



Title	ベルジェロン法によるN字型非線形能動素子を含む分布定数線路の過渡解析
Author(s)	吉田, 則信; Yoshida, Norinobu; 深井, 一郎 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 78, 33-39
Issue Date	1976-02-16
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41332">https://hdl.handle.net/2115/41332</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	78_33-40.pdf



## ベルジェロン法による N 字型非線形能動 素子を含む分布定数線路の過渡解析

吉田 則信\* 深井 一郎\*\* 福岡 醇一\*

(昭和 50 年 6 月 30 日受理)

### Transient Analysis of Distributed Line Containing N-type Nonlinear Active Elements by Bergeron Method

Norinobu YOSHIDA Ichiro FUKAI Jun-ichi FUKUOKA

(Received June 30, 1975)

#### Abstract

For numerical analysis of the time response of large signals in distributed lines containing N-type nonlinear active elements, we formulated Bergeron's Method to treat the time response as DC level changes at every time step.

The impedance characteristics of distributed lines and reactance elements were expressed as the characteristic lines in V-I plane, and the nonlinear conductance of an active element was approximated as a piece-wise linear line.

These expressions made it possible to transfer the circuit equations to the algebraic equation and to solve them by use of the method of load lines.

Under the above consideration, we made the analysis program and analyzed the active line as an example. The computed results clearly showed the threshold characteristics in the amplification process of the active line.

#### 1. ま え が き

近年の N 字型非線形素子を用いた高速パルス技術の進歩は著しいものがあり、それにつれて回路設計に際しての直流レベル解析や過渡応答解析がますます重要なものとなってきた。しかし高周波領域においては回路中の線路が分布定数線路として働き、特性インピーダンスや伝播定数を解析に取り入れることが必要となる。又負荷素子の寄生リアクタンスも無視できなくなる。さらに大振幅入力の場合には負荷素子の非線形性や負性抵抗特性が波形変化や安定性に重要な影響を与える。これらの条件は直流レベル変動から高周波領域の過渡応答まで、大振幅入力に対する一貫した数値解析手法を求めると非常に困難にしている。本論文は時間応答を直流レベル変動の合成されたものと考えることにより、現象の時間的速さにかかわらず分布定数線路と N 字型非線形特性素子を含む回路を統一的に解析する手法について述べるものである<sup>1),2)</sup>。この為

\* 工学部電気工学科 電気磁気学講座

\*\* 工学部電気工学科 電気回路学講座

に三つの効果的な手法を用いた。まず第一に分布線路を線路特性と負荷素子の時定数、入力信号変化等に関連し、求める時間応答の精度に応じた伝播時間  $\Delta t$  を持つ微小距離で区分化する。各区分は特性インピーダンス、伝播時間、減衰定数を持つ独立の線路として扱い、その入出力端子の電圧電流を用いて差分化した伝送方程式が定められる。次の方法は負荷リアクタンスの等価抵抗と等価電源を用いた等価回路表示である。これはリアクタンスの電圧電流の関係を示す積分式より台形近似を用いた差分方程式により導かれる。以上二つの方法は“Bergeron Diagram”を定式化し、過渡現象を微小時間間隔における直流レベル変動の合成されたものとして近似を行うものである。第3の方法は非線形能動素子のコンダクタンス特性の折線近似である。これにより測定データを直接的にシミュレーションプログラムの入力データとして用いることができ、近似精度もサンプリング点数とその間隔から容易に評価できる。これらの手法によって線路の伝送方程式は差分方程式化され、非線形素子負荷点の非線形微分方程式は部分線形な代数方程式に変換される。これにより安定不安定条件は非線形素子の負コンダクタンスと線路及びリアクタンスを見込んだ等価コンダクタンスの大小により容易に判別が可能となる。

上述の基本的な考察のもとに N 字形非線形能動素子を含む分布定数線路の大振幅信号入力をも扱うことの可能な時間応答の解析プログラムを作製し、例題としてトンネルダイオードと分布定数線路より構成される能動線路のパルス応答について解析を行い、ダイオードの N 字型非線形特性による振幅の急激な変化、リアクタンス成分による波形変動の様子のシミュレーション結果を得たので報告している。

