



Title	厚さ方向に貫通したひびわれを有する鉄筋コンクリートスラブの曲げについて
Author(s)	熊町, 純雄; Nōmachi, Sumio; 角田, 与史雄 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 78, 13-23
Issue Date	1976-02-16
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41322">https://hdl.handle.net/2115/41322</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	78_13-24.pdf



## 厚さ方向に貫通したひびわれを有する 鉄筋コンクリートスラブの曲げについて

能町純雄 角田与史雄 堺孝司

(昭和50年6月30日受理)

### On Bending in Reinforced Concrete Slabs Which has Straight Crack through out Its Thickness

Sumio NŌMACHI Yoshio KAKUTA Kouji SAKAI

(Received June 30, 1975)

#### Abstract

When a concrete slab is kept from free shrinking by restraint of its supported edges, cracking may occur through out its thickness and the reinforcing steel bars, which penetrate the crack, may still be effective in carrying the force. Thus, the stress behavior becomes quite complicated in the vicinity of cracks.

In order to analyze the stress for this case, the behavior of the crack is modeled by a combination of two conditions: One is that the crack can not carry the bending moment but only the shearing force which is proportional to the displacement gap between two opposite surfaces of the crack, and the other is that there is no displacement gap but a slop gap which produces the bending moment proportional to it, between two opposite surfaces of the crack.

This paper deals with the cases where rectangular slabs with its four edges simply supported, its two opposite long edges simply supported and other edges free from any stress, and infinitely long simply supported edges, which have a prescribed crack in parallel to its short edges, are subjected to a partially distributed load touching the middle of the crack line.

The capacity of carrying force of steel bars at the crack is discussed by numerical calculations.

#### 1. ま え が き

スラブが拘束されて、ある方向に厚さを貫通するひびわれが生じ、二つに分断されたとしても鉄筋の連続性が保たれている場合、力の相互伝達は可能である。この伝達機構を厳密に解析によって把えることは非常に難しい。そこで著者らは、このメカニクを最も単純な形に、その断面上に特殊な境界条件を想定して二つの力学的モデルを導入した。

この特殊な境界は、支持辺に鉛直に生じるものとし、一つは、その特殊な境界でモーメントに対して抵抗せずせん断力を相互伝達しあい、そのせん断力が、たわみ差に比例するような拘束

条件である。これは単鉄筋スラブに貫通拘束ひびわれが生じた場合のモデル化である。このように、せん断力が鉄筋によって伝わる作用は、Dowel Action と呼ばれ、桁のせん断耐力などの問題の要因として検討されているものである。モデル化にあたっては、この Dowel 力がスラブの反力に相当するものと考え、ここでは、Dowel 力と Dowel 変位の間の関係は、線形範囲に限定する。すなわちここで言うたわみ差は、Dowel 力を境界での反力としたものとそれによる変形との関係を表わす線形定数  $K_1$  によって評価する。この  $K_1$  の値は、例えば、 $K_1=0$  で力の伝達を行わず、 $K_1 \rightarrow \infty$  でたわみ差がなくなる状態を表わす。

他の一つは、たわみ差はないが、そこでモーメントを有する拘束条件である。これは、複鉄筋スラブに貫通拘束ひびわれが生じた場合のモデル化を試みたもので、载荷によって拘束ひびわれの位置における引張鉄筋はコンクリートからすべって引き出され、圧縮鉄筋は、コンクリート中に押し込まれることによって抵抗モーメントが生ずる。今、この両変位が同じ値を有するものと仮定し、鉄筋引張力とすべり出し量との間の関係は線形範囲のみを考え、両者を結ぶ線形定数を導入してモーメントの値を評価する。抵抗モーメントの大きさは、例えば、 $K_2=0$  は  $K_1 \rightarrow \infty$  の場合にあたり、 $K_2 \rightarrow \infty$  はこの特殊な境界条件のない普通の矩形平板のモーメントに相当する。

これら二つの境界拘束条件を想定したことによる曲げ応力の変化状況を調べ、普通の矩形平板の曲げ応力と比較することによって、荷重分配の様子が明らかになる。

解析は、重調和微分方程式の境界値問題として Green 積分を媒介とした有限フーリエ変換を用いて行ない、周辺境界条件としては、周辺単純、相対する 2 辺単純他の 2 辺が自由、及び相対する 2 辺単純で半無限の三つの場合を扱った。

## 2. 有限なフーリエ正弦変換

今、 $f(x)$  のフーリエ正弦積分を

$$S_m[f(x)] = \int_0^a f(x) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} dx \quad \text{とおけば}$$

$$f(x) = \frac{2}{a} \sum_m S_m[f(x)] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (m=1, 2, 3, \dots, 0 < x < a) \text{ なる関係がある。}$$

これは、 $(0, a)$ ,  $(0, b)$  なる矩形領域で積分可能な関数  $W_{xy}$  に関して次のように拡張出来る。

$$S_m S_n [W_{xy}] = \int_0^a \int_0^b W_{xy} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (m=1, 2, \dots, 0 < x < a, 0 < y < b) \quad (1)$$

この逆変換は、

$$W_{xy} = \frac{4}{ab} \sum_m \sum_n S_m S_n [W_{xy}] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2)$$

## 3. 重調和微分式の Green 積分

$W$  の重調和微分式に対する Green の積分は

$$\int_0^a \int_0^b \left\{ (\Delta^2 W) \cdot u - (\Delta^2 u) \cdot W \right\} dx dy = R(W \cdot u) \quad (3)$$

ただし

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

$$\begin{aligned}
R(W \cdot u) = & \int_0^b \left[ \left\{ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right\} u \right]_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^b \left[ \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right\} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=a} dy \\
& + \int_0^b \left[ \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} \frac{\partial W}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^b \left[ \left\{ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right\} W \right]_{x=0}^{x=a} dy \\
& + \int_0^a \left[ \left\{ \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right\} u \right]_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \left[ \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right\} \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0}^{y=b} dx \\
& + \int_0^a \left[ \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} \frac{\partial W}{\partial y} \right]_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \left[ \left\{ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \right\} W \right]_{y=0}^{y=b} dx \\
& - 2(1-\nu) \left[ \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} u - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} W \right]_0^a \right]^b \quad (4)
\end{aligned}$$

(3) 式の右辺に  $u = \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$ , 及び, 矩形平板の基礎微分方程式  $D^2 W = qf_{xy}/D$  ( $qf_{xy}$ ; 荷重強度) を代入して  $S_m S_n [W]$  を求めると,

$$S_m S_n [W] = \left(\frac{a}{\pi}\right)^4 \cdot \frac{q}{D} \cdot \frac{S_m S_n [f_{xy}]}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} - \left(\frac{a}{\pi}\right)^4 \frac{R(W \cdot u)}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} \quad (5)$$

