北海道大学工学部研究報告
第78号（昭和51年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 78 (1976)

集団到着，集団サービス待ち行列の過渡解

二 階 堂 正 直*

（昭和50年6月30日受理）

Time-Dependent Solution of the Bulk-Arrival, Bulk-Service Queue

Masanao NIKAIDO

(Received June 30, 1975)

Abstract

The steady-state solution of the bulk queue in which the groups of events arrive at a service line and are served in groups was obtained only by R. G. Miller, but reports of the time-dependent solution of it's problem have not been published up to date.

In this paper an attempt was made to obtain the time-dependent solution of this type of model with the same service discipline as N. K. Jaiswal's model with a single input and bulk general service and I succeeded in getting accurate results in a Laplace transformation fashion.

And a steady-state solution of this problem was derived by limiting this solution.

Furthermore, with a digital computer I investigated the model to confirm these solutions and to clarify the fundamental characters.

Specializations of this model lead to N. K. Jaiswal's model and Erlang's model which is the most fundamental among queueing problems.

1. まえがき

事象の到着，サービスのどちらか一方が集団で行なわれるような待ち行列については従来より多くの研究[1),4),9),10),etc.]が進められてきているが，その両者が共に集団で行なわれる場合については定常解の場合について R. G. Miller のみが取り扱っているにすぎない。しかし，このモデルに対する過渡解については何等の研究もなされていない。本論文ではこの問題をサービス規準が単一ポアソン到着，集団一般サービスの場合の N. K. Jaiswal のモデル[1)]に等しくとり，その過渡解をラプラス変換の形で解析的な式を正確に求めることに成功した。更に，この解の極限として時間領域に於ける定常解の正確な形を求め，また過渡解では R. E. Bellman による数値的逆ラプラス変換の手法[4),5)]を使って数値計算も行ない，さらに定常解についてもその正確な表示式から数値計算を行ない理論の正当性とシステムの基本的性質を明らかにした。

なお，Miller のモデルと本論文のモデルとの違いは前者が待ち事象の存在するときだけサー

* 工学部電気工学科　系統工学講座

ビス period が始まるのに対し，後者では待ち事象の有る無しにかかわらずサービス period が始まると言う点にある。又，本論文のモデルは N. K. Jaiswal のモデルを完全に含むものとなっており，更に単一到着，単一指数分布サービスへと特殊化すると待ち行列問題の中で最も基本的なアーラン・モデルとなる。

2. 待ち行列モデルの構成

単一ポアソン到着，一般サービス分布モデルである Gerge Luchack のモデルを別の角度から眺めることによって集団ポアソン到着，単一指数分布サービス系とみなすことができることに着目し，この到着形式を単一ポアソン到着，集団一般サービスの場合の N. K. Jaiswal のモデル[1)]に採用して本論文のモデルを構成した。以下にその構成過程を具体的に示す。

各事象はポアソン分布に従って単一到着し，到着後，サービス中なら待って，空いた時，待ち行列長が s 個以上なら s 個まとめて，以内なら総ての事象がサービス施設に入る。サービスは各位相が平均サービス率 μ の指数分布サービスで最大 j 個の位相から構成され，s 個又は s 個以下の各集団は C_r の確率で先ず r 番目の位相に入り，次に $(r-1)$ 番目の位相へと逆順に動いて 1 番目の位相を終了した後，系から離脱する。その後待っている次の集団がサービス施設に入る。時刻 t で待ち行列長が n 個でサービス中の位相が r 番目である確率を $P_{n,r}(t)$ とする。又，時刻 t で系が空である確率を $P_0(t)$ とする。

先ず，N. K. Jaiswal のモデル[1)]を次に示す。

$$dP_{n,r}(t)/dt = -(\lambda+\mu)P_{n,r}(t)+\lambda P_{n-1,r}(t)+\mu P_{n,r+1}(t)+\mu C_r P_{n+s,1}(t),\ (n>0,\ 1\leq r<j) \quad (2\text{-}1)$$

$$dP_{n,j}(t)/dt = -(\lambda+\mu)P_{n,j}(t)+\lambda P_{n-1,j}(t)+\mu C_j P_{n+s,1}(t),\ (n>0) \quad (2\text{-}2)$$

$$dP_{0,r}(t)/dt = -(\lambda+\mu)P_{0,r}(t)+\lambda C_r P_0(t)+\mu C_r \textstyle\sum_{m=1}^{s} P_{m,1}(t)+\mu P_{0,r+1}(t),\ (1\leq r<j) \quad (2\text{-}3)$$

$$dP_{0,j}(t)/dt = -(\lambda+\mu)P_{0,j}(t)+\mu C_j \textstyle\sum_{m=1}^{s} P_{m,1}(t)+\lambda C_j P_0(t) \quad (2\text{-}4)$$

$$dP_0(t)/dt = -\lambda P_0(t)+\mu P_{0,1}(t) \quad (2\text{-}5)$$

一方，Gerge Luchack のモデル式は

$$dP_0(t)/dt = -\lambda(t)P_0(t)+\mu P_1(t) \quad (2\text{-}6)$$

$$dP_n(t)/dt = -[\lambda(t)+\mu]P_n(t)+\mu P_{n+1}(t)+\lambda(t)\textstyle\sum_{m=1}^{n} E_m P_{n-m}(t),\ (n\geq 1) \quad (2\text{-}7)$$

ここで，E_m の確率で m 個の位相から成るサービスを要求している各事象が時刻 t における平均到着率 $\lambda(t)$ のポアソン分布に従って到着し，各位相は平均サービス率 μ の指数分布に従って処理される。$P_n(t)$ は時刻 t でサービス中および待っている事象が要求しているサービス位相の総数が n 個存在する確率である。さて，位相を事象とみなすと，(2–7) 式の $\lambda(t)\sum_{m=1}^{n} E_m P_{n-m}(t)$ の項は集団の大きさが m 個の事象から成る確率を E_m とする集団到着を意味し，このモデルは集団ポアソン到着，単一指数分布サービス系となる。そこで，この到着形式を N. K. Jaiswal のモデルに取り入れると本論文のモデルが次のように得られる。ただし，式中の D_m は E_m に対応するもので，各集団が平均到着率 λ なるポアソン到着するとき各集団の大きさが m 個である確率を示す。

$$dP_{n,r}(t)/dt = -(\lambda+\mu)P_{n,r}(t)+\boxed{\lambda\sum_{m=1}^{n} D_m P_{n-m,r}(t)}+\mu P_{n,r+1}(t)+\mu C_r P_{n+s,1}(t)+\boxed{\lambda C_r D_{n+s} P_0(t)},$$
$$(n>0,\ 1\leq r<j) \quad (2\text{-}8)$$

