北海道大学工学部研究報告
第79号（昭和51年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 79 (1976)

有界変数法を用いた2次計画法のコードの作成

戸田　悟　　大堀隆文　　藤田克孝　　大内　東　　加地郁夫

（昭和45年9月30日受理）

Quadratic Programming Code Using Upper-bounded Technique

Satoshi TODA, Takahumi OOHORI, Katsuyuki FUJITA, Azuma OOUCHI and Ikuo KAJI

(Received September 30, 1975)

Abstract

The authors programmed a quadratic programming code in which bounded variables can be treated. Bounded variables are often used in the control problems and others. This algorithm is efficient in dealing with such problems. This report presents the algorithm, the FORTRAN program and its specifications.

1. まえがき

有界変数（上下限付き変数）を扱った2次計画法は，これまで提案されていない。しかし，制御問題においては有界変数は多く使われる。そこで，著者らは有界変数法による線形計画法（L. P.）を用いて2次計画法のコードを作成した。一般の L. P. では有界変数を制約式に入れてしまうので問題の規模が大きくなってしまう。しかし有界変数法による L. P. では有界変数をタイプ変数として扱うので計算の際の容量がかなり節約でき，計算時間も短縮できる。私共はこのプログラムを種々の問題に用いて成功を収めた。ここでは2次計画法の解法とアルゴリズムおよびプログラムの使用方法と FORTRAN プログラムリストを載せる。

2. プログラムの特長（有界変数の取扱い）

この2次計画法の最大の特長は有界変数（$\alpha \leq x \leq \beta$ のように上下限付変数）の取扱いにある。一般的な L. P. は有界変数を2本の制約式として扱うのであるが，有界変数法を用いると，有界変数をタイプ変数として扱う。このため制約式の数を大幅に減少させることができる。このプログラムでは，タイプ変数として，自由変数型（$-\infty \leq x \leq \infty$，タイプ3），正変数型（$0 \leq x \leq \infty$，タイプ2），有界変数型（$0 \leq x \leq 1$，タイプ1），ゼロ変数型（$x=0$，タイプ0）の4種類を扱っている。

3. 2次計画問題とその解法

3.1 2次計画問題

2次計画問題は，次の（3.1.1）式で表わされる。

$$\begin{cases} \text{Minimize} \quad f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\mathbf{C}\boldsymbol{x} + \mathbf{p}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{b} \end{cases} \tag{3.1.1}$$

ここで $\boldsymbol{x}$ は n 次元ベクトル，C は $n\times n$ 行列，p は $1\times n$ 行列，A は $m\times n$ 行列，b は $m\times 1$ 行列である。T は転置を意味する。C は正定値あるいは準正定値符号でなければならない。これはグローバルな意味での最小値を保証するために必要な仮定である。

3.2　2 次計画問題の解法

ここで変数 $\boldsymbol{x}$ を，$\boldsymbol{x}_1$（タイプ 1），$\boldsymbol{x}_2$（タイプ 2），$\boldsymbol{x}_3$（タイプ 3）の 3 つのタイプに分類して考察を進める。そうすると，(3.1.1) 式は

$$\begin{cases} \text{Minimize} \quad f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{x}_3^T)\begin{pmatrix} \mathrm{C}_{11} & \mathrm{C}_{12} & \mathrm{C}_{13} \\ \mathrm{C}_{21} & \mathrm{C}_{22} & \mathrm{C}_{23} \\ \mathrm{C}_{31} & \mathrm{C}_{32} & \mathrm{C}_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}+(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3)\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} \\ \text{subject to} \quad (\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3)\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}=\mathbf{b} \\ 0\leqq \boldsymbol{x}_1\leqq 1, \qquad \boldsymbol{x}_2\geqq 0, \qquad -\infty\leqq \boldsymbol{x}_3\leqq \infty \end{cases} \tag{3.2.1}$$

となる。A_1, A_2, A_3 は制約式 $\mathrm{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{b}$ のうち，$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ をそれぞれ含む式に対応する行列 A の部分行列である。C, p に関しても同様に考える。

(3.2.1) 式においてラグランジュ関数 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_\alpha, \boldsymbol{u}_\beta)$ を作ると

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_\alpha, \boldsymbol{u}_\beta)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{x}_3^T)\begin{pmatrix} \mathrm{C}_{11} & \mathrm{C}_{12} & \mathrm{C}_{13} \\ \mathrm{C}_{21} & \mathrm{C}_{22} & \mathrm{C}_{23} \\ \mathrm{C}_{31} & \mathrm{C}_{32} & \mathrm{C}_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}+(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3)\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}+\boldsymbol{u}_\alpha^T\left\{(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3)\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}-\mathbf{b}\right\}+\boldsymbol{u}_\beta^T(\boldsymbol{x}_1-1) \tag{3.2.2}$$

となる。ここに $\boldsymbol{u}_\alpha$, $\boldsymbol{u}_\beta$ はラグランジュ乗数であり，それぞれ m 次元ベクトル，n_1（n_1 はタイプ 1 変数の個数）次元ベクトルである。

一般に，ラグランジュ関数 $\boldsymbol{\Phi}$ の鞍点問題を解くということは，$f(\boldsymbol{x})$ の最小値問題を解くということの必要条件である。しかし，$f(\boldsymbol{x})$ が Convex であるときは，これらは同値関係にある。(3.1.1) 式の C が正定値あるいは準正定値符号であれば $f(\boldsymbol{x})$ は Convex である。

