Title	Fuzzy-Fuzzy Relationについての一考察
Author(s)	宮腰, 政明; Miyakoshi, Masaaki; 佐藤, 義治 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 80, 89-92
Issue Date	1976-06-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41356
Type	departmental bulletin paper
File Information	80_89-92.pdf

北海道大学工学部研究報告
第80号(昭和51年)

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 80 (1976)

Fuzzy-Fuzzy Relation についての一考察

宮腰政明* 佐藤義治* 河口至商*

(昭和50年12月27日受理)

A Consideration on a Fuzzy-Fuzzy Relation

Masaaki MIYAKOSHI Yoshiharu SATO Michiaki KAWAGUHI

(Received December 27, 1975)

Abstract

The researches of a fuzzy relation based on the notion of fuzzy sets have been studied and the fuzzy set theory is applied to the fields of pattern recognition, cluctering technique and so on.

Here we formulate a fuzzy-fuzzy relation based on the notion of fuzzy-fuzzy sets which is an extended concept of fuzzy sets, and have investigated its algebraic structure. For the fuzziness which is essentially inherent in the thought process of human beings, the fuzzy-fuzzy relation is a more natural mathematical model than the fuzzy relation, and it appears that it is applicable to the field of soft-scienec.

1. 序 論

Fuzzy 集合論は，L. A. Zadeh[1] が，通常の集合の拡張として提案した概念である。たとえば，我々が日常生活に於いて接する，所謂“物の集り”には，「若人の集合」,「背の高い人の集合」という様なものであり，この様な“物の集り”は，従来の数学の意味で，集合とはなりえない。何故ならば，“若い”, “高い”という本質的に人間の主観に依存する性質によって，この集合に対するメンバシップが規定され，この意味で，メンバシップの境界が，不確実であるからである。Fuzzy 集合論は，この様に不確実さ (uncertainty) を持つ体系を取り扱うのに適している。すなわち，Fuzzy 集合論は，問題となる不確実さの原因が，randomness (客観的不確実さ) の原因である random variables の存在によるよりも，むしろ，クラス・メンバシップの明確に定義された基準の欠落に起因するような fuzziness (主観的不確実さ) をもった問題を取り扱う体系である。その工学的応用方面としては，パターン認識，システム工学，言語・オートマトン理論，人工知能問題等々がある。さらに，1975年，Zadeh[2~4] によって，Fuzzy 集合の一般化として，Fuzzy-Fuzzy 集合の概念が提案され，水本氏[5] によって，その代数的性質が研究されている。本論文では，特に，我々の日常生活に於いて用いられる，対象物間の定性的な関係の数学的モデルと考えられ，パターン認識，クラスタリング等で，重要な役割を果すと思われる fuzzy-fuzzy 関係の定式化とその代数的性質について若干の考察を行なった。

* 工学部情報数理工学第一講座

2. Fuzzy-Fuzzy 集合

ここでは，Fuzzy-Fuzzy 集合と，それらの和集合，共通部分の定義，および正規性，凸性について簡単に述べる。

Zadeh によれば，通常の意味の集合 X 上の Fuzzy-Fuzzy 集合 A は，次式で与えられるメンバシップ関数 μ_A によって特性づけられる集合である。

$$\mu_A:\quad X \longrightarrow [0,1]^J \tag{1}$$

ここで，J は単位閉区間 $[0,1]$ の任意の部分集合である。

通常の Fuzzy 集合では，要素 x に対するメンバシップの grade が $[0,1]$ の中の数値となるのに対して，Fuzzy-Fuzzy 集合の場合は，その grade が，J から $[0,1]$ への関数となる。$\mu_A(x)$ を，x に対する Fuzzy grade という。

さらに，Fuzzy-Fuzzy 集合の和集合，共通部分の定義は，Fuzzy grade に対する 2 項演算 $\cap$，$\cup$ によって以下の様に定義される。

X 上の Fuzzy-Fuzzy 集合 A, B のメンバシップ関数 $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$ を各々

$$\begin{aligned}\mu_A(x) &= \sum_i \alpha(u_i)/u_i \\ \mu_B(x) &= \sum_j \beta(v_j)/v_j\end{aligned} \tag{2}$$

とするとき，

$$\text{和 集 合）}\quad A\cup B \Longleftrightarrow \mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x)\cup\mu_B(x) = \left(\sum_i \alpha(u_i)/u_i\right)\cup\left(\sum_j \beta(v_j)/v_j\right) = \sum_{i,j} \alpha(u_i)\wedge\beta(v_j)/(u_i\vee v_j) \tag{3}$$

$$\text{共通部分）}\quad A\cap B \Longleftrightarrow \mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x)\cap\mu_B(x) = \left(\sum_i \alpha(u_i)/u_i\right)\cap\left(\sum_j \beta(v_j)/v_j\right) = \sum_{i,j} \alpha(u_i)\wedge\beta(v_j)/(u_i\wedge v_j) \tag{4}$$

