_m\cdot\tilde{\Phi}_m\boldsymbol{T}\Psi_q}{\tilde{\Phi}_m\boldsymbol{T}\Phi_m} && m\geq 1\\ B_{pq}^{(0)}&=\tilde{\Psi}_p\boldsymbol{S}\Psi_q && m=0\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

ただし，～は転置を表わし，$\lambda_0^2=0$ である。また，h は平面回路の厚さである。$B_{pq}^{(0)}$ は，静電界モード（コンデンサモード）による寄与である。

4. 計算機解析

4.1 計算精度の評価

本解析においては，有限要素法による行列の固有値問題の解法には，ハウスホルダー QR 法を用い，また調和関数は，ガウスの消去法により求めた。

本解析において使用した有限要素法のプログラムの計算精度を評価する。

矩形平面回路の境界をすべて開放境界とした場合の固有値は，解析的に式(11)で定義される。

$$\lambda_{mn}^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{11}$$

a, b は，それぞれ矩形の辺の長さを表わし，$a=2$, $b=1$ の場合について式(11)より計算した厳密解と，1次，2次，4次の有限要素法により計算した解とを，静電界モード（$m=0$, $n=0$）を除く低次の固有値について表1に示す。分割は，図4に示すようにし，すべての次数において節点数

表1 次数による固有値の変化と比較 [( ) 内は % 誤差を示す]

次 数	$N=1$	$N=2$	$N=4$	次 数	$N=1$	$N=2$	$N=4$
厳密解	要 素 数			厳密解	要 素 数		
	32	16	4		32	16	4
2.46740	2.49814 (1.245)	2.46853 (0.045)	2.46744 (0.002)	12.33701	13.36383 (8.323)	12.51518 (1.444)	12.34986 (0.104)
9.86960	10.36024 (4.971)	9.93523 (0.665)	9.87347 (0.039)	19.73921	22.58985 (14.442)	20.46772 (3.691)	19.77416 (0.177)
9.86960	10.37173 (5.087)	9.93888 (0.702)	9.87398 (0.044)	22.20661	24.86831 (11.986)	22.88008 (3.033)	22.28839 (0.368)

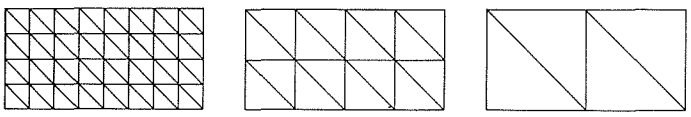


図4 矩形平面回路の分割

は45節点で，固有値問題を解くマトリクスの大きさは同じである。表1より明らかなように，高次の多項式表現を用いると，精度が増すことがわかる。4次の場合の第1番目の固有値と厳密解との誤差は，0.002% であり，十分な精度をもっていることがわかる。さらに，高次の多項式表現は，同一の1次の三角形要素の集合を，一つの三角形で代表することが可能となり，取り扱いが有利であるが，境界が非常に複雑な場合には，三角形要素の辺上の節点が一致しなければならないという理由から，不通合が生じてくる。ゆえに，境界が複雑な部分の要素は低次表現を，また，大きな要素で分割できる領域は，高次表現をというような，異った次数の多項式表現を併用することが望ましい。しかし，本解析においては，境界の複雑さ及び精度の点から見て，すべての要素について，同一次数の3次の多項式表現を用いて計算した。

もう一つの精度問題として，実際の平面回路に対して，どの程度の精度でアドミタンスマトリクスを求められるかという問題であるが，ストリップ線路を一つの平面回路と考えて，一般の伝送線路理論による計算値と比較したが，線路長に対して 0.5 λ 以下では，その差異はほとんど認められなかった。

4.2 直角コーナ

図に示すストリップ線路の直角コーナを一つの平面回路と考えて計算を行った。

伝送線路より TEM モードが入射すると，不連続部より TEM モードの反射波以外に，高次のモードが励振される。高次モードは，非伝搬であり，指数関数的に減衰するから，高次反射

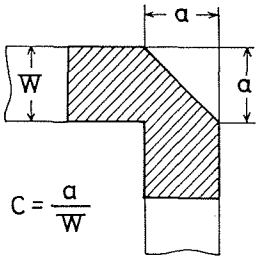


図5 直角コーナ

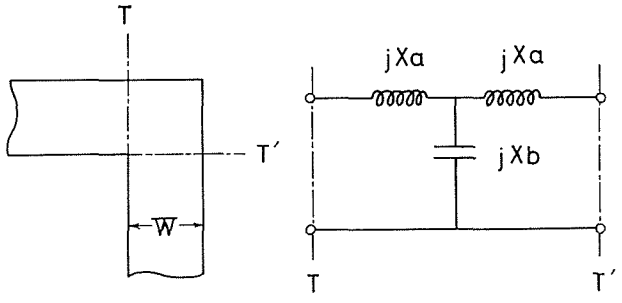


図6 直角コーナの等価回路

モードの振幅が無視できるところまで端子面を移動し，それまでの伝送線路部分と接合部分を一つの平面回路として取り扱う。(図5の斜線部分を示す) 本解析においては，端子面はすべて不連続部より端子幅 W だけ移動したところに設けて，計算した。