$$dP_{n,j}(t)/dt = -(\lambda+\mu)P_{n,j}(t)+\boxed{\lambda\sum_{m=1}^{n} D_m P_{n-m,j}(t)}+\mu C_j P_{n+s,1}(t)+\boxed{\lambda C_j D_{n+s} P_0(t)},\ (n>0) \quad (2\text{-}9)$$

$$dP_{0,r}(t)/dt = -(\lambda+\mu)P_{0,r}(t)+\boxed{\lambda C_r \sum_{m=1}^{s} D_m P_0(t)}+\mu C_r \sum_{m=1}^{s} P_{m,1}(t)+\mu P_{0,r+1}(t),\ (1\leq r<j) \quad (2\text{-}10)$$

$$dP_{0,r}(t)/dt = -(\lambda+\mu)P_{0,j}(t)+\boxed{\lambda C_j \sum_{m=1}^{s} D_m P_0(t)}+\mu C_j \sum_{m=1}^{s} P_{m,1}(t) \quad (2\text{-}11)$$

$$dP_0(t)/dt = -\lambda P_0(t)+\mu P_{0,1}(t) \quad (2\text{-}12)$$

上式で破線および実線の枠内は Jaiswal のモデル式に対して各々変形した項，追加した項であることを示す。又，$D_i=1,\ i=1,\ D_i=0,\ i\neq 0$ と特殊化すると Jaiswal のモデル式が得られる。

なお，本論文モデルの到着形式は一種の複合確率分布で事象を単位と考えた場合の平均到着率は $\lambda\sum_{m=1}^{\infty} mD_m$ であり，同じく事象を単位とする平均サービス率は「各位相の平均サービス率×サービス集団の大きさ (S)」を「1個の事象が要求する平均位相数」で割ることによって得られ $S\mu/\sum_{r=1}^{j} rC_r$ となる。よって平均トラヒック密度 ρ は $\lambda\sum_{m=1}^{\infty} mD_m/(S\mu/\sum_{r=1}^{j} rC_r)$ となる。

3. モデルの解析

(2-8)~(2-12) 式に対して初期条件として時刻 $t=0$ にシステムに客が存在しない，すなわち $P_0(0)=1$ と仮定し，$P_{n,r}(\alpha)=\int_0^{\infty} P_{n,r}(t)e^{-\alpha t}dt$ なるラプラス変換を行なうと次式が得られる。

$$-(\alpha+\lambda+\mu)P_{n,r}(\alpha)+\lambda\sum_{m=1}^{n} D_m P_{n-m,r}(\alpha)+\mu P_{n,r+1}(\alpha)+\mu C_r P_{n+s,1}(\alpha)+\lambda C_r P_{n+s} P_0(\alpha)=0, \quad (n>0,\ 1\leq r<j) \quad (3\text{-}1)$$

$$-(\alpha+\lambda+\mu)P_{n,j}(\alpha)+\lambda\sum_{m=1}^{n} D_m P_{n-m,j}(\alpha)+\mu C_j P_{n+s,1}(\alpha)+\lambda C_j D_{n+s} P_0(\alpha)=0,\ (n>0) \quad (3\text{-}2)$$

$$-(\alpha+\lambda+\mu)P_{0,r}(\alpha)+\lambda C_r\sum_{m=1}^{s} D_m P_0(\alpha)+\mu C_r\sum_{m=1}^{s} P_{m,1}(\alpha)+\mu P_{0,r+1}(\alpha)=0, \quad (1\leq r<j) \quad (3\text{-}3)$$

$$-(\alpha+\lambda+\mu)P_{0,j}(\alpha)+\lambda C_j\sum_{m=1}^{s} D_m P_0(\alpha)+\mu C_j\sum_{m=1}^{s} P_{m,1}(\alpha)=0 \quad (3\text{-}4)$$

$$-(\alpha+\lambda)P_0(\alpha)+\mu P_{0,1}(\alpha)+1=0 \quad (3\text{-}5)$$

ここで次のような2つの母関数を定義する。

$$Q_n(x,\alpha)=\sum_{r=1}^{j} x^r P_{n,r}(\alpha), \qquad F(x,y,\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty} y^n Q_n(x,\alpha)$$

ここで，(3-1)~(3-5) 式に適切な x および y のべき乗を掛けて $r=1$ から $r=j$ について和を取った後，$n=0$ から $n=\infty$ について和を取って整理すると次式が得られる。

$$-[\alpha+\lambda-\lambda\sum_{m=1}^{\infty} D_m y^m+\mu-\mu/x]F(x,y,\alpha)-\mu[1-A(x)/y^s]\sum_{n=0}^{\infty} y^n P_{n,1}(\alpha)+\mu A(x)\sum_{n=1}^{s-1} P_{n,1}(\alpha)$$
$$(1-y^n/y^s)+\lambda A(x)\sum_{m=1}^{s} D_m P_0(\alpha)-(A(x)/y^s)[(\alpha+\lambda)P_0(\alpha)-1]+\lambda A(x)\sum_{n=1}^{\infty} y^n D_{n+s} P_0(\alpha)=0 \quad (3\text{-}6)$$

ただし，$A(x)=\sum_{r=1}^{j} x^r C_r$

次に，$x=\mu/(\mu+\alpha+\lambda-\lambda\sum_{m=1}^{\infty} D_m y^m)$ とおくと

$$G(y,\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty} y^n P_{n,1}(\alpha)=\frac{\mu\sum_{n=1}^{s-1} P_{n,1}(\alpha)(y^s-y^n)+P_0(\alpha)(\lambda y^s\sum_{m=1}^{s} D_m+\lambda\sum_{n=s+1}^{\infty} y^n D_n-\alpha-\lambda)+1}{\mu[y^s/B(y)-1]} \quad (3\text{-}7)$$

ただし，$B(y)=\sum_{r=1}^{j} C_r[\mu/(\mu+\alpha+\lambda-\lambda\sum_{m=1}^{\infty} D_m y^m)]^r$

定理 1.

(3-7) 式の 分母$=0$ の方程式は $y=e^{i\theta}$ なる単位円の内部 ($|y|<1$) で s 個の零点を持つ。

証　明.

