北海道大学工学部研究報告
第80号（昭和51年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 80 (1976)

双線形因子分析モデル

佐藤義治* 河口至商*

（昭和50年12月27日受理）

Bilinear Factor Analysis Model

Yoshiharu SATO Michiaki KAWAGUCHI

(Received December 27, 1975)

Abstract

The Factor analysis has been carried out from the beginning of this century and the origine of this analysis is the two-factor theory which was set forth for the researche of mental faculties by C. Spearman in 1904.

Later several factor models are proposed by various psychologists or mathematicians, for example, Centroid method by L. L. Thurstone, Principal factor model by H. Hotelling and Radex model by L. Gattman etc are available in the literature.

However, in traditional factor analysis, the adopted data type is restricted to the type of two way (or rectangular type). Thus in this paper, we proposed a certain factor analysis model, for data of three way type, namely, the values of several variables are observed from individual data units and many discerte time points. And we have proposed a method of mathematical analysis for our factor model.

1. 序　論

因子分析とは，その対象となるものが，いくつかの共通な因子からなる構造をもつものと考えられるとき，その未知の因子を，対象から得られる多変量のデータをもとに推定しようとするものである。ただし，その因子構造は従来の手法においては，線形であるものと仮定する。すなわち，各変量 x_i について

$$x_i = \sum_{k=1}^{m} l_{ik} f_k + e_i \qquad (i=1, 2, \cdots, p) \tag{1}$$

なる線形関係を仮定する。このとき，m 個の f_k を共通因子，l_{ik} を因子負荷量，さらに e_i を独自因子（残差を含む）といい，(1)のことを因子分析モデルと呼ぶ。ここに右辺の量はすべて未知のものであり，これらを各変量の観測値をもとに推定する。N 個のサンプル

$$x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{iN} \qquad (i=1, 2, \cdots, p) \tag{2}$$

が得られているものとし，このサンプルからなる行列を $\boldsymbol{X}$ で表わし，各変量間の相関行列（又は分散共分散行列）を $\boldsymbol{R}$ とするとき，(1)なるモデルの下においては，

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}' + \boldsymbol{E}$$

* 情報数理工学第一講座

と書くことができる*。ただし，$\boldsymbol{L}$ は $p\times m$ の因子負荷行列であり，$\boldsymbol{E}$ は各 e_i の分散を対角要素としてもつ対角行列である。因子分析の基本的な考え方は，

$$\boldsymbol{R}^* \equiv \boldsymbol{R}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}'$$

なる $\boldsymbol{R}^*$ においては未知な量はその対角要素だけであるので，それを適当に推定し，$\boldsymbol{R}^*$ を2つの行列の積 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}'$ に分解する問題として還元することができる。ただし $\boldsymbol{L}$ に含まれるパラメータ m (因子数) を最小にするという条件を付加する。

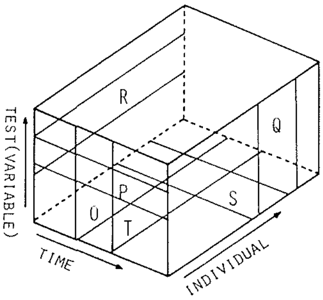

図1 キャテルによる因子分析の6つの技法

従来の因子分析では，データ(2)の見方によって分析の技法がつぎのように分類されている。すなわち，図1に示すように分析の対象と考えられる3つの要素に関して，何をこの分析の変量と考え，どの方向に関して相関 (共分散) を考えるかということである。従って，その見方により，O, P, Q, R, S, T というそれぞれ6つの技法に分類されている。

本論文では，図1のようなデータに対して，これを全体的に見ることにする。すなわち(2)のようなタイプのデータは，図1の各平面上で考えているのであるが，ここではデータのタイプが立体的に与えられているものとする。これに対し(1)に対応するモデルを仮定することにより分析を行なうとするものである。

2. データの基準化

ここでは次のように問題の設定を行なう。データは，何種類かの変量について，それぞれ何個かの個体と，さらにいくつかの時点 (あるいは場所，環境等) でその値が観測されているものとする。このとき，各変量間の関係をもとに，その変量の値を説明する共通の因子を推定する。

そのために，各変量 x_i $(i=1,2,\cdots,M)$ について，K 個の個体と L 個の時点で観測されたデータ

$$x_{1kl},\ x_{2kl},\ \cdots,\ x_{Mkl} \qquad (k=1,2,\cdots,K\,;\ l=1,2,\cdots,L)$$