ここで  $\alpha_n = an/b$  である。さて今, 図 1 に示すような境界条件の板を考える。すなわち

$$\begin{aligned}
W_{y=0} = W_{y=b} = (M_y)_{y=0} = (M_y)_{y=b} = (M_x)_{x=a} = 0 \\
(M_x)_{x=0} \neq 0, \quad W_{x=a} \neq 0, \quad W_{x=0} \neq 0
\end{aligned}$$

この境界条件によって  $R(W \cdot u)$  は  $S_n [M_{x=0}]$ ,  $S_n [W_{x=a}]$ ,  $S_n [W_{x=0}]$  を未知量として含み  $S_m S_n [W]$  は

$$\begin{aligned}
S_m S_n [W] = & \left(\frac{a}{\pi}\right)^4 \cdot \frac{q}{D} \cdot \frac{S_m S_n [f_{xy}]}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} - \left(\frac{a}{\pi}\right)^3 \frac{m}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} S_n [M_{x=0}] \\
& - \frac{a}{\pi} \frac{[m^3 + (2-\nu)m\alpha_n^2]}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} \left\{ (-1)^m S_n [W_{x=a}] - S_n [W_{x=0}] \right\} \quad (6)
\end{aligned}$$

逆変換して

$$\begin{aligned}
W = & \frac{qa^4}{D} \sum_n R_n(u_0 u_1 \xi) \sin \frac{n\pi v_1}{b} \sin \frac{n\pi v_0}{b} \sin n\pi\eta - b \sum_n \frac{1}{(n\pi)^2} H_{n,1-\xi} \cdot S_n [M_{x=0}] \sin n\pi\eta \\
& + \frac{1}{b} \sum_n [2G_{n,\xi} + (1-\nu) H_{n,\xi}] S_n [W_{x=a}] \sin n\pi\eta \\
& + \frac{1}{b} \sum_n [2G_{n,1-\xi} + (1-\nu) H_{n,1-\xi}] S_n [W_{x=0}] \sin n\pi\eta \quad (7)
\end{aligned}$$

ここで  $\xi = x/a$ ,  $\eta = y/b$

$$G_{n,\xi} = \frac{ch\pi\alpha_n(1+\xi) - ch\pi\alpha_n(1-\xi)}{ch2\pi\alpha_n - 1}$$

$$H_{n,\xi} = \frac{\pi\alpha_n[(1-\xi)sh\pi\alpha_n(1+\xi) - (1+\xi)sh\pi\alpha_n(1-\xi)]}{ch2\pi\alpha_n - 1}$$

$$R_n(u_0 u_1 \xi) = \frac{a}{b} \frac{4}{\pi^6} \frac{1}{\alpha_n} \left[ -A_n^{(1)} + \begin{Bmatrix} B_n^{(2)} \\ B_n^{(2)} \\ -A_n^{(2)} \end{Bmatrix} + A_n^{(3)} + \begin{Bmatrix} -B_n^{(4)} \\ A_n^{(4)} \\ A_n^{(4)} \end{Bmatrix} \right] \begin{matrix} 0 \leq x < \beta \\ \beta \leq x \leq a \\ a < x \leq 1 \end{matrix}$$

$$\alpha = (u_1 + u_0)/a, \quad \beta = (u_1 - u_0)/a, \quad S_{mn} = 1/m (m^2 + \alpha_n^2)^2, \quad A_n^{(1)} = \sum_m S_{mn} \sin m\pi(\xi + \alpha)$$

$$A_n^{(2)} = \sum_m S_{mn} \sin m\pi(\xi - \alpha), \quad A_n^{(3)} = \sum_m S_{mn} \sin m\pi(\xi + \beta), \quad A_n^{(4)} = \sum_m S_{mn} \sin m\pi(\xi - \beta)$$

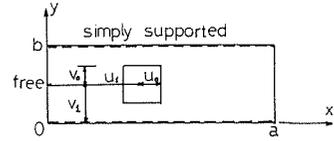


Fig. 1.

$$B_n^{(2)} = \sum_m S_{mn} \sin m\pi(\alpha - \xi), \quad B_n^{(4)} = \sum_m S_{mn} \sin m\pi(\beta - \xi)$$

#### 4. 貫通拘束ひびわれ断面の境界拘束 条件モデル I

図2に示すように、Dowel 力  $P$  と同じ大きさを有する板の反力が、ここにおけるたわみ差に比例するという条件から、図3の Plate 1, 2 に対してサフィックス 1, 2 を添えると、想定する境界条件は、

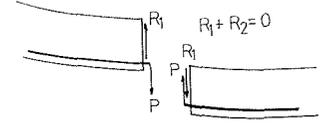


Fig. 2.

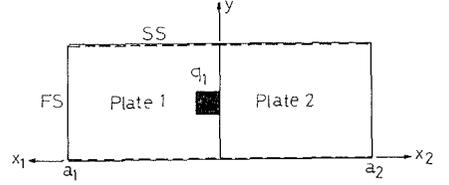


Fig. 3.

$$\left. \begin{aligned} \text{i)} & \left( \frac{\partial^3 W_1}{\partial x_1^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W_1}{\partial x_1 \partial y^2} \right)_{x_1=a_1} = 0 \\ \text{ii)} & \left( \frac{\partial^3 W_2}{\partial x_2^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W_2}{\partial x_2 \partial y^2} \right)_{x_2=a_2} = 0 \\ \text{iii)} & \left( \frac{\partial^3 W_1}{\partial x_1^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W_1}{\partial x_1 \partial y^2} \right)_{x_1=0} + \left( \frac{\partial^3 W_2}{\partial x_2^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W_2}{\partial x_2 \partial y^2} \right)_{x_2=0} = 0 \\ \text{iv)} & \left( [W_2]_{x_2=0} - [W_1]_{x_1=0} \right) k_1 = -D \left( \frac{\partial^3 W_2}{\partial x_2^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W_2}{\partial x_2 \partial y^2} \right)_{x_2=0} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