である。ただし，$\wedge$，$\vee$ は各々，min, max の意味である。

Fuzzy grade が凸であるとは，$u, v\in J$, $u\leqq v$ に対して，$u\leqq w\leqq v$ なるすべての w について

$$\alpha(w) \geqq \left[\alpha(u)\wedge\alpha(v)\right] \tag{5}$$

が成立することである。

Fuzzy grade が正規であるとは，

$$\sup_{u\in J} \alpha(u) = 1 \tag{6}$$

が成立することである。

3. Fuzzy-Fuzzy 関係

(i) Fuzzy-Fuzzy 関係の定義

Fuzzy-Fuzzy 関係は，Fuzzy 関係[1] の自然な拡張として，次のように定義する。

集合 X と Y 上の Fuzzy-Fuzzy 関係 R は，$X\times Y$ 上の Fuzzy-Fuzzy 集合として定義され，そのメンバシップ関数 μ_R は次式で定義される。

$$\mu_R:\quad X\times Y \longrightarrow [0,1]^J \tag{7}$$

特に，$Y=X$ の場合，その Fuzzy-Fuzzy 関係は，X 上の2項 Fuzzy-Fuzzy 関係という。

(ii)　Fuzzy-Fuzzy 関係の合成

次に，Fuzzy-Fuzzy 関係の合成を定義する。X, Y, Z を通常の意味の集合，R を $X\times Y$ 上の Fuzzy-Fuzzy 関係，S を $Y\times Z$ 上の Fuzzy-Fuzzy 関係，そのメンバシップ関数 $\mu_R(x,y)$, $\mu_S(y,z)$ を各々

$$\begin{aligned}\mu_R:&\quad X\times Y\longrightarrow[0,1]^J\\ \mu_S:&\quad Y\times Z\longrightarrow[0,1]^J\end{aligned}\tag{8}$$

とする。このとき，R と S の合成 $S\circ R$ は，そのメンバシップ関数 $\mu_{S\circ R}(x,z)$ が

$$\mu_{S\circ R}(x,z)=\bigcup_y\Big[\mu_R(x,y)\cap\mu_S(y,z)\Big]\tag{9}$$

で与えられる $X\times Z$ 上の Fuzzy-Fuzzy 集合として定義する。

(iii)　Fuzzy-Fuzzy 関係の合成の結合性

一般の fuzzy grade に対して，2項演算 ∩，∪ が分配律を満足しないので，Fuzzy-Fuzzy 関係の合成も一般には結合的ではない。しかし，Fuzzy grade の凸性を仮定すれば凸 Fuzzy grade の族は，2項演算 ∩，∪ に対して，分配律を満足する[5]ので，その Fuzzy grade が凸であるような凸 Fuzzy-Fuzzy 関係の合成は結合的となる。すなわち凸 Fuzzy-Fuzzy 関係 R, S, T について

$$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)\tag{10}$$

が成立し，この合成の結果もまた，凸 Fuzzy-Fuzzy 関係となる。

特に，そのFuzzy grade が凸であり，かつ正規であるような，凸正規 Fuzzy-Fuzzy 関係 R, S, T については以下の事が成立する。

$$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T),\qquad \varDelta\circ R=R\circ\varDelta=R\tag{11}$$

ここで，$\varDelta$ は，次の条件を満足する Fuzzy-Fuzzy 対角関係である。

$$\begin{aligned}&\text{a)}\quad \mu_\varDelta(x,x)=\mathbf{1}=1/1\qquad \forall x\in X\\ &\text{b)}\quad \mu_\varDelta(x,y)=\mathbf{0}=1/0\qquad \forall x,y\in X,\ x\neq y\end{aligned}\tag{12}$$

4.　Fuzzy-Fuzzy 行列

ここでは，Fuzzy-Fuzzy 関係は，ある有限な個体の集合 $I=\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$ 上の2項 Fuzzy-Fuzzy 関係だけを考える。

