北海道大学工学部研究報告
第78号（昭和51年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 78 (1976)

1次元テセレーションオートマトンにおける推移状相の基礎的性質

遠藤経一* 桃内佳雄* 河口至商*

（昭和50年6月30日受理）

Fundamental Properties of Shift Configuratinos on One-Dimensional Tessellation Automata

Tsunekazu ENDO Yoshio MOMOUCHI Michiaki KAWAGUCHI

(Received June 30, 1975)

Abstract

In this report, we study such configurations that are transformed by one-dimensional tessellation automata by satisfying the shift equivalence relation. Configurations having the above properties are defined as shift configurations on a parallel transformation. Shift configurations depend on some properties of a local transformation determining a parallel transformation. Hence, we discuss such properties of a local transformation at first, and then present the algorithm constructed by use of a graph, which decides whether there exist shift configurations on a parallel transformation or not.

1. まえがき

セル構造オートマントは，セルと呼ばれる同一構造の有限オートマトンを d 次元ユークリッド空間の格子点全体に規則的に配列し，その間を局所的に一様に連結したシステムである。各セルはその近傍と呼ばれるまわりのセルの時刻 t の状態の関数（局所変換）により時刻 $t+1$ の自分の状態を定める。そしてこの動作が時間的に同期して続けられて行く。ある時刻における全てのセルの状態を示すものを状相 (configuration) という。セル構造オートマトンは，入力として与えられた初期状相を各セルが局所変換により処理し，全体として状相を並列的に変換するシステムである。このセル構造オートマトンは，Von Neumann が自己増殖可能な機械が存在するか否かの問題を考える際のモデルとして採用して以来広く研究されてきた。Von Neumann により始められた特定の機能をもつセル構造オートマトンを構成するという合成問題[1)~3)]の他に，Moore に始まるセル構造オートマトンそのものの性質を解明しようとする解析問題[4)]も最近広く行われている。

Von Neumann, Moore のセル構造オートマトンは本質的に自律系である。それに対して，山田，Amoroso はセル構造オートマトンの状相の遷移の仕方が異なる並列変換を用いることにより時間的に変化しうるという意味で他律系といえるセル構造オートマトンを提案し，その性質

* 工学部情報数理工学第一講座

を解析的に調べた[5]。このモデルはテセレーションオートマトン (Tessellation automaton 以下 TA で表わす) と呼ばれる。現実に同じ演算回路を多数並べ，各回路に外部から命令語を与えて全体を制御する計算機が考えられているが，TA はこれのモデルと考えられる。

TA の解析的研究として，(1) パターンの生成能力[6]，(2) セルの接続構造と機能との間の関係[7] などの研究が行われている。特に状相の並列変換は状相全体の集合から，それ自身への写像であることから，この並列変換の写像としての性質（全射性，単射性）とパターンの生成能力との関連を中心として，1 次元 TA の研究が行われている。

本論文では，1 次元 TA による状相の並列変換において，ある不変性が保存される状相を推移状相として定義する。この推移状相のなかに並列変換の不動点（安定状相）を含める。ところで並列変換の全ての性質は，それを一意に定める局所変換の性質に依存する。したがって並列変換において推移状相が依存するか否かの問題は，それを定める局所変換のある種の性質を明確にすることに帰着する。本研究では，まずこの性質を明らかにし，次にそれに基づき任意の局所変換が与えられたとき，それにより定められる並列変換において推移状相が存在するか否かを決定するアルゴリズムを示す。

2. 1次元テセレーションオートマトン

この章では，1 次元 k 状態 TA の定義，および以下の議論に必要な基本的な定義を与える。

定義 2.1

1 次元 k 状態 TA　M^k（以下，1 DTA M^k と表わす）とは，次の 4 項列で定義されるシステムである。

$$M^k = (A, Z, X, I)$$

(1) A；状態アルファベット。TA を構成しているセルの状態の有限集合である。A の中に静止状態と呼ばれる特別な状態を含める。また以下の議論において状態を非負の整数で表現する。すなわち，$|A|=k$ ならば，$A=\{0, 1, 2, \cdots, k-1\}$（ここで，0 は静止状態を表わす）$|A|$ は集合 A の要素数を表わす。