ここで (3.2.2) 式に Kuhn-Tucker の鞍点定理を適用すると

$$\begin{pmatrix} \mathrm{C}_{11} & \mathrm{C}_{12} & \mathrm{C}_{13} \\ \mathrm{C}_{21} & \mathrm{C}_{22} & \mathrm{C}_{23} \\ \mathrm{C}_{31} & \mathrm{C}_{32} & \mathrm{C}_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \mathbf{p}_3^T \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \mathrm{A}_1^T \\ \mathrm{A}_2^T \\ \mathrm{A}_3^T \end{pmatrix}\boldsymbol{u}_\alpha+\begin{pmatrix} -\mathrm{I} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}_1+\begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{I} \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}_2+\begin{pmatrix} \mathrm{I} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{u}_\beta=\mathbf{0} \tag{3.2.3}$$

（I は単位行列を表わす）

$$(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3)\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}=\mathbf{b} \tag{3.2.4}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{v}_1=0 \\ \boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{v}_2=0 \\ u_{\beta_k}(x_{1k}-1)=0, \qquad k=1, 2, \ldots, n_1 \end{cases} \tag{3.2.5}$$

となる。ここで

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1=(\mathrm{C}_{11}\mathrm{C}_{12}\mathrm{C}_{13})\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}+\mathbf{p}_1^T+\mathrm{A}_1^T\boldsymbol{u}_\alpha+\boldsymbol{u}_\beta \end{cases} \tag{3.2.6}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{v}_2 = (\mathbf{C}_{21}\mathbf{C}_{22}\mathbf{C}_{23})\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \boldsymbol{x}_3\end{pmatrix} + \mathbf{p}_2^T + \mathbf{A}_2^T\boldsymbol{u}_\alpha \end{array} \right.$$

$\boldsymbol{x}_1$：タイプ1

$\boldsymbol{x}_2$：タイプ2

$\boldsymbol{x}_3$：タイプ3

$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$：タイプ2

$\boldsymbol{u}_\alpha$：タイプ3

$\boldsymbol{u}_\beta$：タイプ2

表 1

x1	x2	x3	v1	v2	u_α	u_β	右辺
A1	A2	A3	0	0	0	0	b
C11	C12	C13	−I	0	$-A_1^T$	I	$-p_1^T$
C21	C22	C23	0	−I	$-A_2^T$	0	$-p_2^T$
C31	C32	C33	0	0	$-A_3^T$	0	$-p_3^T$

(3.2.3) 式と (3.2.4) 式をタブロー形式で表わすと表1のようになる。結局，この2次計画問題は (3.2.3) 式と (3.2.4) 式の連立方程式を (3.2.5) 式の条件のもとで解くということに帰着する。この解法のアルゴリズムには，P. Wolfe が提案した2次計画法を利用した。

4.　2次計画法のアルゴリズム

P. Wolfe は2つの方法を与えている。それは短形式と長形式といわれるものである。

4.1　短形式 (short form)

短形式の場合は，C が正定値符号か，$\mathbf{p}=0$ のいずれかでなければならない。

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1\\ \boldsymbol{v}_2\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_\beta\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \boldsymbol{x}_3\end{pmatrix}$$

として，(3.2.3) 式と (3.2.4) 式に人為変数 $\boldsymbol{w}$ と $\boldsymbol{z}$ を付加すると

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w} = \mathbf{b} \\ \mathbf{C}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{u}_\alpha + \hat{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{z} = -\mathbf{p}^T \end{array} \right. \tag{4.1.1}$$

となる。ここに $\boldsymbol{w}$ は m 次元ベクトル，$\boldsymbol{z}$ は n 次元ベクトルである。短形式は次の2段階から成る。

i)　第1段階

ここではまず，$\sum_i w_i$ をゼロにするように L. P. を解く。つまり，目的関数を，

$$\text{Maxmize} \quad -\sum_i w_i$$

とする。このとき，初期基底には $\boldsymbol{w}$ と $\boldsymbol{z}$ が入っている。第1段階では，$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}_\alpha$, $\boldsymbol{u}_\beta$ は基底に入れないという規則を加える。すなわち $\boldsymbol{v}=0$, $\boldsymbol{u}_\alpha=0$, $\boldsymbol{u}_\beta=0$ である。また，$\boldsymbol{w}$ はタイプ0，$\boldsymbol{z}$ はタイプ3としておく。そうすると，$\sum_i w_i$ がゼロになった時点で，(4.1.1) 式の上の式に関しては，$\boldsymbol{x}$ は実行可能解 (feasible solution) となっている。

ii)　第2段階

第1段階の終りで $\sum_i w_i$ はゼロになっている。ここから第2段階が始まる。今度は，(3.2.5) 式を満足させながら，$\sum_k z_k$ をゼロにするように基底変換を行う。すなわち，目的関数を

$$\text{Maxmize} \quad -\sum_k z_k$$

とする。第2段階では，$\boldsymbol{z}$ はタイプ0としておき，$\boldsymbol{w}$ は基底に入れないようにしておく。この結果，(4.1.1) 式の下の式に関しても $\boldsymbol{x}$ は実行可能解となり，結局，第2段階の終りで求まった $\boldsymbol{x}$ は (3.1.1) 式の最適解となる。

4.2　長形式 (long form)

長形式は3段階から成り立ち，最初の2段階は本質的に短形式と同じである。ここで，もう1つの変数 μ を導入する。そうすると，(3.2.3) 式および (3.2.4) 式は

$$\begin{cases} \mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{b} \\ \mathbf{C}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}+\mathbf{A}^T\boldsymbol{u}_\alpha+\hat{\boldsymbol{u}}+\mu\mathbf{p}^T=\mathbf{0} \end{cases} \tag{4.2.1}$$