この4つの境界条件に Plate 1, 2 のたわみ  $W_1, W_2$  を代入すると、 $S_n[W_{x_1=a_1}]$ ,  $S_n[W_{x_1=0}]$ ,  $S_n[W_{x_2=a_2}]$ ,  $S_n[W_{x_2=0}]$  を未知数とする4元連立方程式を得る。これを解くと、最終的なたわみは

$$W_1 = \frac{q_1 a_1^4}{D} \sum_n \left\{ R_n(u_0 u_1 \xi_1) \sin \frac{n\pi v_1}{b} \sin \frac{n\pi v_0}{b} - X_1 \left[ 2G_{n,\xi_1} + (1-\nu) H_{n,\xi_1} \right] - X_2 \left[ 2G_{n,1-\xi_1} + (1-\nu) H_{n,1-\xi_1} \right] \right\} \sin n\pi\eta \quad (9)$$

$$W_2 = \frac{q_1 a_1^4}{D} \sum_n \left\{ \varepsilon \delta^4 R_n(u'_0 u'_1 \xi_2) \sin \frac{n\pi v'_1}{b} \sin \frac{n\pi v'_0}{b} - X_3 \left[ 2G_{n,\xi_2} + (1-\nu) H_{n,\xi_2} \right] - X_4 \left[ 2G_{n,1-\xi_2} + (1-\nu) H_{n,1-\xi_2} \right] \right\} \sin n\pi\eta \quad (10)$$

また、モーメントは

$$M_{x1} = -q_1 a_1^2 \sum_n \left\{ \left[ R_n''(u_0 u_1 \xi_1) - \nu (\pi \alpha_n)^2 R_n(u_0 u_1 \xi_1) \right] \sin \frac{n\pi v_1}{b} \sin \frac{n\pi v_0}{b} - X_1 \left[ \left( 2G_{n,\xi_1} + (1-\nu) H_{n,\xi_1} \right) - \nu (\pi \alpha_n) \left( 2G_{n,\xi_1} + (1-\nu) H_{n,\xi_1} \right) \right] - X_2 \left[ \left( 2G_{n,1-\xi_1} + (1-\nu) H_{n,1-\xi_1} \right) - \nu (\pi \alpha_n) \left( 2G_{n,1-\xi_1} + (1-\nu) H_{n,1-\xi_1} \right) \right] \right\} \sin n\pi\eta \quad (11)$$

$$M_{y1} = -q_1 a_1^2 \sum_n \left\{ \left[ -(\pi \alpha_n)^2 R_n(u_0 u_1 \xi_1) + \nu R_n''(u_0 u_1 \xi_1) \right] \sin \frac{n\pi v_1}{b} \sin \frac{n\pi v_0}{b} + X_1 \left[ (\pi \alpha_n)^2 \left( 2G_{n,\xi_1} + (1-\nu) H_{n,\xi_1} \right) - \nu \left( 2G_{n,\xi_1} + (1-\nu) H_{n,\xi_1} \right) \right] + X_2 \left[ (\pi \alpha_n)^2 \left( 2G_{n,1-\xi_1} + (1-\nu) H_{n,1-\xi_1} \right) - \nu \left( 2G_{n,1-\xi_1} + (1-\nu) H_{n,1-\xi_1} \right) \right] \right\} \sin n\pi\eta \quad (12)$$

$$M_{x2} = -q_1 a_1^2 (a_1/a_2)^2 \sum_n \left\{ \varepsilon \delta^4 \left[ R_n''(u'_0 u'_1 \xi_2) - \nu (\pi \alpha_n)^2 R_n(u'_0 u'_1 \xi_2) \right] \sin \frac{n\pi v'_1}{b} \sin \frac{n\pi v'_0}{b} \right.$$

$$\begin{aligned}
& -X_3 \left[ \left( 2G''_{n,\varepsilon_2} + (1-\nu) H''_{n,\varepsilon_2} \right) - \nu (\pi\alpha_{n2})^2 \left( 2G_{n,\varepsilon_2} + (1-\nu) H_{n,\varepsilon_2} \right) \right] \\
& -X_4 \left[ \left( 2G''_{n,1-\varepsilon_2} + (1-\nu) H''_{n,1-\varepsilon_2} \right) - \nu (\pi\alpha_{n2})^2 \left( 2G_{n,1-\varepsilon_2} + (1-\nu) H_{n,1-\varepsilon_2} \right) \right] \sin n\pi\eta \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{y2} = & -q_1 a_1^2 (a_1/a_2)^2 \sum_n \left\{ \varepsilon \delta^4 \left[ -(\pi\alpha_{n2})^2 R_n(u'_0 u'_1 \xi_2^2) + \nu R''_n(u'_0 u'_1 \xi_2) \right] \sin \frac{n\pi v'_1}{b} \sin \frac{n\pi v'_0}{b} \right. \\
& + X_3 \left[ (\pi\alpha_{n2})^2 \left( 2G_{n,\varepsilon_2} + (1-\nu) H_{n,\varepsilon_2} \right) - \nu \left( 2G''_{n,\varepsilon_2} + (1-\nu) H''_{n,\varepsilon_2} \right) \right] \\
& \left. + X_4 \left[ (\pi\alpha_{n2})^2 \left( 2G_{n,1-\varepsilon_2} + (1-\nu) H_{n,1-\varepsilon_2} \right) - \nu \left( 2G''_{n,1-\varepsilon_2} + (1-\nu) H''_{n,1-\varepsilon_2} \right) \right] \right\} \sin n\pi\eta \quad (14)
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & b_{32} & 0 & b_{34} \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ b_{11} \\ b_{41} \end{pmatrix}$$

右辺の各要素の値については、後に示す。

式(9)~(14)で  $W_{x_1=a_1} = W_{x_2=a_2} = 0$  を考慮すると、これは、周辺単純の境界条件のときの値となり、 $a_1, a_2 \rightarrow \infty$  とすることによって半無限平板に拡張できる。

## 5. 貫通拘束ひびわれ断面の境界拘束条件モデル II

図4において

$$(\theta_1 - \Delta\theta) = -(\theta_2 - \Delta\theta)$$

なる状態を想定する。ここで  $\Delta\theta$  は鉄筋のすべり量と圧縮量を結ぶ回転角である。鉄筋の引張力をすべり量との線形関係

$$P = k_2 \Delta$$

及び、

$$M = P d_0, \quad \Delta = \Delta\theta \cdot \frac{d}{2}$$

を考慮すれば

$$(\theta_2 + \theta_1) k_2 = M$$

となり、今、 $\theta_1 = -\partial W_1 / \partial x_1$ ,  $\theta_2 = -\partial W_2 / \partial x_2$  なる座標系を考えれば、この場合の境界拘束条件は

$$\left. \begin{aligned}
\text{i)} & \left( \frac{\partial^3 W_1}{\partial x_1^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W_1}{\partial x_1 \partial y^2} \right)_{x_1=a_1} = 0 \\
\text{ii)} & \left( \frac{\partial^3 W_2}{\partial x_2^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W_2}{\partial x_2 \partial y^2} \right)_{x_2=a_2} = 0 \\
\text{iii)} & \left( \frac{\partial^3 W_1}{\partial x_1^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W_1}{\partial x_1 \partial y^2} \right)_{x_1=0} + \left( \frac{\partial^3 W_2}{\partial x_2^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W_2}{\partial x_2 \partial y^2} \right)_{x_2=0} = 0 \\
\text{iv)} & \left[ \frac{\partial W_1}{\partial x_1} \right]_{x_1=0} + \left[ \frac{\partial W_2}{\partial x_2} \right]_{x_2=0} k_2 = +D \left( \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} \right)_{x_1=0}
\end{aligned} \right\} \quad (15)$$