(2) Z；整数全体の集合でセルの一次元的配列における座標を表わす。Z の要素 i に配置されたセルをセル i と呼ぶ。

(3) X；近傍型 (neighborhood index)。$X \in Z^n$，$X=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ で定義される互いに異なる n 個の整数からなる ($n \geq 1$)。これはセル間の一様の接続関係を表わす。次に写像 N_X は，N_X: $Z \longrightarrow Z^n$，$N_X(i)=(i+\alpha_1, i+\alpha_2, \cdots, i+\alpha_n)$ で定義される。$N_X(i)$ は，セル i がセル $(i+\alpha_1), \cdots$，セル $(i+\alpha_n)$ の n 個のセルを近傍としてもっていることを表わす。

(1), (2), (3) により 1 DTA を構成しているセルの状態集合，一様配列，および接続関係を定めた。図 2.1 に $X=(-1, 0, 1)$ の 1 DTA を示す。

次に変換機構を定める。

(4) 状相 c は，$c: Z \longrightarrow A$ で定義される写像である。これはある時刻において各セルがどの状態にあるかを示すものである。$c(i)$ は，状相 c におけるセル i の状態を表わす。状相全体の集

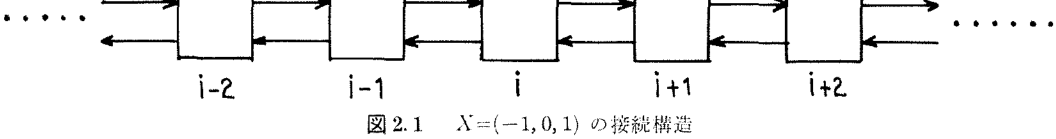

図 2.1　$X=(-1, 0, 1)$ の接続構造

合を C で表わす。近傍の状相 c^n は，状相 c におけるセル i の近傍 $N_X(i)$ の各セルの状態を表わす。すなわち，$c^n(N_X(i))=(c(i+\alpha_1),\ c(i+\alpha_2),\ \cdots,\ c(i+\alpha_n))$ である。

(5) 局所変換 $\sigma: A^n \longrightarrow A$。セルの状態遷移関数である。1 DTA の変換機構は局所変換で定められる。時刻 t において各セルは同一の局所変換により互いに同期して時刻 $t+1$ の自分の状態を定める。1 DTA が時刻 t に状相 c にあり，時刻 $t+1$ に c' になったとすれば，セル i の時刻 $t+1$ の状態 $c'(i)$ は次のように定められる。

$$\begin{aligned} c'(i) &= \sigma(c^n(N_X(i))) \\ &= \sigma(c(i+\alpha_1),\ c(i+\alpha_2),\ \cdots,\ c(i+\alpha_n)) \end{aligned}$$

(6) 並列変換 $\tau: C \longrightarrow C$ は，局所変換 σ により次のように一意に定められる。

$$\tau(c) = c' \Longleftrightarrow c': Z \xrightarrow{N_X} Z^n \xrightarrow{c^n} A^n \xrightarrow{\sigma} A$$

すなわち，任意の $i \in Z$ に対して，

$$c'(i) = \sigma(c(i+\alpha_1),\ \cdots,\ c(i+\alpha_n))$$

1 DTA では，各セルは局所変換により同期して状態遷移を行うが，そのとき状相は 1 DTA により並列変換されたと考える。局所変換全体の集合を L^k とする。L^k の空でない部分集合を J とすれば，J に属する各局所変換により一意に定められる並列変換の集合が I である。