となる。第1，第2段階では，$\mu=0$ としておく。

$$\begin{cases} \mathbf{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{w}=\mathbf{b} \\ \mathbf{C}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}+\mathbf{A}^T\boldsymbol{u}_\alpha+\hat{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{z}=\mathbf{0} \end{cases} \tag{4.2.2}$$

第1，第2段階では，(4.2.2) 式において短形式で行なった方法と同様にしてこの問題を解く。しかし，そうして求められた解は $\mu=0$ に対する解である。必要なのは $\mu=1$ に対する解である。そのために第3段階を用いる。第2段階で得られた基底解から始めて，制約式 (4.2.1) 式と条件 (3.2.5) 式のもとで μ を最大化する。

$$\begin{cases} \text{Maxmize} \quad \mu \\ \text{subject to} \quad (4.2.1) \\ \text{under the side condition} \quad (3.2.5) \end{cases} \tag{4.2.3}$$

この第3段階での解の反復の列を $\boldsymbol{x}^i$, μ^i とおいて，$\mu=1$ に対する解を求める。$\mu^i \leq 1 \leq \mu^{i+1}$ のとき，解 $\boldsymbol{x}$ は2つの解の1次結合として表わされる。

$$\boldsymbol{x}=\frac{\mu^{i+1}-1}{\mu^{i+1}-\mu^i}\boldsymbol{x}^i+\frac{1-\mu^i}{\mu^{i+1}-\mu^i}\boldsymbol{x}^{i+1} \tag{4.2.4}$$

(4.2.4) 式が，問題 (3.1.1) 式の最適解である。

5.　プログラムの構成および使用方法

5.1　プログラムの構成

長形式のプログラムのおおよその流れ図を図1に示す。このプログラムはサブルーチン形式で，9個のサブルーチンから成っている。配列の大きさは整合寸法なので，その大きさはメインで調節できる。

5.2　プログラムの使用方法

表2はこのプログラムで用いる LP タブローを示す。プログラムでは，このタブロー全体を A という配列でとっている。(注：$\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{b}$ の $\mathbf{A}$ とは違う) メインプログラムで配列 A に入力を与えなければならない。$\boldsymbol{x}$ を並べる際は左から $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_1$ の順に並べること。$\boldsymbol{v}$ も $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_1$ と並べる。タイプ1変数が無いときは，$\boldsymbol{u}_\beta$ は存在しないのでタブローから外す。

(1)　入力情報

M10：制約式 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{b}$ の本数

NTP 1：$\boldsymbol{x}_1$ の個数

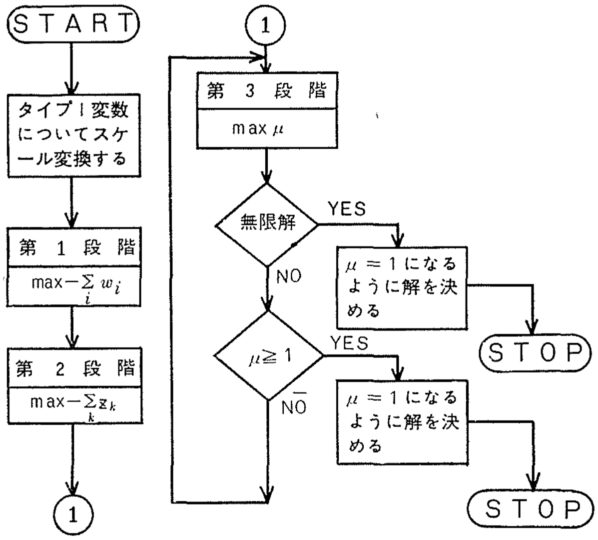
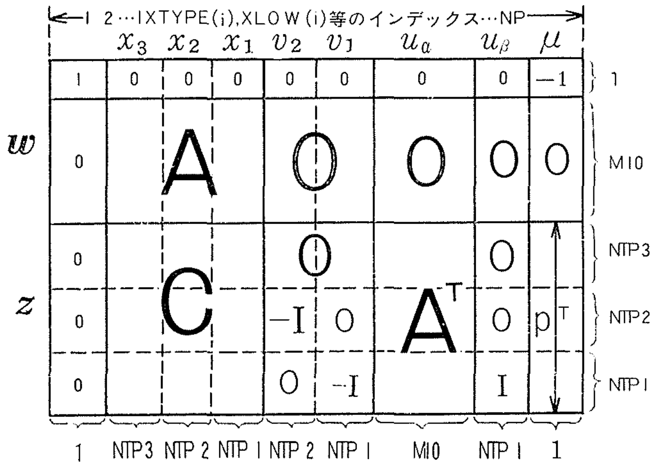


図 1

表 2



NTP 2: $\boldsymbol{x}_2$ の個数

NTP 3: $\boldsymbol{x}_3$ の個数

N 10: $\boldsymbol{x}$ の個数

N 10=NTP 1+NTP 2+NTP 3

MP: LP タブローの行数

MP=1+M 10+N 10

NP: LP タブローの列数

NP=2+N 10+NTP 2+2×NTP 1+M 10

NVAR: NVAR=NP−1

IPMAX: LP のくり返し回数の上限値を与える。普通，MP の２倍ぐらいの大きさにとっておく。

INPL: INPL＝MP＋NVAR

IM: IM＝NVAR

EPS: LP のゼロ判定に用いる。通常，10^{-4} ぐらいにとっておく。X0 が1になる前に計算が終了したときはこの値を調節する。

BETA(i): 表1に示した右辺の値を入力するが，長形式の場合は i＝M10＋2 から i＝MP まではゼロを入力する。i＝2 から i＝M10＋1 までは b を入力する。