ルーシェの定理から, $f(y)=y^s$ と $g(y)=y^s-\sum_{r=1}^{r=j} C_r[\mu/(\mu+\alpha+\lambda-\lambda\sum_{m=1}^{\infty} D_m y^m)]^r$ は次の 3 つの条件を満足するとき, 単位円の内部で同数の零点を持つ。

1)　C の内部で $f(y)$ と $g(y)$ は解析的である。

2)　C の境界上で $f(y)\neq 0$

3)　C の境界上で $|f(y)-g(y)|<|f(y)|$

$\alpha=\sigma+i\tau$, $\sigma>0$ とする。

$f(y)$ は y の全域で微分可能であるから C の内部でも解析的である。また C の境界上で零ではない。

$|y|\leq 1$ に対して

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} D_m y^m\right| = \sum_{m=1}^{\infty} D_m |y^m| \leq \sum_{m=1}^{\infty} D_m = 1 \tag{3-8}$$

が成立する。　　$W=|\mu+\alpha+\lambda-\lambda\sum_{m=1}^{\infty} D_m y^m|$ とおくと

$$W \geq Re(\lambda+\mu+\sigma+i\tau-\lambda\sum_{m=1}^{\infty} D_m y^m) = \lambda+\mu+\sigma-\lambda\sum_{m=1}^{\infty} D_m Re(y^m)$$

$$\geq \lambda+\mu+\sigma-\lambda\sum_{m=1}^{\infty} D_m |y^m|$$

(3-8) 式から　$W \geq \lambda+\mu+\sigma-\lambda = \mu+\sigma>0$ (3-9)

よって $|y|\leq 1$ に対して $B(y)$ の分母は零にならないから $B(y)$ は $|y|\leq 1$ で解析的であるので $g(y)$ が $|y|\leq 1$ で解析的であることが分る。次に条件 3) について調べる。(3-9式) を適用すると

$$|f(y)-g(y)| = \left|\sum_{r=1}^{j} C_r[\mu/(\mu+\alpha+\lambda-\lambda\sum_{m=1}^{\infty} D_m y^m)]^r\right|$$

$$= \sum_{r=1}^{j} C_r[\mu/W] \leq \sum_{r=1}^{j} C_r[\mu/(\mu+\sigma)]^r < \sum_{r=1}^{j} C_r = 1 \tag{3-10}$$

ここで単位円 C の境界上 ($|y|=1$) では $|f(y)|=|e^{i\theta s}|=1$ が得られるから $|f(y)-g(y)|<|f(y)|$ となり, 条件 3) が満足された。よって証明された。

定理 2.

$G(y,\alpha)$ が単位円の内部および周上 ($|y|\leq 1$) で解析的であるための必要十分条件は (3-7) 式の分子$=0$ の方程式の零点として (3-7) 式の 分母$=0$ の零点の中, $|y|<1$ を満足する s 個の零点 y_1, $y_2, \cdots, y_s$ 総てを含んでいることである。

証　明.

(3-7) 式の分子を $h(y)$ と表わすと $G(y,\alpha)=B(y)h(y)/\mu g(y)$ と表わすことができる。

必要条件：　定理 1 の証明から $B(y)$ は $|y|\leq 1$ で $h(y)$ は y の全域で解析的であるから $B(y)\cdot h(y)$ 分子は $|y|\leq 1$ で解析的である。次に $G(y,\alpha)$ が $|y|\leq 1$ で解析的であると仮定すると $g(y)=0$ が $|y|\leq 1$ で零点を持ってはならない。 $|y|=1$ で零点 y^* を持つと仮定すると $g(y^*)=0$ から $y^{*s}=B(y^*)$ よって $|y^{*s}|=|B(y^*)|$ が成立しなければならないが, 一般に $|y^s|=1$ で (3-10) 式から $|B(y)|<1$ であるから矛盾する。よって $g(y)=0$ は $|y|=1$ で零点を持たない。残る $|y|<1$ に関しては定理 1 から $g(y)=0$ は $|y|<1$ で s 個の零点を持つが, これと同じ零点を $h(y)=0$ が持てば $|y|<1$ に関する零点は約分によって消去される。

十分条件：$g(y)$ が $|y|<1$ に関して消去された結果，$h(y)$ が $\bar{h}(y)$, $g(y)$ が $\bar{g}(y)$ になったとすると $G(y,\alpha)=B(y)\cdot\bar{h}(y)/\mu\bar{g}(y)$ となるが，$\bar{g}(y)=0$ は $|y|\leq 1$ で零点を持たないから $G(y,\alpha)$ の $|y|\leq 1$ での解析性には関係ない。残る $B(y)\cdot\bar{h}(y)$ は明らかに $|y|\leq 1$ で解析的であるから $G(y,\alpha)$ は $|y|\leq 1$ で解析的である。よって証明された。

$G(y,\alpha)$ を決定するためには (3-7) 式において s 個の未知変数 $P_{n,1}(\alpha)$, $n=1,2,\cdots s-1$, $P_0(\alpha)$ が決まればよい。これら未知変数は定理 2 から 分子＝0 の方程式に $y_1, y_2, \cdots y_s$ を代入して s 元連立方程式を作り解くことによって決定されるが，一意に決まるにはこの連立方程式の係数行列式 $\Delta\neq 0$ の条件が必要である。すなわち，

分子＝0 の方程式に $y_1, y_2, \cdots y_s$ を代入すると (3-7) 式から次式が求まる。

$$\mu\sum_{n=1}^{s-1}P_{n,1}(\alpha)(y_i^s-y_i^n)+P_0(\alpha)(\lambda y_i^s\sum_{m=1}^{s}D_m+\lambda\sum_{n=s+1}^{\infty}y_i^nD_n-\alpha-\lambda)+1=0,\ (i=1,2,\cdots s)\quad (3\text{-}11)$$

(3-5) 式を使って整理すると次式となる。

$$\sum_{n=1}^{s-1}[P_{n,1}(\alpha)/P_{0,1}(\alpha)](y_i^s-y_i^n)+(\lambda/\mu)\{y_i^s\sum_{m=1}^{s}D_m+\sum_{n=s+1}^{\infty}y_i^nD_n\}\,P_0(\alpha)/P_{0,1}(\alpha))-1=0,\quad (i=1,2,\cdots s)\quad (3\text{-}12)$$