この4つの境界条件に、Plate 1, 2 のたわみ  $W_1, W_2$  を代入すると  $S_n[W_{x_1=a_1}]$ ,  $S_n[W_{x_1=0}] = S_n[W_{x_2=0}]$ ,  $S_n[W_{x_2=a_2}]$ ,  $S_n[M_{x_1=0}]$  を未知数とする4元連立方程式を得る。これを解いて、最終的

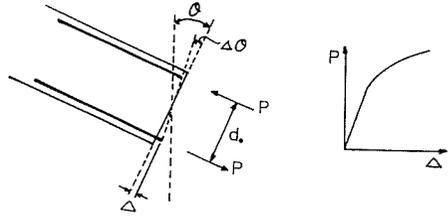


Fig. 4.

たわみは

$$W_1 = \frac{q_1 a_1^4}{D} \sum_n \left\{ R_n(u_0 u_1 \xi_1) \sin \frac{n\pi v_1}{b} \sin \frac{n\pi v_0}{b} - \frac{1}{(n\pi)^2} H_{n,1-\varepsilon_1} \cdot Y_4 \right. \\ \left. + \left[ 2G_{n,\varepsilon_1} + (1-\nu) H_{n,\varepsilon_1} \right] Y_1 + \left[ 2G_{n,1-\varepsilon_1} + (1-\nu) H_{n,1-\varepsilon_1} \right] Y_2 \right\} \sin n\pi\eta \quad (16)$$

$$W_2 = \frac{q_1 a_1^4}{D} \sum_n \left\{ \varepsilon \delta^4 R_n(u'_0 u'_1 \xi_2) \sin \frac{n\pi v'_1}{b} \sin \frac{n\pi v'_0}{b} - \frac{1}{(n\pi)^2} H_{n,1-\varepsilon_2} \cdot Y_4 \right. \\ \left. + \left[ 2G_{n,\varepsilon_2} + (1-\nu) H_{n,\varepsilon_2} \right] Y_3 + \left[ 2G_{n,1-\varepsilon_2} + (1-\nu) H_{n,1-\varepsilon_2} \right] Y_2 \right\} \sin n\pi\eta \quad (17)$$

また，モーメントは

$$M_{x1} = -q_1 a_1^2 \sum_n \left\{ \left[ R_n''(u_0 u_1 \xi_1) - \nu (\pi \alpha_{n1})^2 R_n(u_0 u_1 \xi_1) \right] \sin \frac{n\pi v_1}{b} \sin \frac{n\pi v_0}{b} \right. \\ \left. - Y_4 \cdot \frac{1}{(n\pi)^2} \left[ H_{n,1-\varepsilon_1}'' - \nu (\pi \alpha_{n1})^2 H_{n,1-\varepsilon_1} \right] \right. \\ \left. + Y_1 \left[ \left( 2G_{n,\varepsilon_1}'' + (1-\nu) H_{n,\varepsilon_1}'' \right) - \nu (\pi \alpha_{n1})^2 \left( 2G_{n,\varepsilon_1} + (1-\nu) H_{n,\varepsilon_1} \right) \right] \right. \\ \left. + Y_2 \left[ \left( 2G_{n,1-\varepsilon_1}'' + (1-\nu) H_{n,1-\varepsilon_1}'' \right) - \nu (\pi \alpha_{n1})^2 \left( 2G_{n,1-\varepsilon_1} + (1-\nu) H_{n,1-\varepsilon_1} \right) \right] \right\} \sin n\pi\eta \quad (18)$$

$$M_{y1} = -q_1 a_1^2 \sum_n \left\{ \left[ -(\pi \alpha_{n1}) R_n(u_0 u_1 \xi_1) + \nu R_n''(u_0 u_1 \xi_1) \right] \sin \frac{n\pi v_1}{b} \sin \frac{n\pi v_0}{b} \right. \\ \left. + Y_4 \cdot \frac{1}{(n\pi)^2} \left[ (\pi \alpha_{n1})^2 H_{n,1-\varepsilon_1} - \nu H_{n,1-\varepsilon_1}'' \right] \right. \\ \left. + Y_1 \left[ -(\pi \alpha_{n1})^2 \left( 2G_{n,\varepsilon_1} + (1-\nu) H_{n,\varepsilon_1} \right) + \nu \left( 2G_{n,\varepsilon_1}'' + (1-\nu) H_{n,\varepsilon_1}'' \right) \right] \right. \\ \left. + Y_2 \left[ -(\pi \alpha_{n1})^2 \left( 2G_{n,1-\varepsilon_1} + (1-\nu) H_{n,1-\varepsilon_1} \right) + \nu \left( 2G_{n,1-\varepsilon_1}'' + (1-\nu) H_{n,1-\varepsilon_1}'' \right) \right] \right\} \sin n\pi\eta \quad (19)$$

$$M_{x2} = -q_1 a_2^2 (a_1/a_2)^2 \sum_n \left\{ \varepsilon \delta^4 \left[ R_n''(u'_0 u'_1 \xi_2) - \nu (\pi \alpha_{n2})^2 R_n(u'_0 u'_1 \xi_2) \right] \sin \frac{n\pi v'_1}{b} \sin \frac{n\pi v'_0}{b} \right. \\ \left. - Y_4 \frac{1}{(n\pi)^2} \left[ H_{n,1-\varepsilon_2}'' - \nu (\pi \alpha_{n2})^2 H_{n,1-\varepsilon_2} \right] \right. \\ \left. + Y_3 \left[ \left( 2G_{n,\varepsilon_2}'' + (1-\nu) H_{n,\varepsilon_2}'' \right) - \nu (\pi \alpha_{n2})^2 \left( 2G_{n,\varepsilon_2} + (1-\nu) H_{n,\varepsilon_2} \right) \right] \right. \\ \left. + Y_2 \left[ \left( 2G_{n,1-\varepsilon_2}'' + (1-\nu) H_{n,1-\varepsilon_2}'' \right) - \nu (\pi \alpha_{n2})^2 \left( 2G_{n,1-\varepsilon_2} + (1-\nu) H_{n,1-\varepsilon_2} \right) \right] \right\} \sin n\pi\eta \quad (20)$$

