



Title	粒状体の確率的剪断特性に関する基礎的研究
Author(s)	新保, 勝; Shimbo, Masaru
Citation	北海道大學工學部研究報告, 78, 175-181
Issue Date	1976-02-16
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41333">https://hdl.handle.net/2115/41333</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	78_175-182.pdf



## 粒状体の確率的剪断特性に関する基礎的研究

新 保 勝\*

(昭和 50 年 6 月 27 日受理)

### Basic Study on Probabilistic Shear Properties of Granular Media

Masaru SHIMBO\*

(Received June 27, 1975)

#### Abstract

We wish to show how the shear properties of granular media including dilatancy can be represented by random processes.

Since granular media are generally composed of many different materials and different shapes of grains, which may cause the variance of the coefficient of friction, the coefficient of particle friction is treated as a random variable, besides the angles of particle sliding. Based on Coulomb's friction law, the failure problem of granular media is studied with particular reference to stress-dilatancy curves.

#### 1. ま え が き

粒状体の剪断による体積変化機構<sup>1)</sup>を説明するために、従来、いろいろな試みがなされてきた。しかし、粒状体では粒子の形、大きさはもとより粒度分布、排水条件、応力条件等は様々でありそのため粒状体の応力・歪関係の研究は難しく、その多くは実験による接近にとどまっている。

粒状体の力学的性質を微視的観点から解析する際にまず考えられるのは、ある規則性を備えた粒状体に置きかえて議論を進めることであろう。例えば、Rowe<sup>2)</sup>は Coulomb の摩擦法則を基礎に、規則的な配列をした等径球の破壊を論じている。ところで、この理論をそのまま不規則な粒子群に適用することは直接的でなく、その次の段階としてこの不規則性を統計的手法を用いて表現することが Horne<sup>3)</sup>、松岡<sup>4)</sup>、小田<sup>5)</sup>、徳江<sup>6)</sup>らによって行われる。ここでは粒状体の構造の異方性は粒子間の接触点の分布や接点角の分布として把握され、これらは剪断の進行と共に変化することが認識されるようになる。しかし、これらの統計的処理に共通することは、粒子間の摩擦係数としては巨視的な一つの量が採用されていることであり、この仮定は粒状体が複数の粒子からなる場合や複雑な粒形の影響を考えると余り実際的でないように思われる。

以下、著者は同じく微視的観点に立って、粒子間の接点角の分布のみならず、粒子表面の摩擦係数の分布をも考慮したモデルを構成し、粒状体を確率論的に取扱う際の基礎理論を本論文に示す。

\* 工学部 情報数理工学第一講座

\* Division of Information Engineering, Graduate School of Engineering, Hokkaido University, Sapporo 060, Japan.

なお、粒子は剛体とし、回転はすべりに、粒形の差は摩擦係数に還元し、粒子間の粘着力は考えない。また、粒子は一様に詰まっているものとし、破碎に至らぬ微小な変形を対象とする。

### 2. 粒子接点角

簡単のため問題を二次元に限り、二次元粒状体の剪断機構を考える。微視的観点に立って、粒状体の剪断現象は基本的には構成二粒子間のすべりで説明する<sup>2)</sup>。このすべりは粒状体の内部で局所的に起るものとし、すべりが生じない残りの部分は剛体として扱う。直交座標系  $x^1, x^2$  を図1のように取り、粒状体にはこれらの軸方向にそれぞれ  $\sigma_1$  および  $\sigma_2$  (圧縮を正符号とし、 $\sigma_1 \geq \sigma_2$ ) の主応力が働いているものとする。また、特定二粒子の接触面の法線が  $x^2$  軸となす角を  $\beta$  ( $0 \leq \beta \leq \pi/2$ ) とし、これを接点角と称する。この部分に働く力の法線方向およびそれに垂直な方向の成分をそれぞれ  $f_n$  および  $f_s$  とすれば、それらは

$$f_n = \sigma_1 \sin^2 \beta + \sigma_2 \cos^2 \beta,$$

$$f_s = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\beta$$

となる。従って、粒子間の粘着力を考慮しない場合には、二粒子が相対的にすべり出す直前の鈎合状態における静止摩擦係数  $\mu$  ( $\geq 0$ ) は Coulomb の摩擦法則から