上式の係数行列式を Δ とすると次式が得られる。なお，この式は可能な限り単純形に展開し，Vandermonde の公式などを用いて各行列式の値を求め，値の求まらないものはその性質を調べることによって得たものである。

$$\Delta=\begin{vmatrix} y_1^s-y_1^1 & y_1^s-y_1^2 & \cdots & y_1^s-y_1^{s-1} & (\lambda/\mu)\{y_1^s\sum_{m=1}^{s}D_m+\sum_{n=s+1}^{\infty}y_1^nD_n\} \\ y_2^s-y_2^1 & y_2^s-y_2^2 & \cdots & y_2^s-y_2^{s-1} & (\lambda/\mu)\{y_2^s\sum_{m=1}^{s}D_m+\sum_{n=s+1}^{\infty}y_2^nD_n\} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ y_s^s-y_s^1 & y_s^s-y_s^2 & \cdots & y_s^s-y_s^{s-1} & (\lambda/\mu)\{y_s^s\sum_{m=1}^{s}D_m+\sum_{n=s+1}^{\infty}y_s^nD_n\} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\lambda}{\mu}(-1)^{s-1}y_1y_2\cdots y_s\prod_{j>i}(y_j-y_i)\Bigg[\sum_{m=1}^{s}D_m+(-1)^{s-1}\sum_{n'=1}^{\infty}D_{s+n'}\cdot\quad (3\text{-}13)$$

$$\cdot\Bigg[y_1y_2\cdots y_s\{(n'-1)\text{ 次の対称式}\}+\Bigg\{\sum_{q=n'}^{s+n'-2}(q\text{ 次の対称式})\Bigg\}\Bigg]\Bigg],\quad i,j=1,2,\cdots s$$

$\Delta\neq 0$ の条件は

1) 各 y_i, $i=1,2,\cdots s$ が零でないこと

2) 各 y_i, $i=1,2,\cdots s$ がお互いに異なっていること

3) (3-13) 式の外側の [　　] 内が零でないこと

が成立することである。条件 1) は (3-7) 式で 分母＝0 の方程式の零点として零を持たないことは明らかであるから常に成立する。2), 3) の条件は一般には成立しないので 4. で示すように特定の場合についてその都度条件を得る必要がある。

さて，(3-6) 式で $x=1$ とおいた式に (3-7) 式を代入して整理すると次式が得られる。

$$\sum_{n=0}^{\infty}y^nQ_n(1,\alpha)=[\mu(1/B(y)-1)/(\alpha+\lambda-\lambda\sum_{m=1}^{\infty}D_my^m)]\,G(y,\alpha)\quad (3\text{-}14)$$

$Q_n(1,\alpha)=\sum_{r=1}^{j}P_{n,r}(\alpha)$ は時刻 t で待ち事象が n 個ある確率のラプラス変換したものである。これを逆ラプラス変換することによって実際の過渡解が得られる。

$Y=\sum_{n=0}^{\infty}y^nQ_n(1,\alpha)$ とすると $Q_k(1,\alpha)$ は (3-14) 式の右辺の級数展開式の y^k の係数として，または $(1/k!)(\partial^kY/\partial y^k)|_{y=1}$ として得られる。待ち行列の長さ $L_q(\alpha)$ は $(\partial Y/\partial y)|_{y=1}$ から求められる。

次に，定理 2 による $G(y,\alpha)$ が $|y|\leq 1$ で解析的であるための条件を使って，(3-7) 式を有理関数とみたときの 分母＝0, 分子＝0 の方程式の零点で $|y|<1$ をみたす s 個の零点 $y_1, y_2, \cdots y_s$ 以外

の零点を各々 y_{d_i}, $i=1,2,\cdots k$, y_{n_i}, $i=1,2,\cdots l$ とすれば分母分子の $\Pi_{i=1}^{s}(y-y_i)$ が消去されて次式が得られる。

$$G(y,\alpha)=\frac{\mu\sum_{n=1}^{s-1}P_{n,1}(\alpha)(y^s-y^n)+P_0(\alpha)(\lambda y^s\sum_{m=1}^{s}D_m+\lambda\sum_{n=s+1}^{\infty}y^nD_n-\alpha-\lambda)+1}{\mu\,[y^s/B(y)-1]}$$

$$=\frac{C(\alpha)\prod_{i=1}^{l}(y-y_{n_i})}{\prod_{i=1}^{k}(y-y_{d_i})} \tag{3-15}$$

$G(y,\alpha)$ は $|y|\leq 1$ で解析的であるから (3-15) 式で $y=0$ または 1[注1] を代入すると $C(\alpha)$ を未知数とする ($P_0(\alpha)$ は (3-11) 式から既に決定済み。) 方程式が得られ，解くと $C(\alpha)$ が求まり $G(y,\alpha)$ が決定される。

注1. y_{n_i} として 0, 1 なる零点を同時に持たないことを示す。持つと仮定すれば (3-15) 式から $P_0(\alpha)\cdot(\alpha+\lambda)-1=0$, $P_0(\alpha)(-\alpha)+1=0$ が成立しなければならないが $\lambda\neq 0$ から両式共満足することはない。これは仮定に反する。

上記の場合，y_{n_i} を求めるために (3-11) 式の解が一意である $\varDelta\neq 0$ の条件を必要する。しかし $s\geq$「到着集団の大きさの最大値」(M とする。) の場合，(3-7) 式の分子は s 次となり (3-15) 式での $\Pi_{i=1}^{s}(y-y_i)$ で表わされる。そのため $\Pi_{i=1}^{l}(y-y_{n_i})$ の項は (3-7) 式の分母から得られるものとなる ($C_r=1$, $r=k$, $C_r=0$, $r\neq k$ ではこの項は存在しない)。よって (3-7) 式の 分子$=0$ を解いて y_{n_i} を求める必要がないので $\varDelta\neq 0$ の条件を必要としない。次に (3-7) 式の分母は $|y|\leq 1$ で解析的であるから $|y_{n_i}|<1$, $i=1,2,\cdots l$ が成立するので (3-17) 式で $y=0,1$ を代入して得た 2 元連立式程式を解いて $C(\alpha)$, $P_0(\alpha)$ を求めればよい。

4. 特殊化されたモデルでの $\varDelta\neq 0$ となる条件

サービス分布が k アーラン，すなわち $C_r=1$, $r=k$, $C_r=0$, $r\neq k$ で $D_i\geq 0$, $i=1,2$, $\sum_{i=1}^{2}D_i=1$, $D_i=0$, $i\neq 1,2$ であるモデルについて 3. の条件 2). 各 y_i が異なっているための条件を求める。k アーランなる条件を適用すると (3-7) 式の 分母$=0$ の方程式は $y^s=\{\mu/(\mu+\alpha+\lambda-\lambda\sum_{m=1}^{\infty}D_m y^m)\}^k$ となる。この式をこの式の両辺を微分した式で辺々割ると存在可能な重根がみたさなければならない次式が得られる。

$$y=s(\mu+\alpha+\lambda-\lambda\sum_{m=1}^{\infty}D_my^m)/(k\lambda\sum_{m=1}^{\infty}D_m\cdot m\cdot y^{m-1}) \tag{4-1}$$