IXTYPE(i): 変数のタイプを入力する。IXTYPE(1) は3である。インデックスの順番は表2に示した列の順にする。

XLOW(i): 変数の下限の値を入力。$\boldsymbol{x}_1$ 以外はすべてゼロを入力する。

XUP(i): 変数の上限の値を入力。$\boldsymbol{x}_1$ 以外はすべてゼロを入力する。

A(i, j): 表2のようにすべて入力する。

C(i): i＝1 から i＝NVAR まではゼロを入力し，C(NP) には1.0を入力する。

INEQ(i): i＝1 から i＝M10＋1 まではゼロを入力し，i＝M10＋2 から i＝MP までは3を入力する。

IFORM: 長形式か短形式かを与える情報である。長形式の場合は IFORM＝0 を入力する。短形式の場合は IFORM＝1 を入力するが，このとき入力方法が次の2通りに別れる。

i) **p＝0** の場合は長形式と同じように入力する。

ii) **p≠0** で **C** が正定値符号の場合は，μ の列は全部ゼロを入力し，BETA(i) の i＝M10＋2 から i＝MP まで －**p** を入力する。

DIMENSION 宣言は次のようにする。

DIMENSION IXTYPE(i_1), INEQ(i_2), IBV(i_2), NBV(i_3), IX(i_3), IR(i_4), YETA(i_2, i_4), H(i_2), U(i_2), PAI(i_2), XLOW(i_5), XUP(i_5), BETA(i_2), C(i_5), A(i_2, i_5), XSOLUT(i_1), X(i_6), L1(i_7), NOWZ(i_3)

ただし，i_1 に INPL, i_2 に MP, i_3 に NVAR, i_4 に IPMAX, i_5 に NP, i_6 に N10, i_7 IM の値を各々与える。

これらの入力情報を入力した後，次のように2つのサブルーチンを連続して呼ぶ。

CALL CSCALE (IXTYPE, IBV, NBV, INEQ, IX, NVAR, MP, NP, INPL, BETA, XLOW, XUP, A)

CALL QPWLFE (M10, N10, NTP1, NTP2,NTP3, NCONS, NVAR, MP, NP, INPL, IXTYPE, INEQ, IPMAX, EPS, A, BETA, C, XLOW, XUP, X0, X, U, IBV, NBV, PAI, IP, YETA, IR, IX, H, XSOLUT, NOWZ, IM, IOPT, L1, IFORM)

(2) 出力情報

X(i): 得られた解 $\boldsymbol{x}$ の値。

X0: 長形式の場合の μ の値。X0＝1.0 のとき正しい解が得られている。ただし，短形式の場合は出力できない。

IOPT: IOPT＝1 のとき正しい解が得られたことを表わし，IOPT＝2 は実行不可能，IOPT＝3 は無限解，IOPT＝4 は LP くり返し回数が IPMAX を越えたことを表わす。