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{f_s}{f_n} \\ &= \frac{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1\right) \sin 2\beta}{2 \left\{ 1 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1\right) \sin^2 \beta \right\}} \end{aligned} \tag{1}$$

となり、応力比  $\sigma_1/\sigma_2$  および接点角  $\beta$  の関数となる。摩擦係数が式(1)の最後の式で計算した値よりも小さければ、粒子間にすべりが生ずる。

ここで、これまでの結果から自明なことであるが、一つの事実を指摘しておく。式(1)を変形して  $\beta$  について解けば

$$\beta = \beta \left( \mu, \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \tag{2}$$

を得る。式(2)で解が存在する場合には、 $\beta$  は一般に二個の値を取り、それらを  $\beta_+, \beta_-$  ( $0 \leq \beta_- \leq \beta_+ \leq \pi/2$ ) とすると

$$\beta_+, \beta_- = \sin^{-1} \sqrt{\frac{r - 2\mu^2 \pm \sqrt{r^2 - 4\mu^2(r+1)}}{2(1+\mu^2)r}}, \quad r = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1$$

となり、一個の値となるのは

$$\mu = \frac{r}{2\sqrt{r+1}}$$

のときである。これから、二粒子がすべるか、すべらないかをきめる接点角は、応力比と摩擦係数の関数となる。いいかえると、応力比が  $\sigma_1/\sigma_2$  のとき、摩擦係数が  $\mu$  であるような二粒子は接点角  $\beta$  が

$$\beta_- < \beta < \beta_+ \tag{3}$$

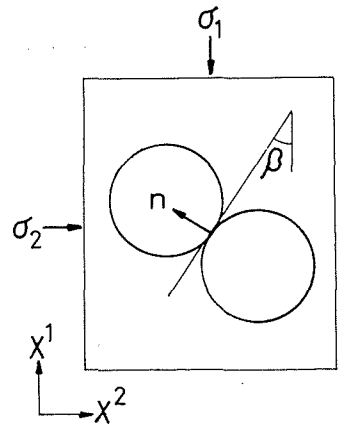


図1 粒子接点角

の範囲内にあればすべりを起す。接点角がこの範囲外にあるものおよび式(2)が解をもたなければ、粒子は鈎合ったままの状態を保つ。一定の応力比  $r$  に対して摩擦係数  $\mu$  を変化させたときの  $\beta_{\pm}$  の変化曲線を図2に示す。図2で  $r=0.5$ ,  $\mu=0.1$  に対しては、接点角が  $\beta_- = 12.1^\circ$  を越え、 $\beta_+ = 72.2^\circ$  未満のものがすべることになる。

### 3. 剪断による変形

粒状体は一般に粒形や粒質の異なる大小様々な粒子の不規則な集まりである。従って、粒子接点角の分布<sup>3)~6)</sup>のみならず、粒子表面の摩擦係数もまた粒状体内部で分布していることが考えられ、粒状体の剪断の問題はこれらの両分布を基礎に確率論的に理解する必要がある。ただし、同一材料の摩擦係数の測定値のバラツキに関する確率過程論的取扱いは従来も行われているが<sup>7)</sup>、ここで考える摩擦係数はもともと異なる値である。

接点角  $\beta$  の確率密度関数を  $f_{\beta}(\beta)$ 、摩擦係数  $\mu$  のそれを  $f_{\mu}(\mu)$  とすると、 $\beta$  は 0 から  $\pi/2$  まで、 $\mu$  は 0 から無限大まで変化し得るから

$$\int_0^{\pi/2} f_{\beta}(\beta) d\beta = 1, \quad \int_0^{\infty} f_{\mu}(\mu) d\mu = 1$$