(4-1) 式に対し D_i に関する条件を適用しまとめると

$$\lambda D_2(2k+s)y^2+\lambda D_1(k+s)y-s(\mu+\alpha+\lambda)=0 \tag{4-2}$$

(4-2) 式の零点 y に対して $|y|>1$ が成立すれば各 y_i, $i=1,2,\cdots s$ が異なっていることになる。(4-2) 式に対し，根の公式および複素数の不等式に関する公式などを用いて $|y|>1$ なる条件を求めると

$$|\alpha|>\{\lambda D_2(2k+s)\}/s+(\lambda/s)D_1(k+s)-(\lambda+\mu) \tag{4-3}$$

$s\geq M=2$ の場合は $\varDelta=(\lambda/\mu)(-1)^{s-1}y_1y_2\cdots y_s\prod_{j>i}(y_j-y_i)$ となって，(4-1) 式を満足すれば $\varDelta\neq 0$ となる。$s<M=2$, すなわち $s=1$ の場合は明らかに条件無しで $G(y,\alpha)$ は一意に決定される。なお本論文のモデルで $D_i=1$, $i=1$, $D_i=0$, $i\neq 1$ と更に特殊化すれば N. K. Jaiswal のモデルとなって，(4-1) 式は次式となって，Jaiswal が示した結果と等しくなる。

$$|\alpha|>(\lambda/\mu)(k+s)-(\lambda+\mu)=\mu(\rho'-1),\qquad \rho'=\lambda k/s\mu \tag{4-4}$$

5. 数値計算

5.1 数値計算式と計算方法

数値計算の対象モデルは次の2つの条件を満足するもの，すなわち D_1, D_2 の確率で各々1個，2個ずつの集団でポアソン到着し，サービスは位相が1個だけの指数分布サービスでその容量は s 個であるモデルである。

1) $D_i \geq 0,\ i=1,2,\ \sum_{i=1}^{2} D_i=1,\ D_i=0,\ i \neq 1,2$

2) $C_r=1,\ r=1,\ C_r=0,\ r \neq 1$

(3-7) 式の 分母$=0$ の方程式は $\tau=\lambda t$ なる正規化を行なうと（正規化前，正規化後の関数をそれぞれ $f(\alpha)$, $\hat{f}(\alpha)$ とすると $\hat{f}(\alpha)=\lambda f(\alpha\lambda)$ が成立する。）

$$\lambda D_2 y^{s+2}+\lambda D_1 y^{s+1}-(\mu+\alpha\lambda+\lambda)\,y^s+\mu = 0 \tag{5-1}$$

(1) $s=1$ の場合

(5-1) 式の零点で $|y|\leq 1$ をみたすものを y_1, $|y|>1$ を満足するものを y_{d_1}, y_{d_2} とする。(3-7) 式の 分子$=0$ の方程式は $\hat{P}_0(\alpha)(\lambda D_1 y+\lambda D_2 y^2-\alpha\lambda-\lambda)+1=0$ となり，これに y_1 を代入して $P_0(\alpha)$ を求めて再びこの方程式を解くと y_1 以外のもう一つの零点 y_{n_1} が求まる。以下第3章で述べた手順で解いた結果を示す。

$$\hat{P}_0(\alpha)=\frac{y_{n_1}(y_{d_1}-1)(y_{d_2}-1)+\alpha(\lambda/\mu)\,y_{d_1}y_{d_2}(y_{n_1}-1)}{\alpha\{y_{d_1}y_{d_2}(y_{n_1}-1)(\lambda/\mu)(\alpha+1)+(y_{d_1}-1)(y_{d_2}-1)\,y_{n_1}\}} \tag{5-2}$$

$$\hat{C}(\alpha)=\left\{\hat{P}_0(\alpha)\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)(\alpha+1)-\frac{\lambda}{\mu}\right\}\frac{y_{d_1}y_{d_2}}{y_{n_1}}, \qquad \hat{C}'(\alpha)=-\hat{C}(\alpha) \tag{5-3}$$

$$\hat{Q}_n(1,\alpha)=\frac{C'(\alpha)}{y_{d_1}^n y_{d_2}^n}\left\{(y_{d_1}^{n-1}+y_{d_1}y_{d_2}^{n-2}+\cdots+y_{d_1}^{n-2}y_{d_2}+y_{d_1}^{n-1})-\frac{y_{n_1}(y_{d_2}^n+y_{d_1}y_{d_2}^{n-1}+\cdots+y_{d_1}^{n-1}y_{d_2}+y_{d_1}^n)}{y_{d_1}y_{d_2}}\right\} \tag{5-4}$$

$$\hat{L}_q(\alpha)=\frac{\hat{C}'(\alpha)\{(y_{n_1}-1)(y_{d_1}+y_{d_2}-2)-(y_{d_1}-1)(y_{d_2}-1)\}}{\{(y_{d_1}-1)(y_{d_2}-1)\}^2} \tag{5-5}$$

(2) $s\geq 2$ の場合

y_{n_i} が無いことを除いては $s=1$ とほとんど同様の手順で求める。その結果を以下に示す。

$$\hat{P}_0(\alpha)=\frac{(y_{d_1}-1)(y_{d_2}-1)+\alpha(\lambda/\mu)\,y_{d_1}y_{d_2}}{\alpha\{y_{d_1}y_{d_2}(\lambda/\mu)(\alpha+1)+(y_{d_1}-1\,(y_{d_2}-1)\}} \tag{5-6}$$

$$\hat{C}'(\alpha)=\frac{y_{d_1}y_{d_2}(y_{d_1}-1)(y_{d_2}-1)}{\alpha\{y_{d_1}y_{d_2}(1+\alpha)+(\mu/\lambda)(y_{d_1}-1)(y_{d_2}-1)\}} \tag{5-7}$$

$$\hat{L}_q(\alpha)=\frac{\hat{C}'(\alpha)(y_{d_1}+y_{d_2}-2)}{\{(y_{d_1}-1)(y_{d_2}-1)\}^2} \tag{5-8}$$