$$M_{y2} = -q_1 a_2^2 (a_1/a_2)^2 \sum_n \left\{ \varepsilon \delta^4 \left[ -(\pi \alpha_{n2})^2 R_n(u'_0 u'_1 \xi_2) + \nu R_n''(u'_0 u'_1 \xi_2) \right] \sin \frac{n\pi v'_1}{b} \sin \frac{n\pi v'_0}{b} \right. \\ \left. + Y_4 \cdot \frac{1}{(n\pi)^2} \left[ (\pi \alpha_{n2})^2 H_{n,1-\varepsilon_2} - \nu H_{n,1-\varepsilon_2}'' \right] \right. \\ \left. + Y_3 \left[ -(\pi \alpha_{n2})^2 \left( 2G_{n,\varepsilon_2} + (1-\nu) H_{n,\varepsilon_2} \right) + \nu \left( 2G_{n,\varepsilon_2}'' + (1-\nu) H_{n,\varepsilon_2}'' \right) \right] \right. \\ \left. + Y_2 \left[ -(\pi \alpha_{n2})^2 \left( 2G_{n,1-\varepsilon_2} + (1-\nu) H_{n,1-\varepsilon_2} \right) + \nu \left( 2G_{n,1-\varepsilon_2}'' + (1-\nu) H_{n,1-\varepsilon_2}'' \right) \right] \right\} \sin n\pi\eta \quad (21)$$

式(16)~(21)で  $W_{x_1=a_1} = W_{x_2=a_2} = 0$  を考慮すると，これは周辺単純の境界条件のときの値となり  $a_1, a_2 \rightarrow \infty$  とすることによって半無限平板に拡張できる。

ここで

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= - \left[ 2G''_{n,\xi_1} + (1-\nu) H''_{n,\xi_1} \right]_{\xi_1=1} + (2-\nu) (\pi\alpha_{n1})^2 \left[ 2G'_{n,\xi_1} + (1-\nu) H'_{n,\xi_1} \right]_{\xi_1=1} \\ a_{12} &= - \left[ 2G''_{n,1-\xi_1} + (1-\nu) H''_{n,1-\xi_1} \right]_{\xi_1=1} + (2-\nu) (\pi\alpha_{n1})^2 \left[ 2G'_{n,1-\xi_1} + (1-\nu) H'_{n,1-\xi_1} \right]_{\xi_1=1} \\ a_{14} &= \frac{1}{(n\pi)^2} \left[ H''_{n,1-\xi_1} - (2-\nu) (\pi\alpha_{n1})^2 H'_{n,1-\xi_1} \right]_{\xi_1=1} \\ a_{22} &= - \left[ 2G''_{n,1-\xi_2} + (1-\nu) H''_{n,1-\xi_2} \right]_{\xi_2=1} + (2-\nu) (\pi\alpha_{n2})^2 \left[ 2G'_{n,1-\xi_2} + (1-\nu) H'_{n,1-\xi_2} \right]_{\xi_2=1} \\ a_{23} &= - \left[ 2G''_{n,\xi_2} + (1-\nu) H''_{n,\xi_2} \right]_{\xi_2=1} + (2-\nu) (\pi\alpha_{n2})^2 \left[ 2G'_{n,\xi_2} + (1-\nu) H'_{n,\xi_2} \right]_{\xi_2=1} \\ a_{24} &= \frac{1}{(n\pi)^2} \left[ H''_{n,1-\xi_2} - (2-\nu) (\pi\alpha_{n2})^2 H'_{n,1-\xi_2} \right]_{\xi_2=1} \\ a_{31} &= - \left[ 2G''_{n,\xi_1} + (1-\nu) H''_{n,\xi_1} \right]_{\xi_1=0} + (2-\nu) (\pi\alpha_{n1})^2 \left[ 2G'_{n,\xi_1} + (1-\nu) H'_{n,\xi_1} \right]_{\xi_1=0} \\ a_{32} &= - \left[ 2G''_{n,1-\xi_1} + (1-\nu) H''_{n,1-\xi_1} \right]_{\xi_1=0} + (2-\nu) (\pi\alpha_{n1})^2 \left[ 2G'_{n,1-\xi_1} + (1-\nu) H'_{n,1-\xi_1} \right]_{\xi_1=0} \\ &\quad + \left\{ - \left[ 2G''_{n,1-\xi_2} + (1-\nu) H''_{n,1-\xi_2} \right]_{\xi_2=0} + (2-\nu) (\pi\alpha_{n2})^2 \left[ 2G'_{n,1-\xi_2} + (1-\nu) H'_{n,1-\xi_2} \right]_{\xi_2=0} \right\} / \delta^3 \\ a_{33} &= \left\{ - \left[ 2G''_{n,\xi_2} + (1-\nu) H''_{n,\xi_2} \right]_{\xi_2=0} + (2-\nu) (\pi\alpha_{n2})^2 \left[ 2G'_{n,\xi_2} + (1-\nu) H'_{n,\xi_2} \right]_{\xi_2=0} \right\} / \delta^3 \\ a_{34} &= \frac{1}{(n\pi)^2} \left\{ \left[ H''_{n,1-\xi_1} - (2-\nu) (\pi\alpha_{n1})^2 H'_{n,1-\xi_1} \right]_{\xi_1=0} + \left[ H''_{n,1-\xi_2} - (2-\nu) (\pi\alpha_{n2})^2 H'_{n,1-\xi_2} \right]_{\xi_2=0} \right\} / \delta^3 \\ a_{41} &= -K_2 \left[ 2G'_{n,\xi_1} + (1-\nu) H'_{n,\xi_1} \right]_{\xi_1=0} \quad a_{43} = -K_2 \left[ 2G'_{n,\xi_2} + (1-\nu) H'_{n,\xi_2} \right]_{\xi_2=0} / \delta \\ a_{42} &= -K_2 \left\{ \left[ 2G'_{n,1-\xi_1} + (1-\nu) H'_{n,1-\xi_1} \right]_{\xi_1=0} + \left[ 2G'_{n,1-\xi_2} + (1-\nu) H'_{n,1-\xi_2} \right]_{\xi_2=0} \right\} / \delta \\ a_{44} &= \frac{1}{(n\pi)^2} \left\{ 2(\pi\alpha_{n1})^2 + K_2 \left[ (H'_{n,1-\xi_1})_{\xi_1=0} + (H'_{n,1-\xi_2})_{\xi_2=0} \right] / \delta \right\} \\ b_{32} &= -2K_1 - \left[ 2G''_{n,1-\xi_1} + (1-\nu) H''_{n,1-\xi_1} \right]_{\xi_1=0} + (2-\nu) (\pi\alpha_{n1})^2 \left[ 2G'_{n,1-\xi_1} + (1-\nu) H'_{n,1-\xi_1} \right]_{\xi_1=0} \\ b_{43} &= - \left[ 2G''_{n,\xi_2} + (1-\nu) H''_{n,\xi_2} \right]_{\xi_2=0} + (2-\nu) (\pi\alpha_{n2})^2 \left[ 2G'_{n,\xi_2} + (1-\nu) H'_{n,\xi_2} \right]_{\xi_2=0} \\ b_{34} &= 2K_1 \quad b_{42} = 2\delta^3 K_1 \\ b_{44} &= -2\delta^3 K_1 - \left[ 2G''_{n,1-\xi_2} + (1-\nu) H''_{n,1-\xi_2} \right]_{\xi_2=0} + (2-\nu) (\pi\alpha_{n2})^2 \left[ 2G'_{n,1-\xi_2} + (1-\nu) H'_{n,1-\xi_2} \right]_{\xi_2=0} \\ b_{11} &= \left[ -R''_n(u_0 u_1 \xi_1 = 0) + (2-\nu) (\pi\alpha_{n1})^2 R'_n(u_0 u_1 \xi_1 = 0) \right] \sin \frac{n\pi v_1}{b} \sin \frac{n\pi v_0}{b} \\ b_{41} &= \varepsilon \delta^4 \left[ -R''_n(u'_0 u'_1 \xi_2 = 0) + (2-\nu) (\pi\alpha_{n2})^2 R'_n(u'_0 u'_1 \xi_2 = 0) \right] \sin \frac{n\pi v'_1}{b} \sin \frac{n\pi v'_0}{b} \end{aligned}$$