## 2. 分布定数線路の取り扱い

変数  $v, i$  を電圧電流のスカラール量とし  $z$  を座標とする一次元線路の伝送方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} &= R(z) i(z, t) + L(z) \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \\ -\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} &= G(z) v(z, t) + C(z) \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで  $R(z), L(z), G(z), C(z)$  は単位長当りの抵抗、インダクタンス、コンダクタンス、容量とする。上式に“Bergeron Method”<sup>3)</sup>を適用し任意時間間隔でのレベル変動解析を行うに効果的な差分方程式を求めるために次の考慮をほらう。すなわち電圧電流をその時間間隔中で一定と近似しうる。系の時定数及び信号の変化時間より十分短い伝播時間  $\Delta t$  を持つ長さ  $\Delta z$  で線路を区分化する。各区分線路はベルジェロン法に用いられる性特インピーダンス  $\rho$ 、伝播時間  $\Delta t$ 、さらに減衰係数  $\alpha$  を持つ独立な線路として働き、そのカスケード接続として全体の線路特性が決定される。各区分線路毎に両端から見込んだインピーダンスを境界条件とし、両端の電圧電流値を初期条件として、 $\Delta t$  時間後の電圧電流値をベルジェロン法による線路の特性曲線と負荷線の交点を求める手法により計算する。上述の条件を満たす差分方程式として次式を与える<sup>4)</sup>。 $n$  を線路の区分数、 $k$  を  $k$  番目の区分点番号として

$$\begin{aligned} v_k(t) + \rho_{k-1} i_k(t) &= \alpha_{k-1} v_{k-1}(t - \Delta t) + \alpha_{k-1} \rho_{k-1} i_{k-1}(t - \Delta t) & 2 \leq k \leq n+1 \\ v_k(t) - \rho_k i_k(t) &= \alpha_k v_{k+1}(t - \Delta t) - \alpha_{k-1} \rho_k i_{k+1}(t - \Delta t) & 1 \leq k \leq n \end{aligned} \quad (2)$$

ここで  $k$  番目の区分点の座標を  $z_k$ 、区分距離を  $\Delta z_k$  とすると、特性インピーダンス  $\rho_k$ 、伝播時間  $\Delta t$ 、減衰係数  $\alpha_k$  はそれぞれ次式で与えられる。

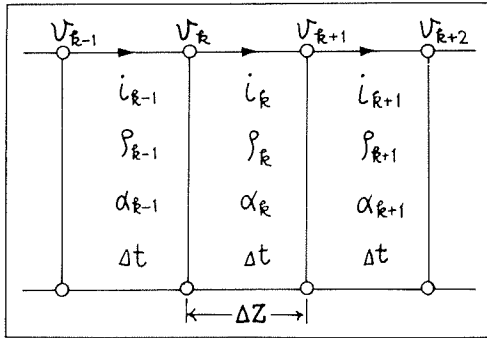


図 1 分布定数線路の区分表示

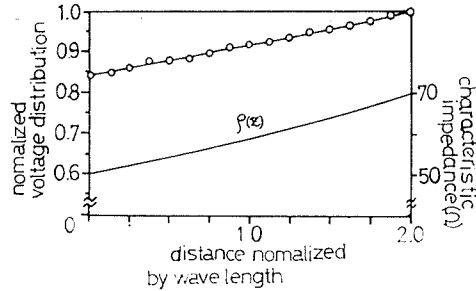


図 2 指数関数線路の定常電圧振幅分布  $\rho(z) = \rho_0 \exp(\hat{\alpha}z)$  線路長 = 2 波長  
— 解析的 ○ 本手法

$$\begin{aligned} \rho_k &= \sqrt{\frac{L(z_k)}{C(z_k)}} \\ \Delta t &= \sqrt{L(z_k) \cdot C(z_k)} \\ \alpha_k &= (1.0 - \sqrt{R(z_k) G(z_k)}) \Delta z_k \end{aligned} \tag{3}$$

Bar 記号はその区間での平均値を表わす。図 1 に線路の区分表示を示している。線路特性が不均一な場合に対する本手法の妥当性の検討の為の一例として、特性インピーダンスが指数関数的に変化している場合の正弦波入力時の線路上の電圧の振幅分布の定常解を本手法と解析的手法<sup>9)</sup>でそれぞれ計算を行った。結果を図 2 に示す。本手法で計算の際には線路分割数  $n$  を 40 とした。1% 以下の精度で一致することが確かめられた。