直角コーナに関しては，A. A. Oliner[5] により，図6の等価回路が示めされ，X_a, X_b は，式(12)で与えられている。

$$\left.\begin{aligned} \frac{X_a}{Z_0} &= \frac{W}{\lambda}\left\{1.765+\left(\frac{W}{\lambda}\right)^2\right\} \\ \frac{X_b}{Z_0} &= -0.151\,\frac{\lambda}{W}+0.0725\frac{W}{\lambda} \\ \frac{W}{\lambda} &\ll 1 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

式(12)を用いて計算した結果と，本解析値を，定在波比および透過係数について，図7に示す。端子幅に対して，波長が無視できなくなる領域においては，式(12)自体が適用できなくなる理由から，差異が現われているが，$W/\lambda \ll 1$ の周波数帯では，両者の結果は，非常に一致している。我々が使用する周波数は，0.2 以下と考えられるから，この結果は，満足のいくものと思われる。

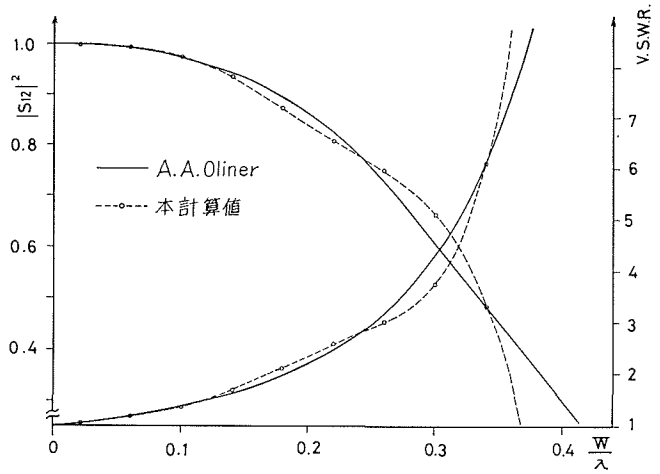


図7 A. A. Oliner と本計算値との比較

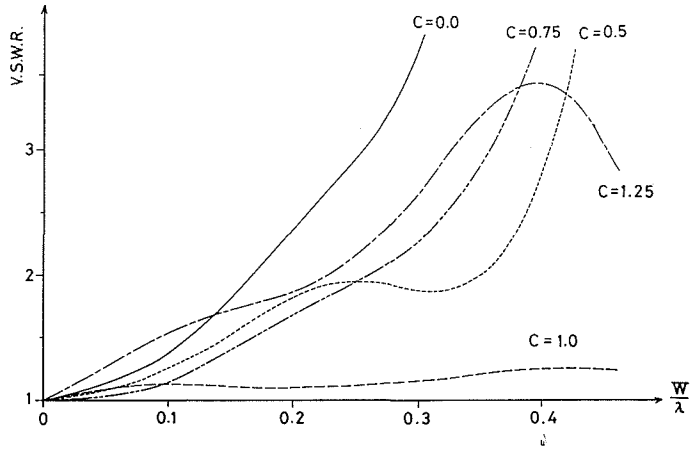
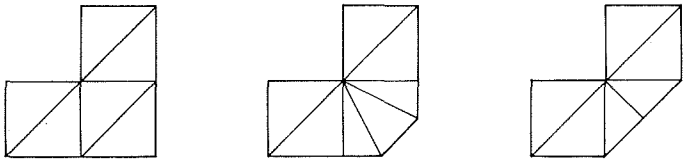


図8 角を落した場合の VSWR の変化 (直角コーナ)



C=0.0
6要素
40節点

C=0.5
7要素
46節点

C=1.0
6要素
40節点

図9 直角コーナの分割

図7より明らかなように，直角コーナの VSWR は，周波数に対して著しく劣化する。これは，曲りの部分での等価的な特性インピーダンスが低くなることが原因である。そこで，等価回路として示した L と C を用いると，特性インピーダンスは $\sqrt{L/C}$ となるので，L を大に C を小にするために，コーナの部分を切り落す方法がよく用いられる。コーナを切り落した回路を平面回路と考えて，VSWR の周波数特性を計算し，その結果を図8に示す。計算は，$c=a/W=0.5\sim$

1.25 まで，0.25 きざみに 4 個の形状について行なった。図より明らかなように，VSWR は，コーナを切り落さないときは大きく，切り落す部分を増すにつれ小さくなり，$c=1.0$ のとき最小となり，切り落しすぎると再び大きくなることがわかる。切り落しを 1.0 付近にしたときに，もっとも広帯域な整合が取れることがわかる。