IP: LP のくり返し回数。

6. FORTRAN プログラム

```
      SUBROUTINE  QPWLFE (M10,N10,NTP1,NTP2,NTP3,NCONS,NVAR,MP,NP,INPL,
     1IXTYPE,INEQ,IPMAX,EPS,A,BETA,C,XLOW,XUP,XO,X,U,IBV,NBV,PAI,IP,
     2YETA,IR,IX,H,XSOLUT,NOWZ,IM,IOPT,L1,IFORM)
      DIMENSION IXTYPE(INPL),INEQ(MP),IBV(MP),NBV(NVAR),IX(NVAR),
     1  IR(IPMAX),YETA(MP,IPMAX),H(MP),U(MP),PAI(MP),XLOW(NP),XUP(NP),
     2  BETA(MP),C(NP),A(MP,NP),XSOLUT(INPL),X(N10),L1(IM),NOWZ(NVAR)
 5100 FORMAT (1H ,25I5)
 5200 FORMAT (1H ,20F6.1)
 5070 FORMAT (1H ,3HIP=,I5)
 5081 FORMAT(1H ,8E15.7)
C ***** 1-ST STEP *****
      WRITE(6,9191)
 9191 FORMAT(1H ,3X,19H*****1-ST STEP*****)
C    BOX A
      IM=N10
      DO 50 I=1,IM
   50 L1(I)=I+1
      L=1
      S=0.0
      IP=0
 1111 CONTINUE
C    BOX B
      L=0
      U(1)=S
      DO 100 I=2,MP
      U(I)=0.0
      IBVAR=IBV(I)
      IF(IBVAR.LT.NP+1.OR.IBVAR.GT.NP+M10) GO TO 100
      BET=BETA(I)
      IF(BET.GE.-EPS.AND.BET.LE.EPS) GO TO 100
      IF(BET.LT.-EPS) GO TO 150
      U(I)=-1.0
      L=L+1
      GO TO 100
  150 U(I)=1.0
      L=L+1
  100 CONTINUE
      IF(L.EQ.0) GO TO 1155
      CALL LPCR1(MP,NP,IP,IM,EPS,IS,INS,IDEL,MYU,IRW,IR,U,YETA,NBV,
     1  IXTYPE,A,IX,PAI,L1,IPMAX,NVAR,INPL)
      IF(IS.NE.0) GO TO 1000
      IOPT=2
      RETURN
 1000 IF(IS.LE.NP) GO TO 1010
      DO 1020 N=1,MP
 1020 H(N)=0.0
      H(IS+1-NP)=1.0
      GO TO 1050
 1010  DO 1030 N=1,MP
 1030 H(N)=A(N,IS)
 1050 CONTINUE
      CALL  LPCR2(MP,IP,DELTA,IDEL,EPS,THETA,IEPS,LAMDA,IRW,H,YETA,
     1  BETA,IBV,IXTYPE,IR,IPMAX,INPL)
      IF(IRW.GT.0) GO TO 1100
      IF(MYU.EQ.1) GO TO 1100
      IOPT=3
      RETURN
 1100 CONTINUE
      CALL  LPCR3(MP,NVAR,MYU,THETA,IDEL,IEPS,DELTA,INS,LAMDA,IS,IP,
     1  IPMAX,IOPT,IRW,IR,BETA,H,IX,NBV,IBV,YETA)
      IF(IOPT.NE.4) GO TO 1111
      RETURN
C ***** 2-ND STEP *****
 1155 CONTINUE
      WRITE (6,5070) IP
      WRITE(6,9192)
 9192 FORMAT(1H ,3X,19H*****2-ND STEP*****)
      DO 1250 I=M10+2,MP
      J=IBV(I)
 1250 IXTYPE(J)=0
 1200 U(1)=1.0
      S=0.0
 2222 CONTINUE
C    BOX C
      DO 400 I=1,NVAR
      IF(NBV(I).GE.NP.AND.NBV(I).LE.NP+M10) GO TO 410
      NOWZ(I)=1
      GO TO 400
  410 NOWZ(I)=0
  400 CONTINUE
      CALL  LISIER(MP,NVAR,M10,N10,NTP1,NTP2,NTP3,IM,IX,NBV,IBV,L1,NOWZ)
C    BOX D
      U(1)=S
      L=0
      DO 200 I=2,MP
      U(I)=0.0
      IBVAR=IBV(I)
      IF(IBVAR.LT.NP+M10+1.OR.IBVAR.GT.NP+NCONS) GO TO 200
      BET=BETA(I)
      IF(BET.GE.-EPS.AND.BET.LE.EPS) GO TO 200
      IF(BET.LT.-EPS) GO TO 250
```

```
      U(I)=-1.0
      L=L+1
      GO TO 200
  250 U(I)=1.0
      L=L+1
  200 CONTINUE
      IF(L.EQ.0) GO TO 2200
      CALL LPCR1(MP,NP,IP,IM,EPS,IS,INS,IDEL,MYU,IRW,IR,U,YETA,NBV,
     1  IXTYPE,A,IX,PAI,L1,IPMAX,NVAR,INPL)
      IF (IS.NE.0) GO TO 2000
      IOPT=2
      RETURN
 2000 IF(IS.LE.NP) GO TO 2010
      DO 2020 N=1,MP
 2020 H(N)=0.0
      H(IS+1-NP)=1.0
      GO TO 2050
 2010 DO 2030 N=1,MP
 2030 H(N)=A(N,IS)
 2050 CONTINUE
      CALL LPCR2(MP,IP,DELTA,IDEL,EPS,THETA,IEPS,LAMDA,IRW,H,YETA,
     1  BETA,IBV,IXTYPE,IR,IPMAX,INPL)
      IF(IRW.GT.0) GO TO 2100
      IF(MYU.EQ.1) GO TO 2100
      IOPT=3
      RETURN
 2100 CONTINUE
      CALL  LPCR3(MP,NVAR,MYU,THETA,IDEL,IEPS,DELTA,INS,LAMDA,IS,IP,
     1  IPMAX,IOPT,IRW,IR,BETA,H,IX,NBV,IBV,YETA)
      IF(IOPT.NE.4) GO TO 2222
      RETURN
 2200 CONTINUE