次に定常解を求める。 定常解は一般に過渡解を $f(\alpha)$ とすると良く知られたラプラス変換 $f=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{\alpha\to 0}\alpha f(\alpha)$ によって，左辺が有限ならば求まる。(5-1) 式に対応する方程式は

$$\lambda D_2 y^{s+2}+\lambda D_1 y^{s+1}-(\mu+\lambda)\,y^s+\mu = 0 \tag{5-9}$$

この方程式の零点で $|y|\leq 1$ を満足するものを $y_1, y_2, \cdots y_s$, $|y|>1$ を満足するものを y_{d_1}, y_{d_2} とする。なお $|y|\leq 1$ で1を含む s 個の零点を持つことの証明は省略する。
(3-7) 式の 分子$=0$ の方程式は $\lim_{\alpha\to 0}\alpha G(y,\alpha)$ の適用によって

$$\mu\sum_{n=1}^{s-1}P_{n,1}(y^s-y^n)+P_0(\lambda y^s\sum_{m=1}^{s}D_m+\lambda\sum_{n=s+1}^{\infty}y^n D_n-\lambda)+1=0 \tag{5-10}$$

もし，$s<M$ ならば上式に $y_1, y_2, \cdots y_s$ を代入して $P_{n,1}$, P_0 を求め (5-10) 式に代入し再び解いて $y_1, y_2, \cdots y_s$ 以外の零点 $y_{n_1}, y_{n_2}, \cdots y_{n_l}$, $l=M-s$ を求める。$\tau=\lambda t$ の正規化は $t\to\infty$ で $\tau\to\infty$ が成立するので定常解には影響を与えない。よって，一般に $f=\lim_{\alpha\to 0}\alpha\hat{f}(\alpha)=\lim_{\alpha\to 0}\alpha f(\alpha)$ が成立する。ここでは実際に数値計算を行なった P_0, L_q だけ示す。

(1) $s=1$ の場合

(5-2), (5-3), (5-5) 式から以下の式が得られる。

$$P_0=\lim_{\alpha\to 0}\alpha\hat{P}_0(\alpha)=\frac{y_{n_1}(y_{d_1}-1)(y_{d_2}-1)\mu}{\lambda y_{d_1}y_{d_2}(y_{n_1}-1)+\mu(y_{d_1}-1)(y_{d_2}-1)y_{n_1}} \tag{5-11}$$

$$C'=\frac{\lambda y_{d_1}y_{d_2}}{\mu y_{n_1}}P_0 \tag{5-12}$$

$$L_q=\frac{\{(y_{n_1}-1)(y_{d_1}+y_{d_2}-2)-(y_{d_1}-1)(y_{d_2}-1)\}C'}{\{(y_{d_1}-1)(y_{d_2}-1)\}^2} \tag{5-13}$$

(2) $s\geq 2$ の場合

(5-6), (5-7), (5-8) 式から同様にして求めると次式となる。

$$P_0=\frac{(y_{d_1}-1)(y_{d_2}-1)}{(\lambda/\mu)y_{d_1}y_{d_2}+(y_{d_1}-1)(y_{d_2}-1)} \tag{5-14}$$

$$C'=\frac{y_{d_1}y_{d_2}(y_{d_1}-1)(y_{d_2}-1)}{y_{d_1}y_{d_2}+(\mu/\lambda)(y_{d_1}-1)(y_{d_2}-1)} \tag{5-15}$$

$$L_q=\frac{C'(y_{d_1}+y_{d_2}-2)}{\{(y_{d_1}-1)(y_{d_2}-1)\}^2} \tag{5-16}$$

以上の数値計算には FACOM 230-60 を使用し，FORTRAN 言語を用いた。計算は総て倍精度で行ない零点を求める方程式の計算にはライブラリィで Bairstow 法による実係数高次代数方程式「BAIR 1 D」を用いた。ここで，過渡解では複素数 α が係数頂に含まれているが，ベルマンによる数値的逆ラプラス変換の手法[4),5)]では実数とみなして計算するので問題はない。定常解は式そのまま (逆変換しないで) の数値計算でよい。

計算実行時間は過渡解の場合，各々 15 個のデータ点による ($\hat{P}_0(\tau)-\tau$) 曲線，($\hat{L}_q(\tau)-\tau$) 曲線 1 組当りの実行時間は総ての零点の値も出力して約 640 ms である。定常解ではあるパラメータに対する P_0, L_q 1 組当たり，同じく総ての零点出力も含めて 64 ms である。

5.2 数値計算の結果と考察

定常状態では $L_q-\rho$ 曲線，過渡解として $L_q-\tau$ 曲線を示す。各図毎にグラフの点を表わす記号 ×, ○, ▲ に対応して各々グラフ 1, 2, 3 と各付け，それらの平均待ち行列長を L_{q1}, L_{q2}, L_{q3} 平均系長を L_1, L_2, L_3 とする。なお，各曲線を折れ線グラフで表わしている。

(1) 単一到着，集団サービス・モデル (図 1, 2, 3, 4)

先ず理論的に $L_{q2}>L_{q1}$ が成立することを示す。文献 7) の「§7 集団待ち行列」によると L_{q2} は次式で表わされる。

$$L_{q2}=2\rho'^2/\{1-4\rho'-2\rho'^2+(1+2\rho')\sqrt{1+4\rho'}\},\qquad (\rho'=\lambda/\mu<2) \tag{5-17}$$

モデル 1 はアーラン・モデルであるから

$$L_{q1}=\rho^2/(1-\rho)=\rho'^2/(4-2\rho') \tag{5-18}$$

$$L_{q2}-L_{q1}=\rho'^2[\{7+2\rho'^2-(1+2\rho')\sqrt{1+4\rho'}\}/[\{1-4\rho'-2\rho'^2+(1+2\rho')\sqrt{1+4\rho'}\}2(2-\rho')]] \tag{5-19}$$