有限集合 I 上の2項 Fuzzy-Fuzzy 関係 R の表現としての Fuzzy-Fuzzy 行列 $A=M(R)$ を，その (i,j) 要素が $\mu_R(I_i,I_j)$ であるような n 次正方行列として定義する。

$$A=M(R)=\Big[\mu_R(I_i,I_j)\Big]\tag{13}$$

以下，簡単のために，普通の行列の様に，$\mu_R(I_i,I_j)=a_{ij}$ と書く。

2つの n 次正方 Fuzzy-Fuzzy 行列を $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ とすれば，A と B の行列積 $A\circ B$ は，次式で定義される。

$$C=A\circ B=[C_{ij}]=\Big[\bigcup_k(a_{ik}\cap b_{kj})\Big]\tag{14}$$

行列積 $A\circ B$ は，Fuzzy-Fuzzy 行列 A, B で表現される I 上の2項 Fuzzy-Fuzzy 関係 R, S の合成 $S\circ R$

$$M(S\circ R)=M(R)\circ M(S)=A\circ B\tag{15}$$

を表現している。3. で述べた様に，一般に Fuzzy-Fuzzy 関係の合成は結合的ではないのでその表現としての Fuzzy-Fuzzy 行列の行列積も，一般には結合的ではない。しかし，凸 Fuzzy-Fuzzy 関係については，関係の合成は結合的であるので，その表現としての凸 Fuzzy-Fuzzy 行列，すなわち，すべての要素の Fuzzy grade が凸性を有するような行列について，その行列積も結合的である。すなわち，凸 Fuzzy-Fuzzy 行列 A, B, C について，

$$(A\circ B)\circ C = A\circ(B\circ C) \tag{16}$$

が成立し，かつ，この行列積の結果もまた凸 Fuzzy-Fuzzy 行列となる。

また，I 上の 2 項 Fuzzy-Fuzzy 関係の対角関係 Δ の表現行列を E とすれば，I 上の n 次正方正規凸 Fuzzy-Fuzzy 行列，すなわち，すべての要素の Fuzzy grade が凸性と正規性を有するような行列の族は，行列積 $\circ$ の演算の下で，モノイドとなり，任意の正規凸 Fuzzy-Fuzzy 行列 A, B, C について

$$(A\circ B)\circ C = A\circ(B\circ C), \qquad A\circ E = E\circ A = A \tag{17}$$

が成立し，かつ，この行列積の結果も正規凸 Fuzzy-Fuzzy 行列となる。最後に，正規凸 Fuzzy-Fuzzy 行列に対して半順序関係 $\leqq$[5] を導入し，正規凸 Fuzzy-Fuzzy 行列について成立する，ある性質について述べる。

正規凸 Fuzzy-Fuzzy 行列 A, B について，半順序関係 $\leqq$ を，

$$\begin{aligned} A \leqq B \Longleftrightarrow a_{ij} \leqq b_{ij} \text{ for all } i,j &\Longleftrightarrow a_{ij}\cap b_{ij} = a_{ij} \text{ for all } i,j \\ &\Longleftrightarrow a_{ij}\cup b_{ij} = b_{ij} \text{ for all } i,j \end{aligned} \tag{18}$$

で定義する。

n 次正方正規凸 Fuzzy-Fuzzy 行列 A が，その対角要素 a_{ii} が $1=1/1$ という条件を満足するとき，$E \leqq A$ となり，この様な正規凸 Fuzzy-Fuzzy 行列 A に対して，

$$E \leqq A \leqq A^2 \leqq A^3 \leqq \cdots \leqq A^{n-1} = A^n = \cdots \tag{19}$$

が成立する。ただし，A^k は，A の k 個の行列積（冪乗）を意味している。

5. 結　　論

以下で，Fuzzy-Fuzzy 関係と，Fuzzy-Fuzzy 行列に対する定式化とその代数的性質に関する若干の考察を述べた。

Fuzzy-Fuzzy 集合は，従来の Fuzzy 集合よりもさらに，人間の思考過程等に，本質的に内在する fuzziness の，より自然な数学的定式化を与えるものである。その意味で本文中で議論された Fuzzy-Fuzzy 関係は，対象物間の関係に対する，人間の本質的に定性的な判断基準の，より自然な数学的モデルを与えるものと考えられる。たとえば，その類似の度合が，基本的に人間の主観的判断に依存するような問題に対するパターン認識，クラスタ分析等に適用する事が出来ると思われる。

参 考 文 献

1) L. A. Zadeh: Information and Control **8**, 338–353 (1965).
2) L. A. Zadeh: Information Science **8**, 199–249 (1975).
3) L. A. Zadeh: Information Science **8**, 301–357 (1975).
4) L. A. Zadeh: Information Science **9**, 43–80 (1975).
5) 水本雅晴: 信学会論文誌 '75/7, Vol. 58–D, No. 7.