$$b_1 = - \left[ -R_n'''(u_0 u_1 \xi_1 = 1) + (2-\nu)(\pi \alpha_{n1})^2 R_n'(u_0 u_1 \xi_1 = 1) \right] \sin \frac{n\pi v_1}{b} \sin \frac{n\pi v_0}{b}$$

$$b_2 = -\varepsilon \delta^4 \left[ -R_n'''(u_0' u_1' \xi_2 = 1) + (2-\nu)(\pi \alpha_{n2})^2 R_n'(u_0' u_1' \xi_2 = 1) \right] \sin \frac{n\pi v_1'}{b} \sin \frac{n\pi v_0'}{b}$$

$$b_3 = - \left\{ -R_n'''(u_0 u_1 \xi_1 = 0) + (2-\nu)(\pi \alpha_{n2})^2 R_n'(u_0 u_1 \xi_1 = 0) \right\} \sin \frac{n\pi v_1}{b} \sin \frac{n\pi v_0}{b}$$

$$- \varepsilon \delta \left\{ -R_n'''(u_0' u_1' \xi_2 = 0) + (2-\nu)(\pi \alpha_{n2})^2 R_n'(u_0' u_1' \xi_2 = 0) \right\} \sin \frac{n\pi v_1'}{b} \sin \frac{n\pi v_0'}{b}$$

$$b_4 = K_2 \left\{ R_n'(u_0 u_1 \xi_1 = 0) \sin \frac{n\pi v_1}{b} \sin \frac{n\pi v_0}{b} + \varepsilon \delta^3 R_n'(u_0' u_1' \xi_2 = 0) \sin \frac{n\pi v_1'}{b} \sin \frac{n\pi v_0'}{b} \right\}$$

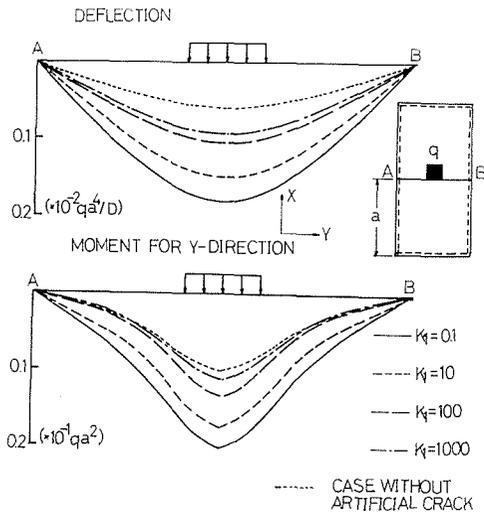


Fig. 5.

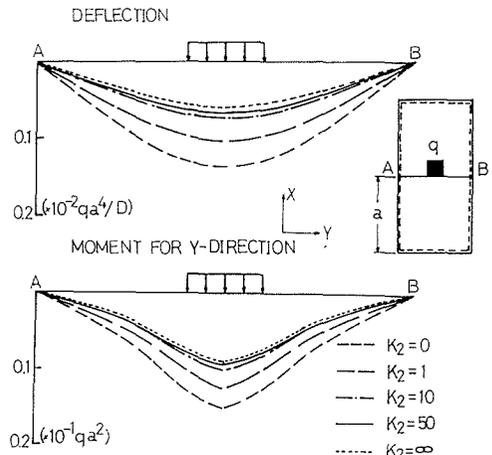


Fig. 6.