      WRITE (6,5070) IP
      IF(IFORM.EQ.1) GO TO 4444
C ***** 3-RD STEP *****
      WRITE(6,9193)
 9193 FORMAT(1H ,3X,19H*****3-RD STEP*****)
      IS=NP
      INS=NVAR
      IDEL=1
      MYU=0
      DO 3000 I=1,MP
      H(I)=A(I,IS)
 3000 U(I)=0.
       U(1)=1.
 4444 CONTINUE
      CALL CSOLIN(IBV,IXTYPE,XSOLUT,BETA,XUP,XLOW,NBV,IX,C,
     1  MP,NP,NVAR,INPL,EPS )
      IF(IFORM.EQ.1) GO TO 4445
 3333 CONTINUE
C        BOX E
       X0=XSOLUT(1)
        DO 300 I=1,NCONS
  300  X(I)=0.
        DO 310 I=2,N10+1
       II=I-1
  310 X(II)=XSOLUT(I)
 5400 FORMAT (1H ,8E15.7)
      CALL LPCR2(MP,IP,DELTA,IDEL,EPS,THETA,IEPS,LAMDA,IRW,H,YETA,
     1  BETA,IBV,IXTYPE,IR,IPMAX,INPL)
      IF(IRW.GT.0) GO TO 3100
       IF(MYU.EQ.1) GO TO 3100
      IOPT=1
      CALL UNBMYU(MP,BETA,H,DEL)
      CALL CSOLIN(IBV,IXTYPE,XSOLUT,BETA,XUP,XLOW,NBV,IX,C,
     1  MP,NP,NVAR,INPL,EPS )
C      BOX G
      XSOLUT(IS)=DEL
      DO 600 I=2,N10+1
       II=I-1
  600 X(II)=XSOLUT(I)
      X0=BETA(1)
      WRITE(6,5070) IP
       RETURN
 3100 CALL  LPCR3(MP,NVAR,MYU,THETA,IDEL,IEPS,DELTA,INS,LAMDA,IS,IP,
     1  IPMAX,IOPT,IRW,IR,BETA,H,IX,NBV,IBV,YETA)
      CALL CSOLIN(IBV,IXTYPE,XSOLUT,BETA,XUP,XLOW,NBV,IX,C,
     1  MP,NP,NVAR,INPL,EPS )
 5320 FORMAT (1H ,6HXSOLUT)
       IF(XSOLUT(1).LT.1.0) GO TO 3300
      CALL  NAISO(MP,NP,N10,X0,X,XSOLUT,IBV,INPL)
      IOPT=1
      WRITE(6,5070) IP
       RETURN
 3300 IF(IOPT.NE.4) GO TO 3400
       RETURN
 3400 CONTINUE
C          BOX F
       DO 500 I=1,NVAR
       IF(NBV(I).GE.NP+1) GO TO 510
      NOWZ(I)=1
       GO TO 500
  510 NOWZ(I)=0
  500 CONTINUE
      CALL  LISTER(MP,NVAR,M10,N10,NTP1,NTP2,NTP3,IM,IX,NBV,IBV,L1,NOWZ)
      CALL LPCR1(MP,NP,IP,IM,EPS,IS,INS,IDEL,MYU,IRW,IR,U,YETA,NBV,
     1  IXTYPE,A,IX,PAI,L1,IPMAX,NVAR,INPL)
```

```
       IF(IS.NE.0) GO TO 3500
      IOPT=2
      RETURN
 3500 IF(IS.LE.NP) GO TO 3510
      DO 3520 N=1,MP
 3520 H(N)=0.
       H(IS+1-NP)=1.
      GO TO 3550
 3510 DO 3530 N=1,MP
 3530 H(N)=A(N,IS)
 3550 CONTINUE
       GO TO 3333
 4445 DO 4446 I=1,N10
      II=I+1
 4446 X(I)=XSOLUT(II)
      WRITE (6,5070) IP
      IOPT=1
      RETURN
      END

      SUBROUTINE  NAISO(MP,NP,N10,X0,X,XSOLUT,IBV,INPL)
      DIMENSION  X(N10),XSOLUT(INPL),IBV(MP)
      WRITE(6,100)
  100 FORMAT(1H ,5X,13H### NAISO ###)
      Q2=XSOLUT(1)-X0
      Q1=(XSOLUT(1)-1.0)/Q2
      Q2=(1.0-X0)/Q2
      DO 3301 I=1,N10
      II=I+1
      X(I)=Q1*X(I)+Q2*XSOLUT(II)
 3301 CONTINUE
      X0=Q1*X0+Q2*XSOLUT(1)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE  UNBMYU(MP,BETA,H,DEL)
      DIMENSION  BETA(MP),H(MP)
      WRITE(6,300)
  300 FORMAT(1H ,5X,14H### UNBMYU ###)
      DEL=(BETA(1)-1.0)/H(1)
      DO 100 I=1,MP
      BETA(I)=BETA(I)-DEL*H(I)
  100 CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE  LISTER(MP,NVAR,M10,N10,NTP1,NTP2,NTP3,IM,IX,
     1   NBV,IBV,L1,NOWZ)
      DIMENSION NBV(NVAR),IBV(MP),L1(IM),NOWZ(NVAR),IX(NVAR)
 1000 FORMAT(1H ,5X,14H### LISTER ###)
      NHAT=NTP1+NTP2
      IM=1
      DO 900 K=1,NVAR
      IF(NOWZ(K).EQ.0) GO TO 900
      IF(NTP3.EQ.0) GO TO 50
      IF(NBV(K).GE.2.AND.NBV(K).LE.NTP3+1) GO TO 800
   50 IF(NTP2.EQ.0) GO TO 200
      NJ=NTP3+NTP2+1
      IF(NBV(K).LT.NTP3+2.OR.NBV(K).GT.NJ) GO TO 150
      I=2
  160 IF(NBV(K)+N10-NTP3.EQ.IBV(I)) GO TO 900