状相の系列 $c_0, c_1, \cdots, c_k, \cdots$ が 1 DTA の並列変換による状相の系列であるとは，$\tau_j(c_i)=c_{i+1}$ $(i \geqq 0)$ かつ $\tau_j \in I$ であるときかつそのときに限る。

状相 c の support とは，$\sup(c)=\{i|c(i)\neq 0\}$ なる Z の部分集合である。$\sup(c)$ が有限集合であるとき，状相 c は有限状相であるという。有限状相の全体を C_F で表わす。任意の $c \in C_F$ に対して，$\tau(c)=c'$, $c' \in C_F$ であるための必要十分条件は τ を定める σ において，$\sigma(0, 0, \cdots, 0)=0$ である。このような局所変換全体の集合を $\bar{L}^k$ で表わす。それにより定まる並列変換の集合を $\bar{T}^k$ で表わす。

C_F の上の推移同値関係を次のように定める。2つの状相 $c_1, c_2 \in C_F$ が推移同値 $c_1 \simeq c_2$ であるとは，任意の $i \in Z$ に対して $c_1(i)=c_2(i+\beta)$ なる $\beta \in Z$ が存在するとき，かつそのときに限る。推移同値関係の同値類を有限パターンと呼ぶ。$[c]$ により有限状相 c からなる有限パターンを表わす。並列変換の定義より，$c_1 \simeq c_2$ ならば，$\tau(c_1) \simeq \tau(c_2)$ なる性質を並列変換はもっている。

3.　1次元 k 状態スコープ n TA と推移状相

セルの接続構造において近傍セルが互いに隣接し合っている近傍型をスコープ型近傍という。この近傍型をもつ 1 DTA のクラスを，1次元 k 状態スコープ n TA M_n^k（略して，1 DTA M_n^k）と呼ぶ。定義 2.1 より，$M_n^k=(A, Z, X_n, \bar{T}_n^k)$ と表わす。ここで，$X_n=(\alpha+1, \alpha+2, \cdots, \alpha+n)$，（$\alpha$ は，$-n \leq \alpha \leq -1$ の整数である）。$\bar{L}_n^k$ を，M_n^k の局所変換全体の集合とし，$\bar{T}_n^k$ は $\bar{L}_n^k$ により一意に定まる並列変換の集合とする。任意の近傍型をもつ 1 DTA M^k に対して，状相の並列変換に関して機能的に等価な 1 DTA M_n^k を構成することができることが知られている。したがって本論文では，1 DTA M_n^k のクラスを考察の対象とし，M_n^k による有限状相の並列変換について考察する。すなわち，並列変換 τ は，$\tau: C_F \longrightarrow C_F$ とする。M_n^k による有限状相の並列変換に関して，その定義から次の補題が成立する。

〔補題 3.1〕

任意の $c \in C_F$, $\tau \in \bar{T}_n^k$ に対して，$c'=\tau(c)$ とする。このとき c において，$c(i)=0$ なる最右端

のセルを i_R とし，同様に最左端のセルを i_L とするとき，並列変換された状相 c' において，$i \leq i_L - \alpha - n - 1$ または $i \geq i_R - \alpha$ なる任意の $i \in Z$ に対して，$c'(i)=0$ である。また $\lg(c') \leq \lg(c)+(n-1)$ である。ただし，$\lg(c)=i_R-i_L+1$ で有限状相の長さである。

（証　明　略）

1 DTA　M_n^k による状相の並列変換において，単に右，あるいは左に推移するだけで内容的に不変に保たれる状相が存在する場合がある。これを推移状相として定義する。

定義 3.1

T_n^k に属する並列変換 τ に対して，$\tau(c)=c'$ とする。このとき，任意の $i \in Z$ に対して，$c'(i+\alpha)=c(i)$ なる $\gamma \in Z$ が存在するとき，有限状相 c は並列変換 τ における γ 推移状相であるという。特に $\gamma=0$ のとき，c は並列変換 τ における不動点（安定状相）であるという。（ただし以下の議論では，全てのセルが静止状態である状相は除く）