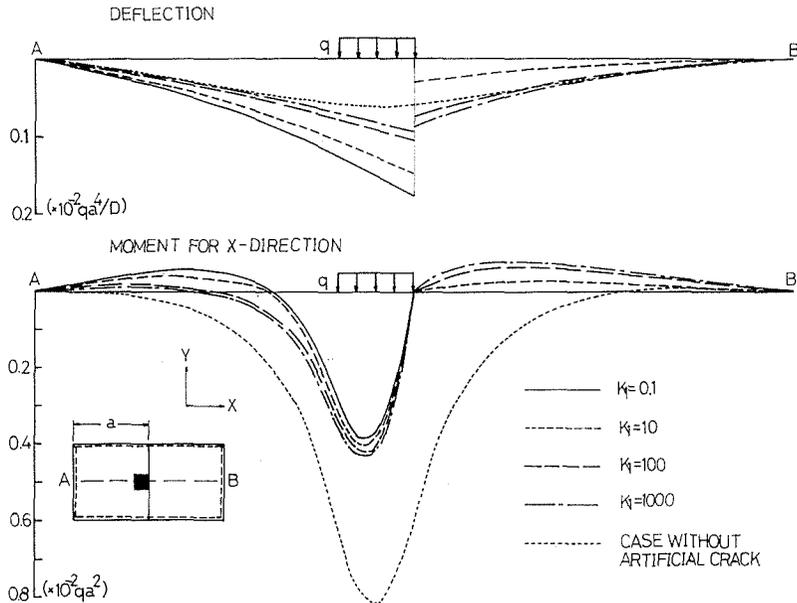


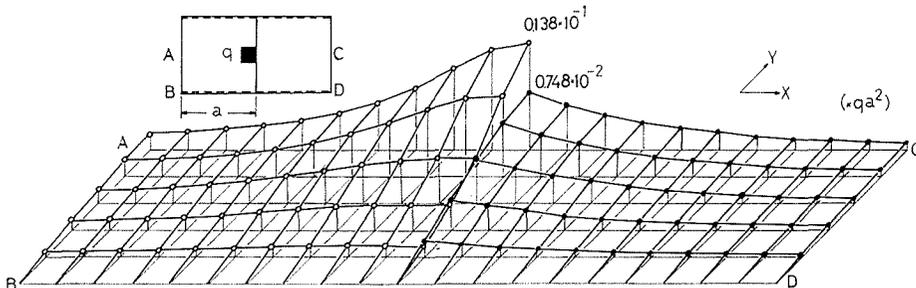
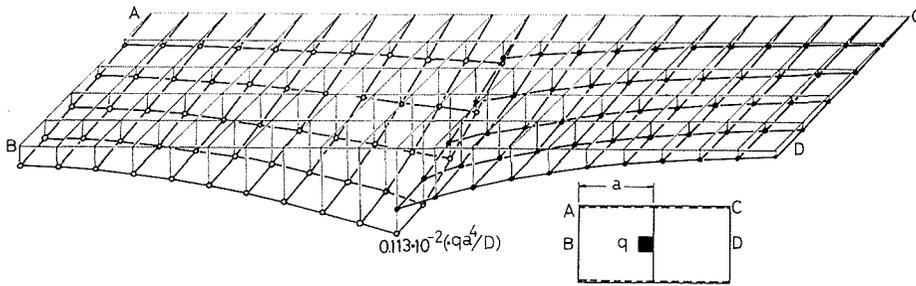
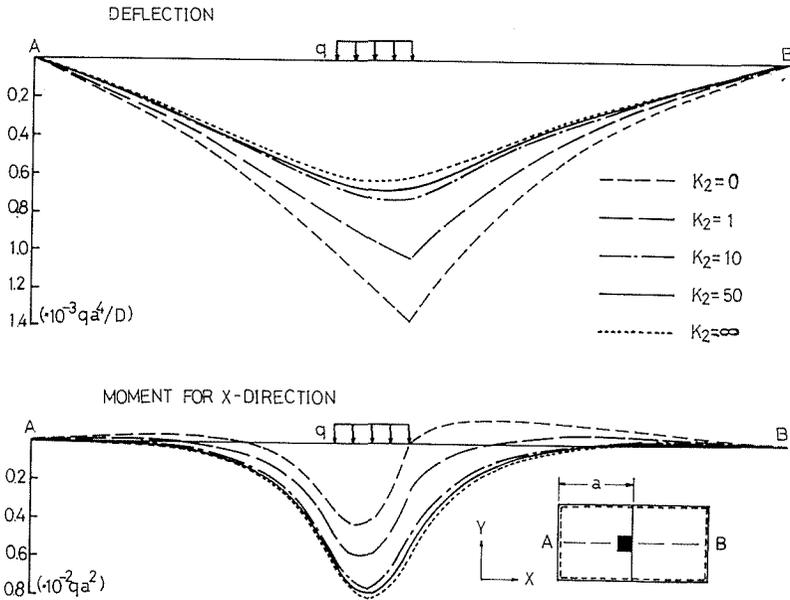
Fig. 7.

$$q_2 = \varepsilon q_1 \quad a_2 = \delta a_1 \quad K_1 = k_1 a_1^3 / D \quad K_2 = k_2 a_1 / D \quad \alpha_{n1} = a_1 n / b$$

$$\alpha_{n2} = a_2 n / b \quad (D; \text{板の曲げ剛性} \quad \nu; \text{ポアソン比})$$

### 6. 数値計算例および考察

図5, 6, 7, 8に, 周辺単純支持で  $K_1, K_2$  によるたわみ, モーメントの変化状況を示す。また, 図9, 10, 11, 12には, 周辺支持条件が相対する2辺単純他の2辺が自由の場合のたわみとモーメントを示す。いずれも,  $u_1 = 0.1a, u_0 = 0.1a, v_1 = 0.5b, v_0 = 0.1b, \varepsilon = 0$  である。



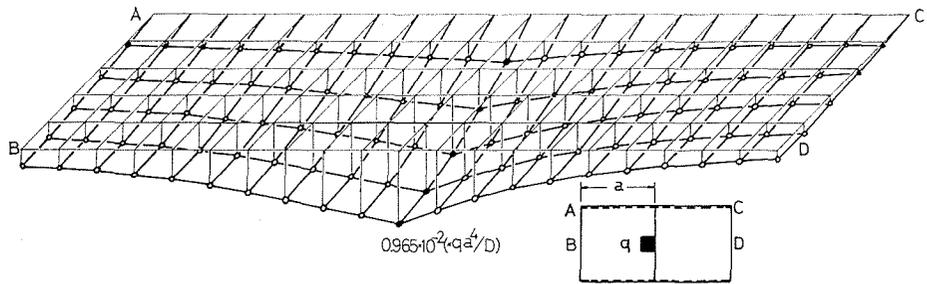


Fig. 11. Deflection ( $K_2=0$ )

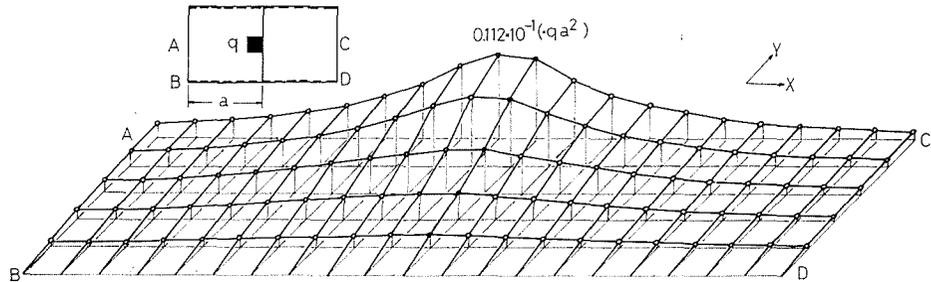


Fig. 12. Moment for Y-direction ( $K_2=0$ )