      IF(I.GE.MP) GO TO 800
      I=I+1
      GO TO 160
  150 NN=N10+NTP2+1
      IF(NBV(K).LT.N10+2.OR.NBV(K).GT.NN) GO TO 200
      I=2
  210 IF(NBV(K)-N10+NTP3.EQ.IBV(I)) GO TO 900
      IF(I.GE.MP) GO TO 800
      I=I+1
      GO TO 210
  200 IF(NTP1.EQ.0) GO TO 800
      IF(NBV(K).LT.N10-NTP1+2.OR.NBV(K).GT.N10+1) GO TO 250
      I=2
  260 IF(NBV(K)+N10-NTP3.EQ.IBV(I)) GO TO 900
      IF(I.GE.MP) GO TO 270
      I=I+1
      GO TO 260
  270 I=2
  280 NA=NBV(K)+2*NTP1+NTP2+M10
      IF(NA.EQ.IBV(I)) GO TO 900
      IF(I.GE.MP) GO TO 800
      I=I+1
      GO TO 280
  250 NB=N10+NTP2+2
      IF(NBV(K).LT.NB.OR.NBV(K).GT.N10+NHAT+1) GO TO 300
```

```
      I=2
310   IF(NBV(K)-N10+NTP3.EQ.IBV(I)) GO TO 900
      IF(I.GE.MP) GO TO 400
      I=I+1
      GO TO 310
400   N=1
410   IF(NBV(K)-N10+NTP3.EQ.NBV(N)) GO TO 420
      IF(N.GE.NVAR) GO TO 800
      N=N+1
      GO TO 410
420   IF(IX(N).EQ.1) GO TO 900
      GO TO 800
300   NC=N10+NHAT+M10+2
      IF(NBV(K).LT.NC.OR.NBV(K).GT.NVAR) GO TO 800
      I=2
360   ND=2*NTP1+NTP2+M10
      IF(NBV(K)-ND.EQ.IBV(I)) GO TO 900
      IF(I.GE.MP) GO TO 500
      I=I+1
      GO TO 360
500   N=1
510   IF(NBV(K)-ND.EQ.NBV(N)) GO TO 520
      IF(N.GE.NVAR) GO TO 800
      N=N+1
      GO TO 510
520   IF(IX(N).EQ.0) GO TO 900
      GO TO 800
800   L1(IM)=K+1
      IM=IM+1
900   CONTINUE
      IM=IM-1
      RETURN
      END

       SUBROUTINE  CSCALE(IXTYPE,IBV,NBV,INEQ,IX,NVAR,MP,NP,INPL,
     1BETA,XLOW,XUP,A)
      DIMENSION IXTYPE(INPL),IBV(MP),NBV(NVAR),INEQ(MP),IX(NVAR),
     1  BETA(MP),XLOW(NP),XUP(NP),A(MP,NP)
      DO 100 J=1,NP
      IF(IXTYPE(J).NE.1) GO TO 100
      XY=XUP(J)-XLOW(J)
      DO 150 I=1,MP
      BETA(I)=BETA(I)-A(I,J)*XLOW(J)
      A(I,J)=A(I,J)*XY
150   CONTINUE
100   CONTINUE
      DO 200 J=1,NVAR
      NBV(J)=J+1
      IX(J)=0
200   CONTINUE
      IBV(1)=1
      DO 300 I=2,MP
      INP=I-1+NP
      IBV(I)=INP
      IXTYPE(INP)=INEQ(I)
300   CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE  CSOLTN(IBV,IXTYPE,XSOLUT,BETA,XUP,XLOW,NBV,IX,C,
     1  MP,NP,NVAR,INPL,EPS)
      DIMENSION IBV(MP),IXTYPE(INPL),XSOLUT(INPL),BETA(MP),XUP(NP),
     1  XLOW(NP),NBV(NVAR),IX(NVAR),C(NP)
      DO 100 J=1,NP
100   XSOLUT(J)=0.
      DO 410 I=1,MP
      J=IBV(I)
      IF(IXTYPE(J).NE.1) GO TO 430
      XSOLUT(J)=BETA(I)*(XUP(J)-XLOW(J))+XLOW(J)
      GO TO 410
430   XSOLUT(J)=BETA(I)
410   CONTINUE
      DO 420 I=1,NVAR
      J=NBV(I)
      IF(IXTYPE(J).NE.1) GO TO 420
      IF(IX(I).EQ.1) GO TO 440
      XSOLUT(J)=XLOW(J)
      GO TO 420
440   XSOLUT(J)=XUP(J)
420   CONTINUE
      ZOBJ=0.
      DO 500 J=2,NP
500   ZOBJ=ZOBJ+C(J)*XSOLUT(J)
      XSOLUT(1)=ZOBJ
      RETURN
      END

      SUBROUTINE  LPCR1(MP,NP,IP,IM,EPS,IS,INS,IDEL,MYU,IRW,IR,U,YETA,
     1  NBV,IXTYPE,A,IX,PAI,L1,IPMAX,NVAR,INPL)
      DIMENSION  IR(IPMAX),U(MP),YETA(MP,IPMAX),NBV(NVAR),IXTYPE(INPL),
     1  A(MP,NP),IX(NVAR),       PAI(MP),L1(IM)
500   FORMAT(1H ,5X,13H### LPCR1 ###)
      DO 200 I=1,MP
      PAI(I)=U(I)
```

```
200 CONTINUE
    IF(IP.EQ.0) GO TO 210
    DO 220 K=1,IP
    PAIR=0.0
    IPKIPK=IP+1-K
    DO 230 I=1,MP
    PAIR=PAIR+PAI(I)*YETA(I,IPKIPK)
230 CONTINUE
    IRW=IR(IPKIPK)
    PAI(IRW)=PAIR
220 CONTINUE
210 CONTINUE
    D=1.0E8
    IS=0
    DO 380 KK=1,IM
    K=L1(KK)-1
    J=NBV(K)
    IXTYP=IXTYPE(J)