推移状相とは，推移同値関係ををみたしながら変換される状相である。さらに並列変換の性質より，c が γ 推移状相ならば，c と推移同値な状相はすべて γ 推移状相である。補題 3.1 より次の補題を得る。

〔補題 3. 2〕

T_n^k に属する並列変換による状相の変換において γ 推移状相が存在するならば，$(-\alpha-n) \leq \gamma \leq (-\alpha-1)$ である。

（証　明　略）

1 DTA の変換機構から，ある並列変換が推移状相をもつのは，それを一意に定める局所変換の性質の反映であると考えられる。そこで $\bar{L}_n^k$ に属する局所変換の定義域 A^n の部分集合 P_s^σ を次のように定める。

$$P_s^\sigma = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | \sigma(a_1, \cdots, a_3, \cdots, a_n)=a_s\} \qquad (1 \leq s \leq n)$$

このとき，P_s^σ の要素に関して次のことが成立する。ある有限状相を c とする。$c'=\tau(c)$ とすれば，$(c(i+\alpha+1), \cdots, c(i+a+n)) \in P_s^\sigma$ なる i が存在すれば，$c'(i)=c(i+\alpha+s)$ である。

定義 3.2

A^n の空でない部分集合 X の要素のみからなる有限状相 c とは，任意の $i \in Z$ に対して，$(c(i+1), c(i+2), \cdots, c(i+n)) \in X$ である状相をいう。

〔補題 3. 3〕

1 DTA　M_n^k において，$\bar{L}_n^k$ に属する局所変換 σ により一意に定められる並列変換 τ による状相の変換において，γ 推移状相 c が存在するならば，c は P_s^σ の要素のみからなる状相である（ここで $s=-\alpha-\gamma$）。逆に P_s^σ の要素のみからなる状相 c が存在するならば，c は局所変換 σ により一意に定められる並列変換 τ による状相の変換における γ 推移状相である（ここで $\gamma=-\alpha-s$）

［証　　明］

並列変換 τ と γ 推移状相の定義より，任意の $i \in Z$ に対して

$$\begin{aligned} c'(i) &= \sigma(c(i+\alpha+1), c(i+\alpha+2), \cdots, c(i+\alpha+n)) \\ &= c(i-\gamma) \end{aligned}$$

補題 3.2 より，$(-\alpha-n) \leq \gamma \leq (-\alpha-1)$ である。したがって $(i+\alpha+1) \leq i-\gamma \leq (i+\alpha+n)$ である。すなわち，$c(i-\gamma)$ は，$(c(i+\alpha+1), \cdots, c(i+\alpha+n))$ の何番目かの成分に等しい。

s 番目の成分に等しいとすれば，$c(i-\gamma)=c(i+\alpha+s)$。$s=-\alpha-\gamma$ となる。

したがって $(c(i+\alpha+1), \cdots, c(i+\alpha+n)) \in P_s^\sigma$。よって任意の $i \in Z$ に対して，

$c((i+1), \cdots, c(i+n)) \in P_s^g(s=-\alpha-\gamma)$ である。

逆は P_s^g の要素の性質より成立する。

4. 系列グラフ

1DTA M_n^g において，$\bar{L}_n^k$ に属する局所変換により定められる並列変換により変換される状相は，系列グラフで表現される系列に対応づけることができる。まず以下の議論で用いるグラフの定義から始める。