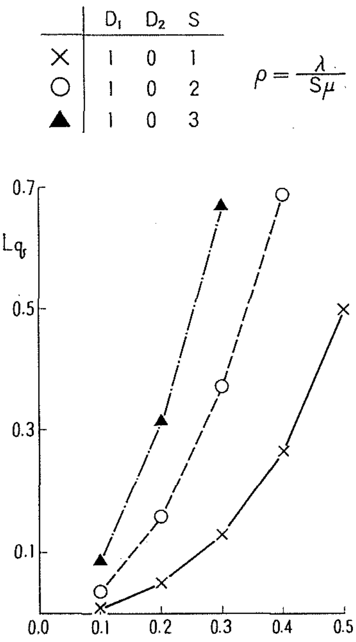

図 1

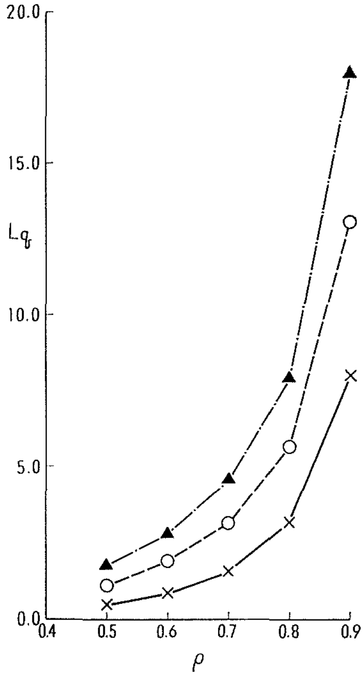

図 2

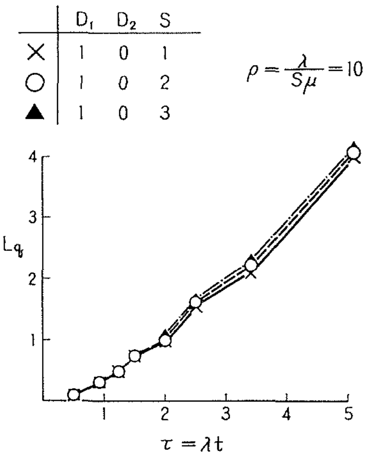

図 3

$0<\rho'<2$ から (5-19) 式の 分母>0 が成立する。$y=7+2\rho'^2-(1+2\rho')\sqrt{1+4\rho'}$ とおくと $dy/d\rho'=4\{\rho'\sqrt{1+4\rho'}-(1+3\rho')\}/\sqrt{1+4\rho'}$ となり $0<\rho'<2$ では $dy/d\rho'<0$ で y は ρ' に関して単調減少で $y|_{\rho'=2}=0$ から $0<\rho'<2$ で $y>0$ となる。よって $L_{q2}>L_{q1}$ が証明された。

検証のため，(5-17)，(5-18) 式に基づく値とモデル 1，2 による数値計算の結果とを比較したところ計算誤差の範囲内で完全に一致した（データは省略する）。

図 1，2 から明らかに $L_{q3}>L_{q2}>L_{q1}$ が成立し，一般に ρ 一定の場合，サービスの最大容量が大きい程，待ち行列長が長くなることを示している。また $\rho\to$大 に従って L_{q3}, L_{q2}, L_{q1} の間の相対的差が減少することが予想される（常に待ちを作っている状態では窓口は常に満パイである，このときサービス最大容量が 1 の平均サービス率 $k\mu$ のモデルと最大容量が k で μ のモデルとは事象に対しほとんど同じサービス率になるはずである）が，これは図 3，$\rho=10$ の過渡解で示される。図 3 の折れ線グラフには振動がみられるが，この現象は数値的逆ラプラス変換の手法に基因するもので図 4 のように ρ が小さい場合にはほとんど現われない。なお図 4 は $\rho=0.1$ に対する過渡解が定常解に無限に近づく様子を示している。

(2)　**集団到着，単一サービス・モデル**（図 5，6）

待ち行列系に存在する事象の平均値を L とすると $s=1$ の場合，到着形式に関係なく $L=L_q+\rho$ が成立することを示す。

$s=1$ の場合，系中に存在する事象が $n+1$ 個すなわち待ち事象が n 個である確率が $Q_n(1)$ であるから

$$L_q=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\,Q_{n-1}(1)=\sum_{n=1}^{\infty}nQ_{n-1}(1)-\sum_{n=1}^{\infty}Q_{n-1}(1)=L-(1-P_0)$$

$1-P_0$ は系に 1 個以上存在する確率でシステムの平均稼動率となるから平均トラヒック密度

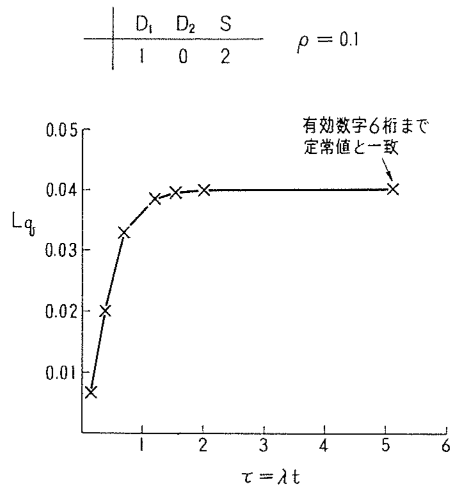

図 4

表 1

ρ \ L	L_1	L_2
0.1	0.1111……	0.1666………67
0.5	1.0000……	1.5000………00
0.9	9.0000……	13.5000………00

ρ に等しい。よって次式が成立する。

$$L = L_q + \rho \qquad (5\text{-}20)$$

文献 7) の §7 によれば集団到着が常に一定の集団容量 k で行なわれる場合（このモデルの系の長さの平均値を L とすると）次式が成立することが示されている。

$$L/L_1 = (k+1)/2 \qquad (5\text{-}21)$$

モデル 3 では $k=2$ であるから $L_3/L_1 = 3/2$ が成り立つはずであるが，数値実験の結果，表 1 に示すように完全に一致する。

図 5, 6 から $L_{q3} > L_{q2} > L_{q1}$ の関係があることが分る。これは事象に対する到着率を同じ（ρ 一定）にした場合，集団の平均容量（$\sum_{m=1}^{\infty} m D_m$）が大きい程，平均待ち行列長が長くなることを示している。

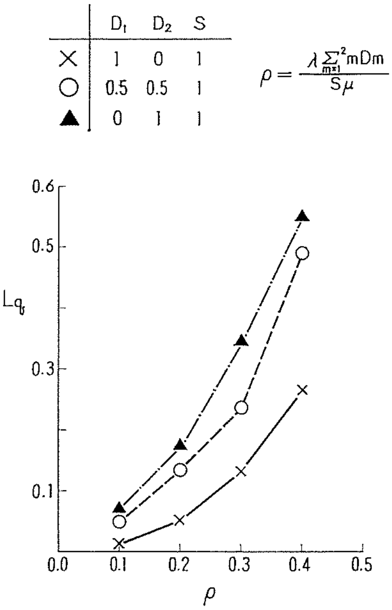

図 5

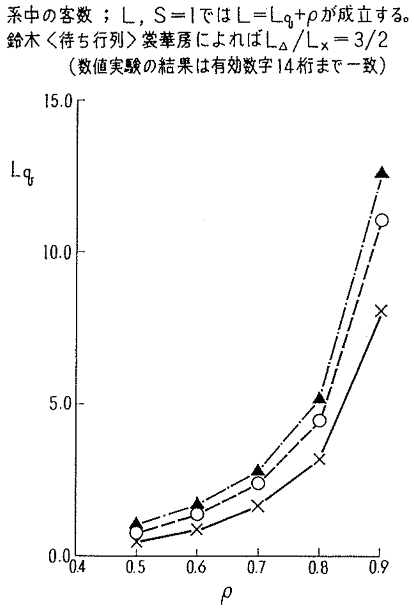

図 6

(5-20) 式からこの傾向は系の長さの平均についても成立する。

ρ が 1 に近づくに従って L_{q1}, L_{q2}, L_{q3} 間の相対的差は減少しているので (1) と同様にして ρ が 1 以上で常に待ちを作っている状態では到着形式に依存しなくなるため差が無くなることが考えられる。