の関係がある。一般には粒状体内部で  $\beta$  と  $\mu$  の同時分布を考える必要があるが、ここで次の仮定をおく。

**仮定 1.** 粒子接点角の分布と粒子の摩擦係数の分布は独立である。

応力比  $\sigma_1/\sigma_2$  を 1 から増加させていくと、接点角が式(3)の範囲内にある粒子がすべり始める。従ってこれらの粒子の接点角が変わると共に、系全体の接点角の分布が変わることになる。すべり始めた粒子がどこで止まるかは粒子の摩擦、特に動摩擦に依存する。この動摩擦係数の分布は一般には前述の  $f_{\mu}(\mu)$  と異なる。しかし、すべりが準静的に起るとすれば、同一の分布を用いてもいいであろう。そこで

**仮定 2.** 粒子がすべり出したら、この粒子の接点角はすべて  $\beta_-$  または  $\beta_+$  となるものとする。

このようにして、粒状体内部で最初ある粒子接点角の分布、摩擦係数の分布をしていたものが、応力比の増加と共に、すべり易い粒子から順次すべっていくことが理解される。この接点角の変化に関する事実は実験的にも確かめられている<sup>4),5)</sup>。

これらの仮定をもとに、 $x^1-x^2$  面に垂直に単位長さを取って、二次元粒状体の剪断による体積歪を計算してみる。前述の仮定 1 を採用して、接点角と摩擦係数の分布は独立であるとする。与えられた応力比に対して、粒子の摩擦係数に応じて、接点角が式(3)の範囲内にある粒子はす

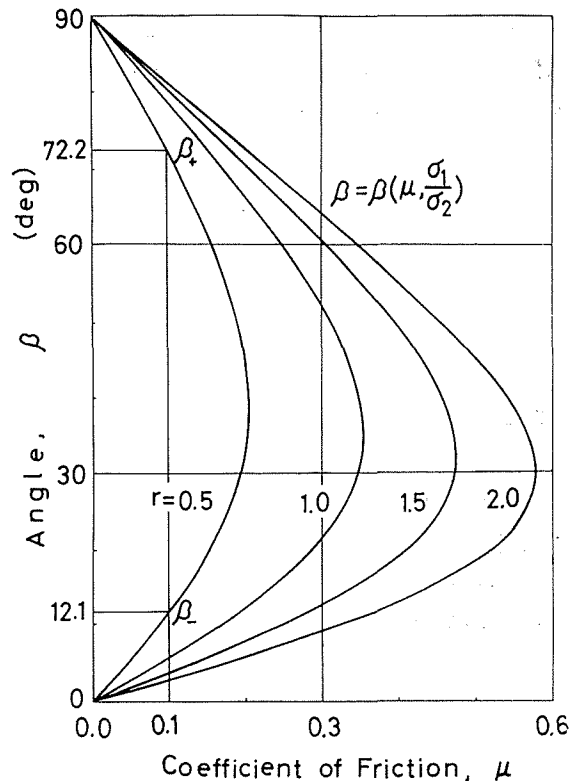


図2 鈎合状態における粒子接点角の摩擦係数依存性(応力比一定)

べりを起す。仮定2から、すべての粒子の接点角は  $\beta_-$  または  $\beta_+$  となって静止する。接点角  $\beta$  は粒状体の内部でいろいろ分布しているから、このときの接点角  $\beta$  を構成する粒子群の微小体積要素を  $v(\beta)$  とすれば、体積歪は特定の応力比と摩擦係数によってきまり

$$v(r, \mu) = \int_{\beta_-}^{\beta_+} v(\beta) f_\beta(\beta) d\beta \quad (4)$$

で与えられる。更に、摩擦係数も一般には0から無限大まで変化し得るから、体積歪は応力比をパラメーターとして

$$\begin{aligned} v(r) &= \int_0^\infty v(r, \mu) f_\mu(\mu) d\mu \\ &= \int_0^\infty \int_{\beta_-}^{\beta_+} v(\beta) f_\beta(\beta) f_\mu(\mu) d\beta d\mu \end{aligned} \quad (5)$$