又複数の線路を含む系を扱う場合、本手法のように差分的定式化を行う際には差分時間  $\Delta t$  に対応した区分距離で各線路を整数比に分割することが不可能になることが生ずる。その際には今求める近似精度を満足するに十分な時間間隔で線路の分割を行い、端数部分は等価的集中定数回路で表現し、解決することが可能である。

### 3. リアクタンス素子の取り扱い

本解析手法では分布線路に負荷される独立素子としてのリアクタンスはもちろん、非線形抵抗素子等の寄生リアクタンス等もすべて独立な回路素子として扱い、負荷点の電圧電流値はそれに接続する線路の差分方程式と負荷各素子の電圧電流式の合成で得られる回路方程式を解くことで得られる。線路方程式をベルジェロン法を適用するため伝播時間  $\Delta t$  に対応して空間的に区分化を行った対応して、インダクタンス及びキャパシタンスも時間に対して積分式で与えられる電圧電流式を  $\Delta t$  時間ごとのレベル変動として扱えるよう、台形近似を用いて次のように差分化を行い等価回路表示を行う<sup>5)</sup>。インダクタンスに対しては  $v_L$  を端子間電圧、 $i_L$  を電流、 $L$  をインダクタンス、 $\Delta t$  を差分時間間隔、 $t$  を時間として基本式

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{t-\Delta t}^t v_L(\tau) d\tau + i_L(t-\Delta t)$$

より  $R_L = 2L/\Delta t$  を等価抵抗、 $I_L(t)$  を並列等価電流源として次式を得る。

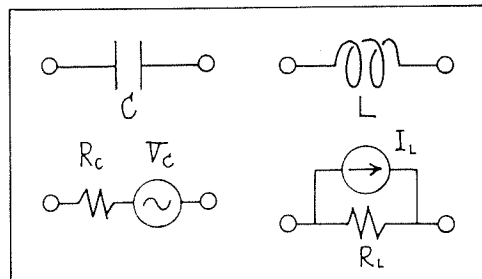


図 3 容量及びインダクタンスの等価回路表示

$$\begin{aligned}
 i_L(t) &= i_L(t-\Delta t) + \frac{1}{R_L} v_L(t-\Delta t) + \frac{1}{R_L} v_L(t) \\
 &= I_L(t) + \frac{1}{R_L} v_L(t)
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

同様にキャパシタンスに対しても  $v_C$  を端子電圧,  $i_C$  を電流,  $C$  をキャパシタンスとして次式を得る。

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t-\Delta t}^t i_C(\tau) d\tau + v_C(t-\Delta t)$$

より  $R_C = \Delta t / 2C$  を等価抵抗,  $V_C(t)$  を直列等価定電圧源として次式を得る。

$$\begin{aligned}
 v_C(t) &= v_C(t-\Delta t) + R_C i_C(t-\Delta t) + R_C i_C(t) \\
 &= V_C(t) + R_C i_C(t)
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

上式で与えられた等価回路を図3に示す。  $R_L$  及び  $R_C$  はベルジェロン法における容量及びインダクタンスの特性線と等しい。

#### 4. 非線形抵抗素子の取り扱い

分布定数線路に負荷される抵抗素子特性を電流を独立変数とし抵抗曲線として扱うか, 電圧を独立変数としコンダクタンス曲線と表示するかは, 線形又は単調曲線で表わされる場合はどちらも問題を生じず, 単に回路方程式の構成の仕方できるが, 例えばトンネルダイオードのようにN字型負性抵抗特性を持つ素子の場合には, 電圧に対しては電流は一価関数として与えられるが, 電流に対しては電圧は一義的に定まらず, 数値解析に際して困難を生ずる。本手法ではN字型非線形抵抗の場合にはその電圧電流が一価関数で示されるよう独立変数を決定することを必要とする。又その特性は離散的測定点を直線によって内挿及び測定範囲は外挿して得られる折線表示を用いた。これにより近似精度はサンプル点の数, 間隔で容易に調整できると同時に, 測定データを直ちに解析プログラムの入力データとして用いることができる。図4に例題の計算に用いた電圧を独立変数にし, 折線近似されたトンネルダイオードの非線形コンダクタンス特性を示す。図中下部の番号は上は区間番号, 下は正負のコンダクタンス領域を明示する。