4.3 T 分岐

T 分岐も，直角コーナと同様に不連続部に容量分が存在するために，VSWR の特性は劣化する。そこで，図 10 に示すような T 分岐について，端子 1 の VSWR が，切り込みを入れることによってどのような影響を受けるかを計算した。その結果を図 11 に示す。明らかに，直角コーナと同様に，切り込みを入れると特性が良好になり，$c=1.6$ 付近に最良点が存在するものと思われる。

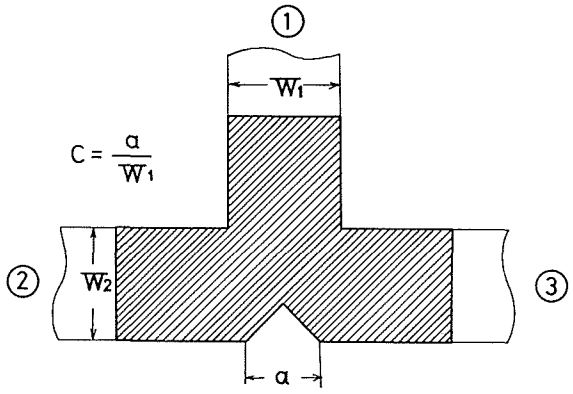


図 10 T 分岐

実際に，T 分岐においては，端子 1 と端子 2, 3 の間に，特性インピーダンス $1/\sqrt{2}$ の 1/4 波長線路の変成器を挿入して整合をとる。この 1/4 波長線路の変成器を含んだ T 分岐を一つの平面回路と考えて，切り込みを入れる問題については今後の課題としたい。

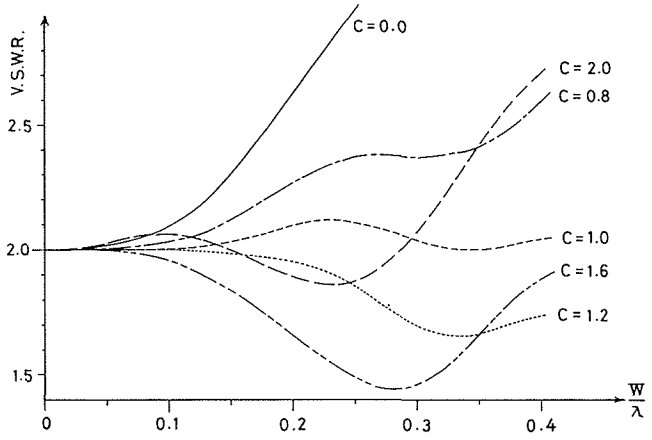
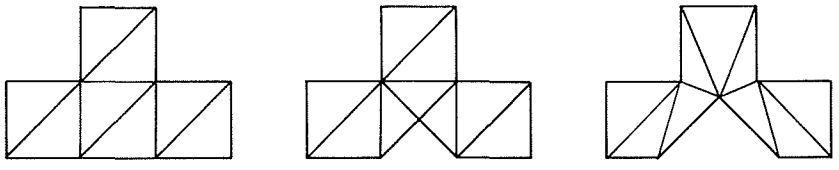


図 11 切り込みを入れた場合の VSWR の変化 (T 分岐)



C=0.0
8 要素
52 節点

C=1.0
9 要素
58 節点

C=1.6
9 要素
58 節点

図 12 T 分岐の分割

5. 結 言

高次の有限要素法により，平面回路のうちで，直角コーナおよびT分岐における角取り問題について計算し，その結果を示した。

高次の有限要素法は，精度がすぐれていて，その取り扱いも簡単となる。精度については，矩形平面回路の固有値によって厳密解との比較を行い，その優秀性を示した。今後，高次の有限要素法は，広範な分野において，利用されるものと思われる。

直角コーナについては，A. A. Oliner の計算値と本解析値を比較し，端子幅に対して波長が大きい周波数帯において一致することを示した。さらに，整合特性を良好にするために，角取りする問題については，その最適値が $c=1.0$ 付近にあることがわかった。T分岐についても，$c=1.6$ 付近にほぼ最適値があることを示した。

平面回路一形状当りの計算時間が，ほぼ4秒程度なので，試行錯誤的な方法により，特性を良好にする平面回路の最適な形状を求めることが可能であろう。

謝辞 有限要素法につき，文献等をお教え頂きました本学部精密工学科岸浪助教授に感謝致します。

参 考 文 献

1) P. Silvester: "High-Order Polynomial Triangular Finite Elements for Potential Problems", Int. J. Eng. Sci. 7, p. 849, Aug. 1969.
2) 三好旦六，大越孝敬："マイクロ波平面回路の解析的取扱い"，信学論(B), 55-B, 8, p. 441, 昭和47年8月.
3) O. C. Zienkiewicz: The Finite Element Method in Engineering Science. London, England, McGraw-Hill, 1971.
4) P. Silvester: "Finite Element Analysis of Planar Microwave Networks", IEEE Trans. MTT, Vol. MTT-21, p. 104, Feb. 1973.
5) A. A. Oliner: "Equivalent Circuits for Discontinuities in Balanced Strip Transmission Line", IRE Trans. MTT, Vol. MTT-3, 2, p. 134, Mar. 1955.