以後、その一般性のため、半無限平板の場合を論じる。表1に  $K_1, K_2$  に対する  $M_x, M_y$  の値を示す。それによれば、単鉄筋スラブに相当する境界拘束条件Iの場合、 $K_1 \rightarrow \infty$  (or  $K_2=0$ ), すなわち境界でのたわみ差がなくなる状態から、 $K_1=0$  すなわち無載荷板による拘束のない状態への  $y$  方向分担モーメントの増加は、 $x_1=0$  で100%増(すなわち2倍になる)  $x_1=0.1b$  で約70%増となり、逆に  $x$  方向分担モーメントの減少は、 $x_1=0.1b$  で約21%減となる。複鉄筋スラブに相当する境界拘束条件IIの場合、 $K_2 \rightarrow \infty$ , すなわち、たわみ角が連続する状態から、 $K_2=0$ , すなわち、モーメントがそこで零となる状態への  $y$  方向分担モーメントの増加は、 $x_1=0$  で約15%増、 $x_1=0.1b$  で約6%増となり、逆に、 $x$  方向分担モーメントの減少は、 $x_1=0$  で100%減、 $x_1=0.1b$  で約45%減となる。

Table 1.

	$M_x (\times 10^{-2} qb^2)$		$M_y (\times 10^{-1} qb^2)$	
	$x_1=0.$	$x_1=0.1b$	$x_1=0.$	$x_1=0.1b$
$K_1$				
0	0	0.3134	0.1986	0.1755
100	0	0.3662	0.1312	0.1219
200	0	0.3730	0.1234	0.1162
500	0	0.3807	0.1156	0.1111
1000	0	0.3858	0.1108	0.1084
10000	0	0.3959	0.1015	0.1040
$K_2$				
0	0	0.3985	0.0993	0.1030
5	0.3531	0.6241	0.0905	0.0999
10	0.4192	0.6636	0.0888	0.0983
20	0.4642	0.6894	0.0877	0.0979
30	0.4819	0.6993	0.0873	0.0977
100	0.5100	0.7146	0.0866	0.0975
1000	0.5221	0.7210	0.0863	0.0974
10000	0.5234	0.7216	0.0862	0.0974
By Timoshenko	0.5235	0.7217	0.0862	0.0974

もう少し局部的に見れば、図13からわかるように、 $K_1$ の小さい範囲では、 $M_x$ 曲げモーメントの増加率に比して、 $M_y$ 曲げモーメントの減少率は大きい。それとは逆に、 $K_2$ の小さい範囲では、 $M_x$ 曲げモーメントの増加率に比して  $M_y$ 曲げモーメントの減少率は小さい。

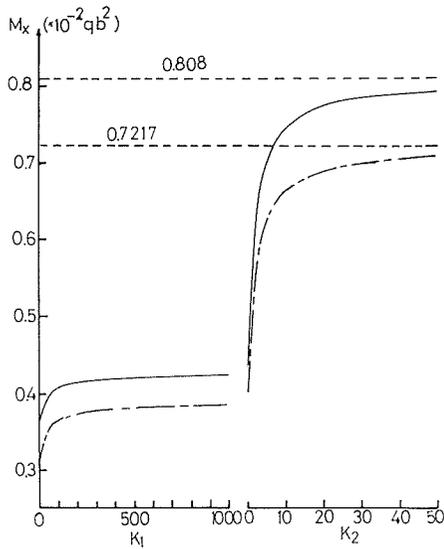


Fig. 13 (a).

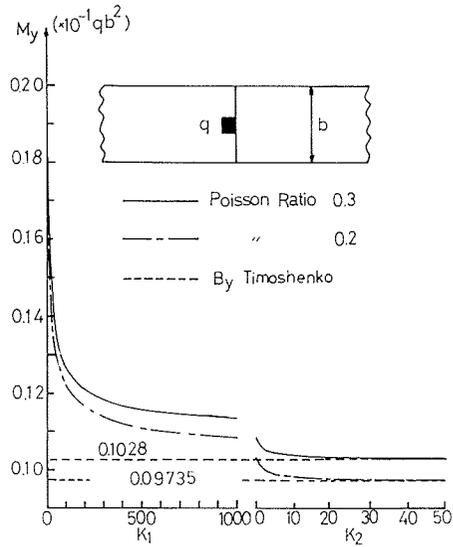


Fig. 13 (b).

いずれの場合にも、これら境界拘束条件を入れることによって、 $x$ 方向の曲げモーメントに関しては、 $K_2 \rightarrow \infty$ とならない限り、そのない場合より小さな値を有し安全側に、 $y$ 方向曲げモーメントに関しては、 $K_2 \rightarrow \infty$ とならない限り、大きな値を有し、危険側になる。

また、境界拘束条件IIを有するものと普通平板の場合、 $M_{y \max}$ は載荷面中央で生じるが、境界拘束条件Iでは $K_1$ の値が1000位までは、その境界位置で生じる。

更に、境界拘束条件Iにおいて、載荷板の載荷位置から少し離れた所と、無載荷板とには、 $x$ 方向に負の曲げ応力が生じている。例えば、ポアソン比0.2、 $K_1=1000$ で $M_{x1(x_1=0.1b)}=0.3858 \times 10^{-2}qb^2$ 、 $M_{x1(x_1=0.7b)}=-0.5355 \times 10^{-3}qb^2$ 、 $M_{x2(x_2=0.3b)}=-0.9899 \times 10^{-3}qb^2$ となり、 $M_{x1(x_1=0.7b)}$ は $M_{x1(x_1=0.1b)}$ の約14%の大きさの、また、 $M_{x2(x_2=0.3b)}$ はそれの約26%の大きさの負の曲げモーメントとなる。境界拘束条件IIにおいても同様で、例えば、 $K_2=50$ で載荷板の方には約 $0.7b$ 以上の位置に、また、無載荷板の方では、約 $0.5b$ 以上の位置に $x$ 方向に負の曲げモーメントを起こす。

以上、本論文は、貫通ひびわれを受けたスラブの解析を目的として、周辺境界条件の他に、その断面に特殊な境界条件を想定し、議論を進めたものである。

尚、計算には、北大大型計算機センターFACOM 230-70を用いた。

#### 参 考 文 献

- (1) 能町純雄：土木学会論文集，32号（昭31），p. 26.
- (2) S. P. Timoshenko and S. W. Krieger：Theory of Plates and Shells, Second Edition, p. 156.
- (3) Theodor Baumann und Hubert Rüsck：DEUTSCHER AUSSCHUSS FÜR STAHLBETON, 1970 (HEFT 210), p. 43.