となる。

#### 4. 円筒群の破壊

以下、同一の径をもつ円筒の集りについて剪断による体積歪を計算してみる。円筒は軸方向には変化せず、専ら断面の変形を問題とする。図3(a)のごとく、直交座標軸  $x^1, x^2$  方向に対をなした四個の円筒の組に着目し、円筒の集りはこの基本的な系で構成されているとして扱う。円筒の回転は考えず、摩擦によるすべりだけとし、変形は座標軸方向に对称に起るものとする。

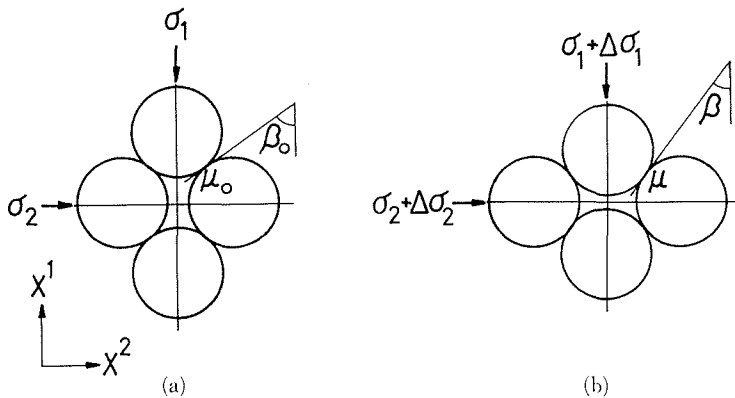


図3 4粒子系の破壊

円筒の集りには主応力  $\sigma_1, \sigma_2$  がそれぞれ座標軸方向に働き、互に力を及ぼしながら釣合っている状態を考える。このとき接点角が  $\beta$  であるような相接する二円筒が相対的に動き出す直前には式(1)の関係が成立つ。摩擦係数が  $\mu_0$  の基本円筒系の破壊機構は図3に示される。最初、応力が  $\sigma_1, \sigma_2$  のときに接点角  $\beta_0$  で釣合状態(a)にある基本系は応力が  $\sigma_1 + \Delta\sigma_1, \sigma_2 + \Delta\sigma_2$  のときに接点角  $\beta$  となって釣合状態(b)に変化したとする。ここで、状態(b)の粒子接点における摩擦係数を  $\mu$  とおいてある。円筒系その他への影響は無視する。また、簡単のため、これら両接点角は

$$\frac{\pi}{6} \leq \beta_0, \quad \beta \leq \frac{\pi}{3}$$

の範囲で考える。円筒軸方向に単位長さを取れば、このときの体積歪は幾何学的関係から

$$v(\beta_0) = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\beta_0} - 1 \quad (6)$$

となる。ただし、円筒系の  $x^1-x^2$  面における面積要素は円筒の中心を結ぶ平行四辺形で代用する。

粒状体が非常に密につまっている場合には、前節の仮定2のような粒子のすべりは他の粒子群の影響もあって必ずしも保証されない。したがって、これまでの議論は粒状体の比較的ゆるいつまり方をしている部分に対して適用するのが妥当である。概して、不均質粒状体の破壊前の剪断変形では剪断応力の増加と共に、まず(A)不均質部の弱い部分がつぶれ、一様に密な配列に変化する。次いで、(B)全体が一様に密な配列から粗な配列に変化する、の二つの素過程が考えられる。前者では体積の減少が、後者では体積の増加が観察されることになる。それ故、ここでは(A)の均質化の過程における剪断変形が対象となる。