が与えられているものとする。変量 x_i と x_j を任意に選び，それらの関係 (相関関係) を考える場合に，従来のように2つの観測ベクトルの関係としてとらえることはできない。すなわち，i と j を固定してもそれぞれ k, l の2方向への自由度をもっている。従ってこのような量を扱うためには，ベクトル空間では扱えず，これを拡張したテンソル空間の量として扱わなければならない。

一方テンソル空間の理論において，その空間にメトリックを導入することが可能であることが知られている[1)]。すなわち，任意の p, q に対して，テンソル空間 U_q^p (反変 p 次，共変 q 次のテンソルの全体) における内積 (inner product) をつぎのように定義する。$\boldsymbol{w}$ を U_{2p}^{2q} の要素とし，t, t' を U_q^p の要素とする。このときこれらのテンソル積 $\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{t}\otimes\boldsymbol{i}'$ は $U_{2(p+q)}^{2(p+q)}$ の要素と考えられる。このテンソルに対し，適当な $2(p+q)$ 個の対に対して縮約を行なうことにより，あるスカラー $C(\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{t}\otimes t')$ を得る。すなわち

$$(\boldsymbol{t},\boldsymbol{t}')\longrightarrow C(\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{t}\otimes\boldsymbol{t}')$$

なる写像は $U_q^p\times U_q^p\rightarrow R$ (実数体) への双線形写像である。そこで $\boldsymbol{w}$ をある適当な基底 $\boldsymbol{b}=\{\boldsymbol{u}_1,$

---

* このように表わすことのできる条件として，各因子は互いに独立であり，かつ f_k は平均0，分散1，e_i の分散は v_i であるということがモデル(1)に付加されているものとする。

$\boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ に関してその成分が

$$g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_q j_q} g_{h_1 k_1} \cdots g_{h_p k_p}$$

なるものと考えると

$$C(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{t} \otimes \boldsymbol{t}') = g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_q j_q} g_{h_1 k_1} \cdots g_{h_p k_p} t_{i_1 \cdots i_q}^{h_1 \cdots h_p} t'^{k_1 \cdots k_p}_{j_1 \cdots j_q}$$

と表わすことができる。ここに $t_{i_1 \cdots i_q}^{h_1 \cdots h_p}$ は基底 $\boldsymbol{b}$ に関する t の成分であり t' についても同様である。従ってこれにより t と t' の内積を

$$(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}') = C(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{t} \otimes \boldsymbol{t}')$$

として定義する。$\boldsymbol{b}$ として直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ をとるとき，この内積は

$$(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}') = \sum_{(i,h)} t_{i_1 \cdots i_q}^{h_1 \cdots h_p} t'^{h_1 \cdots h_p}_{i_1 \cdots i_q}$$

となり，特に $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}'$ のときには

$$(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}) = \sum (t_{i_1 \cdots i_q}^{h_1 \cdots h_p})^2$$

となる。この量を用いて，テンソル t の大きさを

$$\|\boldsymbol{t}\| = \left\{(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}')\right\}^{1/2}$$

と定義し，これによって U_q^p にメトリックを導入することができる。

以上の考え方を背景として，各変量ごとにデータの基準化を行ない，さらには2つの変量の相関等を求める。変量 x_i に対し，その観測値 x_{ikl} $(k=1, 2, \cdots, K;\ l=1, 2, \cdots, L)$ からつぎのような量を定義する。

$$x_i^* = \frac{1}{KL} \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} x_{ikl}$$

$$\tilde{x}_{ikl} = \frac{1}{KL} (x_{ikl} - x_i^*)$$

$$\|\tilde{x}_i\| = \left\{\sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} \tilde{x}_{ikl}^2\right\}^{1/2}$$

これより，変量 x_i に関する基準化された量として，

$$t_{ikl} = (x_{ikl} - x_i^*)/\|\tilde{x}_i\|$$

を用いることにする。以下本論文では，データはすべて基準化されているものとして議論する。そのため，生のデータ x_{ikl} と区別するため，各変量を t_i，その値を t_{ikl} 等によって表わす。

3. 因子分析モデル

因子分析の基本的な考え方は，序論にも述べたように，各変量に(1)なる線形関係を仮定することである。従来の分析の対象となるデータのタイプに対しては，(1)のような単純な線形関係でその分析が可能であったわけであるが，本論文で対象とするようなデータに対して，

$$t_i = \sum_{\alpha=1}^{p} l_{i\alpha} f_\alpha + e_i$$

なる線形モデルにより得られる因子では，個体に依存する共通な因子と，時間に依存する共通な因子の区別をすることは不可能であり，その意味を明確にすることはできない。従って，ここではその両者を区別して同時に求め，さらにそれらの関係をも推定しようとするものである。そのために，各変量に関しては

$$t_i=\sum_{\omega=1}^{p}\sum_{\lambda=1}^{q}b_{i\omega\lambda}g_\lambda f_\omega+e_i \tag{3}$$