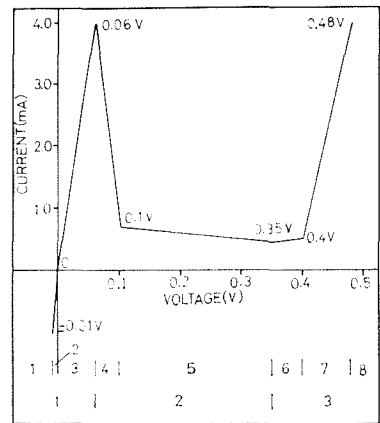


図4 解析に用いたトンネルダイオードの折線表示

#### 5. 数値計算法と解析プログラム

以上本解析手法に用いる各素子及び分布線路の取り扱い方について述べたが次に, それらを用いて数値計算を行う際の問題, 特に素子特性がN型で負性抵抗が存在する場合の解の一義性と安定度について考察を加える必要がある。分布定数線路は区分化され無ひずみ線路の場合, 各区分化された線路の特性インピーダンスは純抵抗の次元を持ち, 各リアクタンス素子は等価抵抗と, 等価定電圧あるいは定電流源に変換された結果, 負荷素子点における解を求めることはベルジェロン法における電圧電流平面で純抵抗次元の線路の特性曲線と同じく純抵抗次元の負荷の特性曲線の交点で解が求まることと等価になり, 数値解析では定電圧源又は定電流源を含む非線形

抵抗回路網の非線形代数方程式を解くことに対応づけられる。トンネルダイオードのように負性抵抗領域を持つ N 字型非線形素子の場合、数値計算の結果求めた解が負性抵抗領域に存在する時、物理的に安定な解であるかどうかの判別が重要であり、その際本手法の線路インピーダンス、リアクタンスを含めた抵抗次元の特性曲線の交点で解が決定される方法は有効な判別条件を与える。すなわち解の存在する負性抵抗領域の折線の勾配より求まる負コンダクタンスの絶対値  $|G_n|$  と負性抵抗素子より回路を見込んだ時の等価コンダクタンス  $G_e (>0)$  を比較し、回路の発振条件より  $G_e \geq |G_n|$  の時は安定解、 $G_e < |G_n|$  の時不安定解と決定することができる。特に非線形負性抵抗素子に並列して容量  $C$  が接続している場合、このことは全ての素子に接合容量あるいは寄生容量として存在しているが、(5) 式の  $R_C$  の定義より常に  $G_C (=1/R_C)$  は  $\Delta t$  を小さくすることにより  $G_C > \max |G_n|$  の安定条件を満たすよう  $\Delta t$  を選ぶことが可能であり安定な数値解析が可能である。

本解析手法では上述の非線形代数方程式を数値解析する方法として非線形関数を折線表示した時有効である修正された Newton-Raphson 法<sup>6),7)</sup> を用いた。この方法の特徴は連続関数の時必要とする非線形関数の導関数のかわりに、折線特性の各区間の勾配を用いることであり、値は特性の各サンプル点間の勾配として容易に求められ、又出発値と収束値が同一区間に存在する時は線形代数方程式を解いたこととなり、真の解に収束したことになる。しかしこの方法のみでは N 字形非線形特性を含む場合、特に直流レベル解析のために  $L$  及び  $C$  を取り去った時や、計算の能率上  $\Delta t$  を余り小さくしないで時間応答を求める時などでは上述の安定条件は必ずしも満足されず、安定解を求めることは不可能となる場合が生ずる。このような時でも物理的に意味のある解を求めるために、文献(2)に述べてある付加プログラムを加えている。

## 6. 解析結果

作製したプログラムを用いて分布定数線路とトンネルダイオードより構成される能動線路<sup>8)</sup> のパルス応答を解析した。能動線路は図5に示す構成の能動素子を線路に多段接続したものである。能動素子の基本的特性は入力電圧の振幅によって増幅作用にしい値特性を持つことである。ほかに図に示されている分岐線路の終端からの反射波と2つのダイオード間の多重反射を利用しての不応期特性なども知られているが、本解析では岐線の終端は線路インピーダンスと整合をとり、入力パルス幅は能動素子内部の反射が影響を与えない時間幅におさえ、純粋な透過進行パルスの波形変動のシミュレーションを行った。用いた分布線路は特性インピーダンス  $50 \Omega$ 、トンネルダイオード特性は図4を用い、バイアス電圧は  $30 \text{ mV}$  である。