ここで計算を一層簡単にするために、仮定2を少し修正して

**仮定2'.** すべった粒子は途中で止らず、全て接点角 $\beta_-$ まですべって止まる。

を設ける。 $\beta_-$ が $\pi/6$ 以下であるときは $\pi/6$ とする。基本円筒系の体積歪はこのとき式(6)で計算できる。ただし、 $\beta_0$ は $\beta_- (\geq \pi/6)$ から $\beta_+ (\leq \pi/3)$ までの値を取ることができる。また、同様の理由で

**仮定3.** 接点角および摩擦係数の分布は一様である。

とする。円筒の粗な配列に対しては $\pi/4$ に近い接点角の割合が多く、密な配列に対しては $\pi/6$ や $\pi/3$ に近い接点角の割合が多いと考えられるが、ここでは接点角は平均として $\pi/6$ から $\pi/3$ まで一様に分布しているものとする。よって

$$f_{\beta}(\beta) = \frac{6}{\pi} \quad \left( \frac{\pi}{6} \leq \beta \leq \frac{\pi}{3} \right) \quad (7)$$

摩擦係数は構成粒子によって異なる値をもつ。ここでは砂質土を念頭において0.3から0.6までの値を一様に取りのものとする。よって

$$f_{\mu}(\mu) = \frac{1}{0.3} \quad (0.3 \leq \mu \leq 0.6) \quad (8)$$

式(4), (6), (7)から $v(r, \mu)$ を0.1刻みの $\mu$ に対して、応力比 $r$ を0.5刻みに計算した結果を図4に示す。応力比を増すにつれ、体積歪が $\mu$ の各値に対して一定値に近づくことがわかる。これは応力比の増加にともなう均質化の進行と捉えることができる。更に、式(8)による摩擦係数の分布を考慮して、式(5)を計算した結果を図5に示す。図中の各点は図4における0.1刻みの $\mu$ を用いて、 $v(r)$ を積和におきかえて計算した値を示す。破線はこれらの計算点を変換した応力比

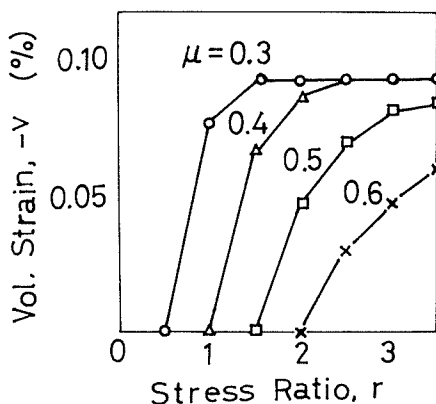


図4 応力比—体積歪曲線  
(摩擦係数一定)

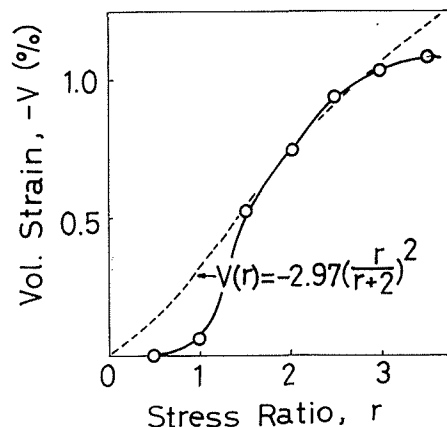


図5 応力比—体積歪曲線

$$\frac{q}{p} = \frac{r}{r+2}$$

の二次式で近似したものである。ここで

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad q = \sigma_1 - \sigma_2$$

はそれぞれ平均主応力および軸差応力と呼ばれるものである。なお、この近似曲線は  $r=1$  の変曲点をもつ。より精密な計算を行えば、実曲線は破線曲線に近づくことが予想される。