以上 (1), (2) の結果からサービス形式，到着形式共に集団化しない方が望ましいことが分る。

(3)　集団到着，集団サービス・モデル (図 7, 8, 9)

3つのモデルの中，集団到着，集団サービス系はモデル2とモデル3で，しかもモデル3は流れる事象1個を2単位とした単一到着，単一サービス系 (アーランモデル) に帰着される。(1), (2) と同じように $\rho=\lambda\sum_{m=1}^{2}mD_m/s\mu$ を一定にしてこれら3つのモデルの比較を行なう。

図 7, 8 から平均待ち行列長に関して $0.1\leq\rho\leq0.6$ ではモデル3が一番短かく。$0.7\leq\rho\leq0.9$ ではモデル1が最も短かくなる。$\rho>0.9$ に対しては $\rho=0.9$ の大小関係のまま進むことが予想される。一方，モデル2は $0.1\leq\rho\leq0.5$ では中間に位置し，$0.6\leq\rho\leq0.8$ では最長，$\rho\geq0.9$ では再び中間となっている。(2) で得られた結果から分ったことは ρ 一定の場合，集団到着の平均容量を大きくする程，平均待ち行列の長さを長くすると言うことである，一方このモデルでは集団到着平均容量はモデル1＜モデル2＜モデル3の関係にあるが，$s=2$ のためむしろモデル3をアーランモデル ((2) のモデル1) に帰着して考えると，モデル2，モデル1はモデル3に対し，集団到着平均容量を逆に小さくしていった系とみなすことができる。その結果，$\rho\geq0.9$ では $L_{q3}>L_{q2}>L_{q1}$ が成立 ($\rho>0.9$ では予想) し，(2) の結果と矛盾しない。次に過渡解の例を図9に示す。

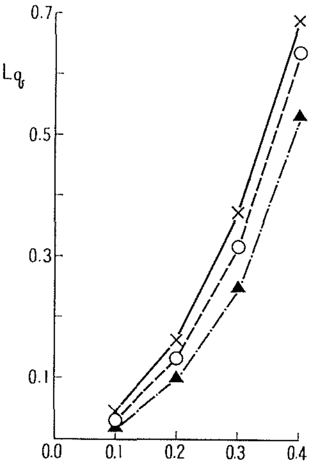

図 7

以上の結果は，ρ があらかじめ分っていて到着形式，サービス形式を選択できるようなシステムの設計に特に有用であると考える。

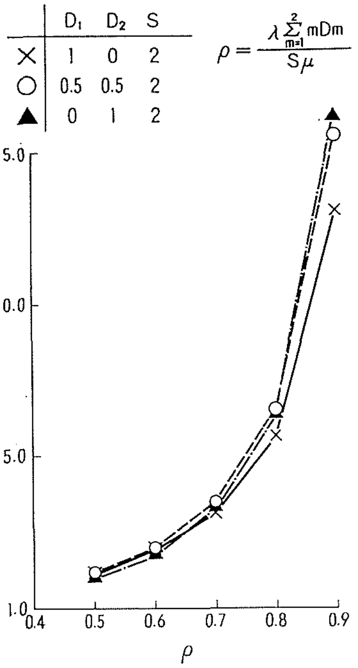

図 8

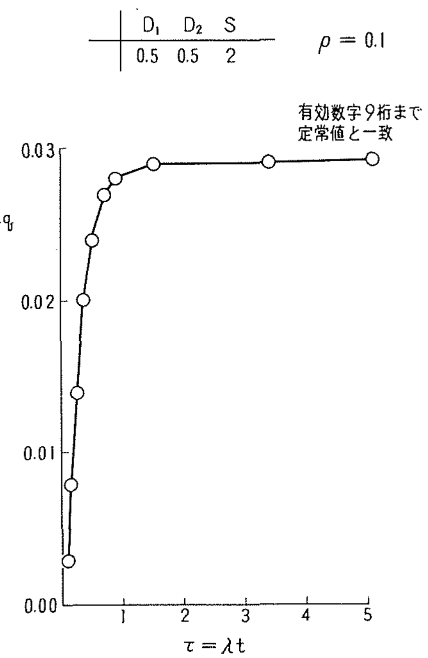

図 9

謝　　辞

本研究を進めるに当たり，御教示たまわった北大工学部電気工学科加地郁夫教授ならびに有益なご助言をいただいた北大工学部電気工学科山口忠講師に感謝いたします。また数値計算には北海道大学大型計算機センター FACOM 230-60 を使用しました。この点について関係各位に謝意を表明します。

参 考 文 献

1) Jaiswal, N. K.: "Time-Dependent Solution of the Bulk-Service Queuing Problem", Opns. Res., 8, 773-781, 1960.
2) Luchak, G.: "The Solution of the Single-channel Queuing Equations Characterized by a Time-Dependent Poisson-Distributed Arriral Rate and a General class of Holding Times" Opns. Res., 4, 711-732, 1956.
3) Jaiswal, N. K.: "Bulk-Service Quening Problem", Opns. Res, 8, 139-143, 1960.
4) Miller, R. G.: "A Contribution to the Theory of Bulk Quenes", J. Roy. Statist. Society, B, 21, 320-337, 1959.
5) Bellman, R. E., Kalaba, R. E. and Lockett, J.: "Numerical Inversion of the Laplace Transform" New York American Elsevier Publishing Company, Inc., 1966.
6) 二階堂, 加地: "数値的逆ラプラス変換によるアーラン模型の過渡解について", 北大工学部研究報告, 第69号, 39-49, 1973.
7) 鈴木: "待ち行列", 裳華房, 1972.
8) 加地郁夫: "システム工学", 朝倉書店, 1973.
9) 本間鶴千代: "待ち行列の理論", 理工学者, 1966.
10) 村尾 洋: "Batch Size が待ち呼数に応じて確率的に変化する Bulk Service Queue の解析", 経営科学, 第14巻, 第1号, 34-51, 1970.
11) Takeji Suzuki: "Batch-Arrival Queuing Problem", Journal of O. R. society of Japan, Vol. 5., Number 4, October, 1963.