定義 4.1

グラフ G とは，$G=\langle N, \Gamma, \zeta\rangle$ の3項列である。N は節点の集合。Γ は弧の集合。ζ は，$\zeta: \Gamma \longrightarrow N\times N$ の写像である。Γ の各要素は N の2点を結ぶ有向弧であり，ζ はその接続関係を表わす。すなわち $z\in \Gamma$ に対して $\zeta(z)=(u, v)$ であるとき，かつそのとき限り，z は u から v へ向う有向弧である。このとき，u を z の始点，v を z の終点という。グラフ G に対して長さ p の有向路 μ とは，弧の系列 $\mu=z_1, z_2 \cdots z_p$ で全ての $1\leq i\leq p-1$ に対して，z_i の終点が z_{i+1} の始点に等しいものをいう。このとき，z_1 の始点を μ の始点，z_p の終点を μ の終点という。有向路 μ の始点と終点が等しいとき，μ は有向閉路であるという。グラフ $G=\langle N, \Gamma, \zeta\rangle$ と $\Gamma'\subseteq\Gamma$ に対して N' は Γ' に属する弧の始点と終点とを全て集めた集合とする。ζ の定義域と値域を制限して写像 $\zeta': \Gamma' \longrightarrow N'\times N'$ が得られる。グラフ $G'=\langle N', \Gamma', \zeta'\rangle$ は Γ' によって生成されたグラフ G の部分グラフという。

このグラフの定義を用いて，1DTA M_n^k の局所変換の定義域 A^n により生成される系列グラフ $G_n(A^n)$ を定義する。まず3つのオペレーター $\partial_r, \partial_l, \theta$ を定める。任意の $a\in A, x\in A^*$ に対して，$\partial_r(ax)=x$, $\partial_l(xa)=x$。$x, y\in A^*$ に対して，$x=\partial_l(w)$ かつ $y=\partial_r(w)$ である w が存在するときかつそのときに限り，$\theta(x, y)=w$ と定義する。さらに θ を，系列の列 $x_1, x_2, \cdots, x_m(m\geq 3)$ に対して，$\theta(x_1, x_2, \cdots, x_m)=\theta(\theta(x_1, \cdots, x_{m-1}), \theta(x_2, \cdots x_m))$ と定義する。

定義 4.2

グラフ $G_m(A^n)$ を次のように定める。

$$G_n(A^n) = \langle A^{n-1}, A^n, \zeta\rangle$$

ただし，任意の $x\in A^*$ に対して，$\zeta(x)=(\partial_l(x), \partial_r(x))$ とする。$G_n(A^n)$ を A^n により生成される長さ n の系列グラフという。系列グラフ $G_n(A^n)$ における長さ p の有向路 $\mu=x_1x_2\cdots x_k$ に対する系列を，$\theta(\mu)=\theta(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ と定める。特にグラフの節点あるいは弧であることを示めすたに，$\langle x\rangle$ という記述をする。すなわち $\langle x\rangle$ は x というラベルが付けられた弧あるいは節点を表わす。

系列グラフの構成法から1DTA M_n^k により並列変換される有限状相 c は，長さ n の系列グラフ $G_n(A^n)$ において，$\langle 0^{n-1}\rangle$ を始点とし，かつ終点とする有向閉路 μ に対する系列 $\theta(\mu)$ に対応づけることができる。すなわち $[c]=\bar{0}a_1a_2\cdots a_m\bar{0}$ に対して，$\theta(\mu)=0^{n-1}a_1a_2\cdots a_m0^{n-1}$ を対応づけることができる。ここで $a_1, a_m\neq 0, \bar{0}$ は右および左へ続く0の無限系列を表わす。

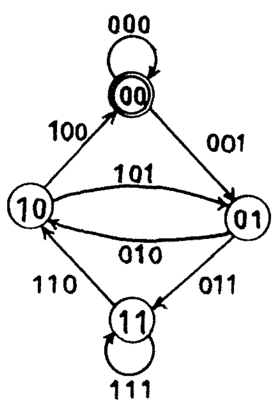

図 4.1　$G_3(A^3)$, $A=\{0.1\}$

定義 4.3

A^n の空でない部分集合 X により生成される系列部分グラフ $G_n'(X)$ は，

$$G'_n(X) = \langle N', X, \zeta' \rangle$$

と定める。ここで X は有向弧の集合である。N' は節点の集合で，$N' = \partial_l(X) \cup \partial_r(X)$ ($\partial_r(X) = \{\partial_r(x) | x \in X\}$，$\partial_l(X) = \{\partial_l(x) | x \in X\}$)。$\zeta'(x) = (\partial_l(x), \partial_r(x))$ であり，$x \in X$ であるときかつそのときに限り，$\partial_l(x)$ から $\partial_r(x)$ へ有向弧 x が引かれる。