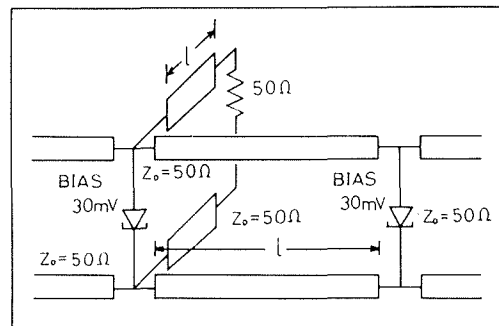


図5 解析に用いた能動素子

図6に線路と非線形コンダクタンス特性から直流レベル解析を行った結果を示す。能動素子段数の増加につれてしい値特性の効果が顕著になり台形入力波が矩形波に収束していく様子が示されている。この結果よりこの能動線路の増幅作用を持つ範囲はほぼ  $90 \text{ mV}$  から  $180 \text{ mV}$  と推定できる。図7以降はダイオードのリード線抵抗、インダクタンス及び接合容量を考慮して計算を行ったものである。図7に能動素子一段の場合について、各定数の間の関係が振動条件を与えている時に、入力信号の立ち上り時間にかか

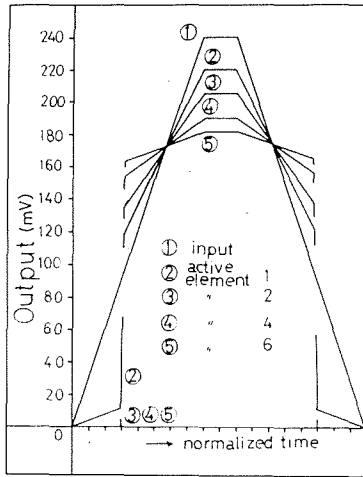


図 6 直流レベル解析による台形入力波の能動素子段数による波形変化

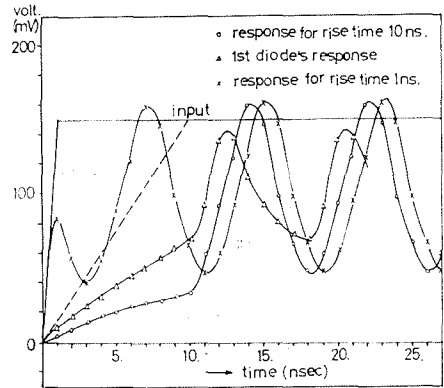
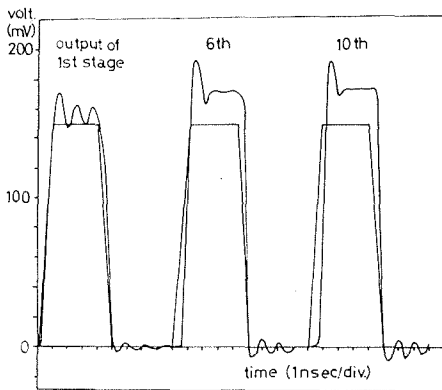
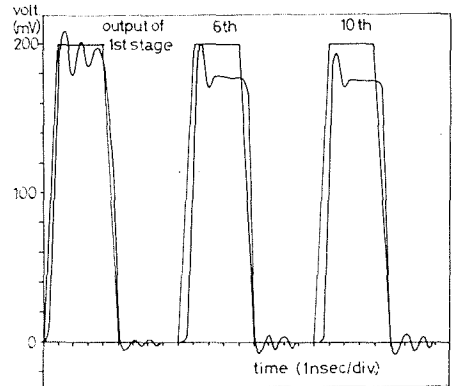


図 7 発振条件を持つ時の能動素子一段のステップ応答

$C=1\text{ pF}$ ,  $L=100\text{ nH}$ ,  
 $R=1\ \Omega$ ,  $\Delta t=1\text{ nS}$



(a) 入力波高値 150 mV



(b) 入力波高値 200 mV

図 8 台形パルス入力の能動素子段数による波形変化  
 $C=1\text{ pF}$ ,  $L=0.1\text{ nH}$ ,  $R=1\ \Omega$ ,  $\Delta t=0.5\text{ nS}$