これらの結果から円筒で代表される二次元粒状体の剪断による均質化過程においては、体積歪は応力比  $q/p$  の二次式

$$v\left(\frac{q}{p}\right) = -C\left(\frac{q}{p}\right)^2 \quad (9)$$

の形で表わされることがわかる。式(9)に用いた定数  $C$  は粒状体に関する圧縮試験を行うことにより決定することができる。

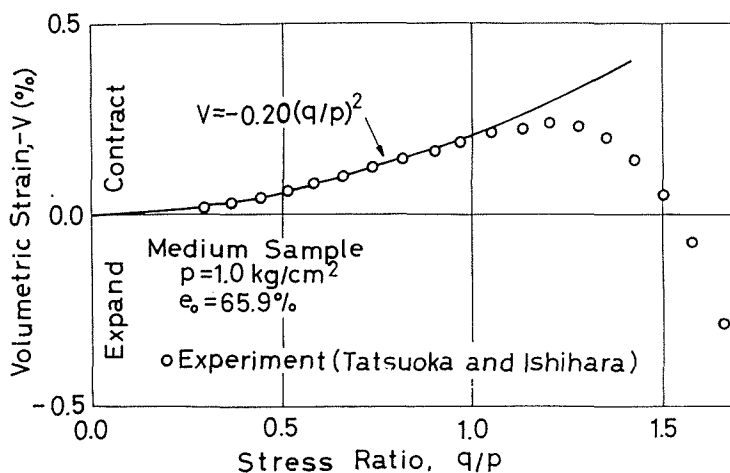


図6 三軸圧縮試験結果

以上は二次元粒状体に関する議論であるが、特別な場合として、二主応力が一致する三軸圧縮試験例に適用することが可能である。この場合には応力条件は第二節の結果に一致し、式(1)が成立つ。この種の実験として竜岡ら<sup>8)</sup>が砂質土について平均主応力 ( $p=(\sigma_1+2\sigma_2)/3$ ) 一定の三軸圧縮試験を行った例がある。初期間隙比約75%から50%にわたる粗、中、密の三種についてそれぞれ平均主応力が1.0, 2.0, 3.0 kg/cm<sup>2</sup>の各場合について行ったもので、結果は大体同じ傾向を示し、本節の(A), (B)の両過程を見ることができ。本理論による結果と実験結果の比較を初期間隙比  $e_0=65.9\%$ 、平均主応力  $p=1.0$  kg/cm<sup>2</sup> の場合について図6に示す。体積減少過程について体積歪曲線式(9)における係数を定めれば

$$C = 2.0 \times 10^{-3}$$

となる。

## 5. あとがき

粒状体の剪断変形機構を微視的観点から解析する手段として、粒子間のすべりを確率的に把握するための一つのモデルを検討した。得られた主な結論を次に示す。

(1) 粒子間のすべりに摩擦則を適用するに際しては、粒状体が複数の物質から成る場合を考慮して、与えられた応力比に対して従来の接点角の分布の他、粒子の摩擦係数の分布も扱わなければならない。

(2) 粒状体の破壊機構を確率論的に把握することは有効である。特に、従来提案されていた剪断体積歪の実験式<sup>8)</sup>の理論的根拠の一端をこれにより説明できる。

この研究にあたって、東京大学甘利俊一助教授には数々の御教示を得、論議していただいた。本学河口至商教授には多くの有益な御助言、御批判を賜った。また、建設省竜岡文夫博士には貴重な実験資料をお貸しいただいた。末筆ながら厚く謝意を表する次第である。

#### 参 考 文 献

- 1) O. Reynolds: *Phil. Mag.*, 5 (1885), 20, p. 469.
- 2) P. W. Rowe: *Proc. Royal Society, London, A*, 269 (1962), p. 500.
- 3) M. H. Horne: *ibid.*, 286 (1965), p. 62; 310 (1969), p. 21.
- 4) 松岡 元: 土木学会関西支部講演概要集 (1972).
- 5) M. Oda: *Soils and Foundations*, 12 (1972), 2, p. 1.
- 6) 福岡正巳, 徳江俊秀: 第8回土質学会講演集 (1973).
- 7) 曾田範宗: 東大理工研報告, 4 (1950), p. 281, p. 287.
- 8) F. Tatsuoka and K. Ishihara: *Proc. 4th Conf. on Soil Mechanics, Budapest* (1971), p. 337.