系列部分グラフの構成法と状相と系列の対応関係から次の補題が成立する。

〔補題 4.1〕

A^n の空でない部分集合 X の要素のみからな有限状相が存在するための必要十分条件は，X により生成される系列部分グラフ $G'_n(X)$ において，$\langle 0^{n-1} \rangle$ を始点としかつ終点する有向閉路が存在することである。

(証　明　略)

補題 3.3 と補題 4.1 から次の定理を得る。

〔定理 4.1〕

1 DTA　M_n^k において，$\overline{L}_n^k$ に属する任意の局所変換 σ が与えられたとき，その局所変換 σ により一意に定められる並列変換 τ による有限状相の変換において γ 推移状相が存在するための必要十分条件は，P_s^σ により生成される系列部分グラフ $G'_n(P_s^\sigma)$ ($s = -\alpha - \gamma$) において，$\langle 0^{n-1} \rangle$ を始点とし，かつ終点とする有向閉路が存在することである。

〔系 4.1〕

P_s^σ により生成される系列部分グラフ $G'_n(P_s^\sigma)$ において，$\langle 0^{n-1} \rangle$ を始点とし，かつ終点とする有向閉路 μ が存在するならば，μ に対する系列 $\theta(\mu)$ に対応する全ての有限状相 $c([c] = \bar{0}\theta(\mu)\bar{0})$ は，σ により一意に定められる並列変換 τ における γ 推移状相 ($\gamma = -\alpha - s$) である。

定理 4.1 のアルゴリズムを使った解析例を示す。

[例]

1 DTA　$M_3^3 = (\{0, 1, 3\}, Z, X_3, \overline{T}_3^3)$

$$X_3 = (-1, 0, 1)$$

表 4.1 で定められる局所変換 $\sigma \in \overline{L}_3^3$ について系列部分グラフを構成し，γ 推移状相を求める。系列部分グラフ $G'_3(P_1^\sigma)$, $G'_3(P_2^\sigma)$, $G'_3(P_3^\sigma)$ を図 4.2 に示し，推移状相の変換例を示す。

表 4.1　局所変換 $\sigma : A^3 \longrightarrow A$

0	0	0	0	1	1	2	1
0	0	1	0	1	2	0	2
0	0	2	2	1	2	1	0
0	1	0	1	1	2	2	1
0	1	1	0	2	0	0	0
0	1	2	1	2	0	1	2
0	2	0	2	2	0	2	0
0	2	1	1	2	1	0	2
0	2	2	2	2	1	1	1
1	0	0	1	2	1	2	1
1	0	1	0	2	2	0	0
1	0	2	2	2	2	1	2
1	1	0	2	2	2	2	1
1	1	1	0				

(1)　$P_1^\sigma = \{000, 001, 011, 100, 112, 122, 201, 210, 221\}$

$$[c] = \bar{0}11221000011221001122100\bar{0}$$

$$[\tau(c)] = \bar{0}01122100001122100112210\bar{0}$$

(2)　$P_2^\sigma = \{000, 001, 010, 012, 020, 022, 101, 112, 120, 200, 202, 211, 212, 221\}$