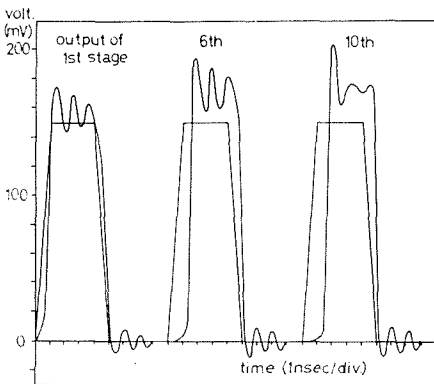


図 9 台形パルス入力の波形変化  
 $C=1\text{ pF}$ ,  $L=1\text{ nH}$ ,  
 $R=1\ \Omega$ ,  $\Delta t=0.5\text{ nS}$

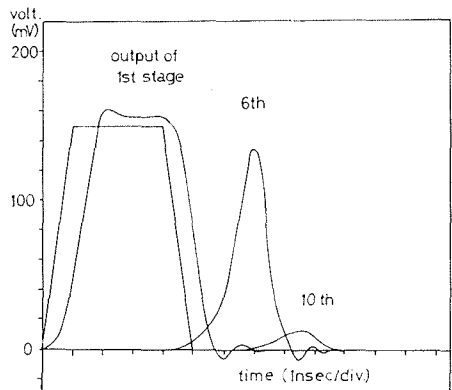


図 10 台形パルス入力の波形変化  
 $C=10\text{ pF}$ ,  $L=0.1\text{ nH}$ ,  
 $R=1\ \Omega$ ,  $\Delta t=0.5\text{ nS}$

ならず定常振動が生じることを示す。これにより小振幅理論で与えられる振動条件の大振幅動作の場合に対する有効性の検討を本手法により行えることを示している。図 8 にパルス入力に対する、能動素子 1 段、6 段、10 段毎の出力波形の変化を示す。(a) は入力振幅 150 mV, (b) は 200 mV で、双方段数の増加と共に、振幅が図 6 の直流レベル解析で求めた 180 mV の飽和レベルに収束していく様子が示されている。図 9 はリード線インダクタンスを 1 nH とした時の波形変化で安定性が悪化し、立ち上りの遅延時間が著しく増加している。図 10 は並列接合容量が 10 pF の時の応答波形で幅 10 nS の入力パルスでは定常波形を維持することができず減衰していく様子が示されている。

## 7. あとがき

“Bergeron Method” の定式化による、分布定数線路及びリアクタンス素子の等価抵抗回路網化は、負性抵抗領域を持つ N 字型非線形抵抗素子を含む場合の時間応答の数値解析に際して、一般の増幅器設計において有効な能動素子の静特性と負荷線の交点で動特性を求むる方法と同様の有効性を持ち、特に負性抵抗領域における解の安定性の判別及び能率的に安定解を求めるための数値解法の決定に役立つことが示された。更に 2 次元波動場中に非線形素子が存在する時の時間応答の解析に本手法を適用することを検討中であり後日発表予定である。

## 参 考 文 献

- 1) 吉田則信, 深井一郎, 福岡醇一: 電子通信学会誌論文誌 A, 57-A, 2, (昭 49) p. 158.
- 2) 吉田則信, 深井一郎, 福岡醇一: 工学部研究報告, 65, (昭 48), p. 56.
- 3) G. Metzger and J. P. Vabre: *Transmission Lines with Pulse Excitation*, (1969) P. 65, Academic Press.
- 4) V. Dvorak: *Proc. IEEE* (1970) 9, p. 844.
- 5) 関根泰次: 電力系統解析理論, (昭 46), p. 418, 電気書院.
- 6) 大附辰夫, 渡部 和: 信学会研資, CT-67-31, (昭 42).
- 7) 大附辰夫, 吉田則信: 信学会研資, CT-69-19, (昭 44).
- 8) 佐藤利三郎: 通研成報 (4907), (昭 44), P. 15.
- 9) Kuzunelov, Stranovich: *The Propagation of Electromagnetic Waves in Multiconductor Transmission Lines*, (1964), p. 62, Pergamon.