    II=K
    IF(IXTYP-1) 380,352,370
370 MYU1=0
    GO TO 320
352 MYU1=1
320 IF(J-NP) 375,375,376
375 ALPHA=0.0
    DO 330 I=1,MP
    ALPHA=ALPHA+PAI(I)*A(I,J)
330 CONTINUE
    GO TO 390
376 JNPJNP=J+1-NP
    ALPHA=PAI(JNPJNP)
390 CONTINUE
    IF(ALPHA.GE.-EPS.AND.ALPHA.LE.EPS) GO TO 380
    IF(ALPHA.LT.-EPS) GO TO 356
    IDEL1=-1
    IF(IXTYP.EQ.2) GO TO 380
    IF(IXTYP.EQ.3) GO TO 355
    IF(IX(II).EQ.0) GO TO 380
    GO TO 355
356 IDEL1=1
    IF(IXTYP.NE.1) GO TO 355
    IF(IX(II).EQ.1) GO TO 380
355 D1=FLOAT(IDEL1)*ALPHA
570 FORMAT(1H ,3HD1=,E15.7)
    IF(D.LE.D1) GO TO 380
    D=D1
    IS=J
    INS=II
    IDEL=IDEL1
    MYU=MYU1
380 CONTINUE
    RETURN
    END

    SUBROUTINE  LPCR2(MP,IP,DELTA,IDEL,EPS,THETA,IEPS,LAMDA,IRW,
   1  H,YETA,BETA,IBV,IXTYPE,IR,IPMAX,INPL)
    DIMENSION  H(MP),YETA(MP,IPMAX),BETA(MP),IBV(MP),IXTYPE(INPL),
   1  IR(IPMAX)
    IF(IP.EQ.0)GO TO 420
    DO 400 K=1,IP
    IRW=IR(K)
    Z=H(IRW)
    H(IRW)=0.0
    DO 400 I=1,MP
    H(I)=H(I)+Z*YETA(I,K)
400 CONTINUE
420 CONTINUE
    THETA=9.99E+50
    IRW=0
    DELTA=FLOAT(IDEL)
    DO 500 I=1,MP
    IBVAR=IBV(I)
    IF(IXTYPE(IBVAR).EQ.3) GO TO 500
    IF(H(I).GE.-EPS.AND.H(I).LE.EPS) GO TO 500
    IF(BETA(I).GE.-EPS.AND.BETA(I).LE.EPS) GO TO 52
    IF(DELTA*H(I)*BETA(I).LT.0.) GO TO 53
    THETA1=BETA(I)/(DELTA*H(I))
    IEPS1=0
    GO TO 55
 52 IF(DELTA*H(I).GT.0.) GO TO 54
    IF(IXTYPE(IBVAR)-1) 54,56,500
 53 IF(IXTYPE(IBVAR).NE.1) GO TO 500
    DHB=DELTA*H(I)*(BETA(I)-1.)
    IF(DHB.GE.-EPS.AND.DHB.LE.EPS) GO TO 58
    IF(DHB.GT.0.) GO TO 56
    GO TO 500
 54 THETA1=EPS/ABS(H(I))
    IEPS1=1
 55 LAMDA1=0
    GO TO 57
 56 THETA1=(BETA(I)-1.)/(DELTA*H(I))
    IEPS1=0
    LAMDA1=1
    GO TO 57
 58 THETA1=EPS/ABS(H(I))
    IEPS1=1
```

```
      LAMDA1=1
   57 CONTINUE
      IF(THETA.LE.THETA1) GO TO 500
      THETA=THETA1
      IRW=I
      IEPS=IEPS1
      LAMDA=LAMDA1
  500 CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE  LPCR3(MP,NVAR,MYU,THETA,IDEL,IEPS,DELTA,INS,LAMDA,
     1   IS,IP,IPMAX,IOPT,IRW,IR,BETA,H,IX,NBV,IBV,YETA)
      DIMENSION  IR(IPMAX),BETA(MP),H(MP),IX(NVAR),NBV(NVAR),IBV(MP),
     1   YETA(MP,IPMAX)
 1000 FORMAT(1H ,5X,13H### LPCR3 ###)
      IF(MYU.EQ.0) GO TO 61
      IF(THETA.GT.1.) GO TO 62
      MYU=0
      IF(IDEL.EQ.1) GO TO 61
      BETA(IRW)=1.
      GO TO 64
   61 BETA(IRW)=0.
   64 YETR=1./H(IRW)
      H(IRW)=-1.
      GO TO 63
   62 THETA=1.
   63 IF(IEPS.EQ.0) GO TO 630
      THETA=0.
  630 CONTINUE
      DO 600 I=1,MP
  600 BETA(I)=BETA(I)-DELTA*THETA*H(I)
      IF(MYU.EQ.0) GO TO 65
      IF(IDEL.EQ.1) GO TO 66
      IX(INS)=0
      GO TO 69
   66 IX(INS)=1
      GO TO 69
   65 NBV(INS)=IBV(IRW)
      IX(INS)=LAMDA
      IBV(IRW)=IS
      IP=IP+1
      IF(IP.LE.IPMAX) GO TO 68
      IOPT=4
      RETURN
   68 DO 620 I=1,MP
  620 YETA(I,IP)=-H(I)*YETR
      YETA(IRW,IP)=YETR
      IR(IP)=IRW
   69 CONTINUE
      DO 690 J=1,NVAR
      IF(IX(J).NE.1) GO TO 690
  690 CONTINUE
      RETURN
      END
```

7. あ と が き

この2次計画法のプログラムで用いているＬ P. は，著者らが開発した有界変数法による L. P. のコードを用いている。「有界変数法と積形式を用いた L. P. コードの作成」はこの工学部研究報告に同時に掲載される予定であるので，そちらを参照されたい。

文　　献

1) Wolfe, P.: Econometrica, Vol. 27, 3 (1959), p. 382–398.
2) H. P. キュンチ他：電子計算機のための数理計画法（昭44), p. 74, 日科技連。
3) W. オーチャード・ヘイズ：コンピューターによる線形計画法（昭48)，培風館。
4) 平本巌他：線形計画法（昭48)，培風館。