$$[c] = \bar{0}1012001012001010101 20\bar{0}$$

$$[\tau(c)] = \bar{0}101200101200101010120\bar{0}$$

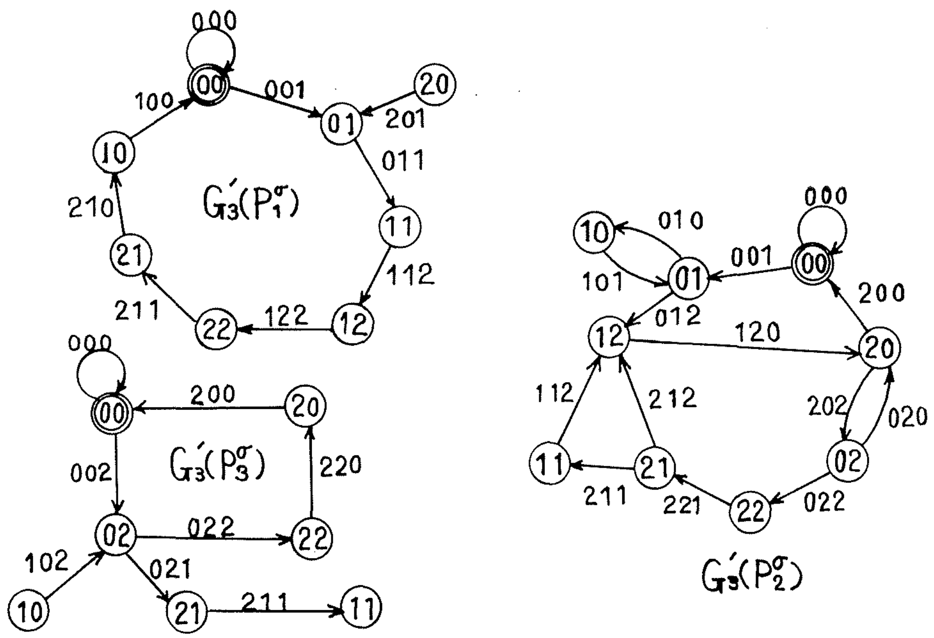

図4.2　系列部分グラフ

(3)　　$P_3^{\sigma} = \{000,\ 002,\ 022,\ 102,\ 200,\ 211,\ 220\}$

$$[c] = \bar{0}0220002200000220002 2\bar{0}$$

$$[\tau(c)] = \bar{0}2200022000002200022 0\bar{0}$$

5. あとがき

1DTAによる状相の並列変換において推移同値関係をみたしながら変換される状相の考察を行ない，並列変換の性質に対する研究の一つの基礎を与えた。本論文では，個々の並列変換だけに着目したが，TAでは異なる並列変換の有限系列により状相の変換を行なう。したがって並列変換の有限系列の性質を研究することは，TAのパターンの生成能力を知る上で重要である。例えば，推移状相をもたない2つの異なる並列変換 τ_1, τ_2 の合成変換 $\tau_1\tau_2$ において推移状相が存存することがある。このことより本研究の立場から並列変換の集合の構造的研究が可能ではないかと考えられる。今後，本研究の結果を基礎とし，さらに並列変換の性質を研究して行くつもりである。

2DTAのパターンの生成能力の研究は，図形の並列処理との関連から重要であると考えられる。しかし現在2DTAの並列変換の性質を研究する方法が確立されていない。これも1DTAの基礎的研究を通して可能ではないかと考えられる。

参考文献

1) Von Neumann, J.: Theory of Self-Reproducing Automata (1966), Univ. of Illinois press.
2) Codd, E. F.: Cellular Automata (1968), Academic Press.
3) Smith III, A. R.: J. ACM., 18 (1971), p. 339-353.
4) Moore, E. F.: Proc. Am. Math. Soc., 14 (1962), p. 17-33.
5) Yamada, H and Amoroso, S.: Information & Control, 14 (1969), p. 299-317.

6) Yamada, H and Amoroso, S.: JCSS, 4 (1970).
7) Yamada, H and Amoroso, S.: Information & Control, 18 (1971), p. 1-31.
8) 那須, 本多: 電子通信学会オートマトンと言語研資 AL 74-34 (1974-11).