変量の値に関しては

$$t_{ikl}=\sum_{\omega=1}^{p}\sum_{\lambda=1}^{q}b_{i\omega\lambda}g_{\lambda l}f_{\omega k}+e_{ikl} \tag{4}$$

な双線形なモデルを仮定する。このモデルはその特殊な場合として(1)のモデルを含んでいることは，(3)を

$$t_i=\sum_{\omega=1}^{p}\left(\sum_{\lambda=1}^{q}b_{i\omega\lambda}g_\lambda\right)f_\omega+e_i$$

と書き，ここで

$$\sum_{\lambda=1}^{q}b_{i\omega\lambda}g_\lambda=a_{i\omega} \tag{5}$$

とおくことにより

$$t_i=\sum_{\omega=1}^{p}a_{i\omega}f_\omega+e_i \tag{6}$$

として考えることができることから明らかである。ここで以下の解析のためにつぎのような仮定をする。

$$\text{(i)}\quad \frac{1}{KL}\sum_k\sum_l e_{ilk}e_{jlk}=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ v_i & (i=j)\end{cases}$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{1}{KL}\sum_l\sum_k g_{\lambda l}f_{\mu k}e_{ilk}=0$$

$$\text{(iii)}\quad \frac{1}{K}\sum_k f_{\omega k}=0,\qquad \frac{1}{L}\sum_l g_{\lambda l}=0$$

$$\text{(iv)}\quad \frac{1}{K}\sum_k f_{\omega k}f_{\mu k}=\delta_{\omega\mu},\qquad \frac{1}{L}\sum_l g_{\lambda l}g_{\nu l}=\delta_{\lambda\nu}$$

4. 解 析 方 法

変量 t_i と t_j との相関関係をテンソルの内積を用いてつぎのように定義する。

$$r_{ij}=\frac{1}{KL}\sum_l\sum_k t_{ilk}t_{jlk}$$

これに因子分析モデル(4)を代入し，g, f, e に関する仮定(i), (ii), (iii), (iv)を用いると

$$\begin{aligned} r_{ij}&=\frac{1}{KL}\sum_l\sum_k\left\{\sum_\omega\sum_\lambda b_{i\omega\lambda}g_{\lambda l}f_{\omega k}+e_{ikl}\right\}\left\{\sum_\mu\sum_\nu b_{j\mu\nu}g_{\nu l}f_{\mu k}+e_{jlk}\right\}\\ &=\sum_\omega\sum_\lambda b_{i\omega\lambda}b_{j\omega\lambda}\qquad (i\neq j)\\ r_{ii}&=\sum_\omega\sum_\lambda b_{i\omega\lambda}^2+v_i \end{aligned}$$

なる関係を得る。他方このモデルは，(5), (6)が同時に成り立つモデルと考えることができることにより

$$r_{ij}=\sum_\omega\sum_\lambda b_{i\omega\lambda}b_{j\omega\lambda}=\frac{1}{L}\sum_l\sum_\omega a_{i\omega l}a_{j\omega l}$$

$$r_{ii}=\sum_{\omega}\sum_{\lambda}b_{i\omega\lambda}^2+v_i=\frac{1}{L}\sum_{l}\sum_{\omega}a_{i\omega l}^2+\sum_{\omega}v_{i\omega}{}^*$$

と書くことができる。そこで因子負荷量 $b_{i\omega\lambda}$ を決定するために，まず $a_{i\omega l}$ を求める。すなわち

$$s_{ijl}\equiv\frac{1}{K}\sum_{k}t_{ilk}t_{jlk}=\sum_{\omega}a_{i\omega l}a_{j\omega l}$$

$$s_{iil}\equiv\sum_{\omega}a_{i\omega l}^2+v_{il}$$

$$r_{ij}=\frac{1}{L}\sum_{l}s_{ijl}$$

とおき，$\boldsymbol{S}_l$ なる $M\times M$ 行列をつぎのように定義する。

$$\boldsymbol{S}_l=\begin{bmatrix} s_{11l}-v_{1l} & s_{12l} & \cdots & s_{1Ml} \\ s_{21l} & s_{22l}-v_{2l} & \cdots & s_{2Ml} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ s_{M1l} & s_{M2l} & \cdots & s_{MMl}-v_{Ml} \end{bmatrix}.$$

さらに $a_{i\omega l}$ からなる $M\times p$ 行列 $\boldsymbol{A}_l$ を

$$\boldsymbol{A}_l=\begin{bmatrix} a_{11l} & a_{12l} & \cdots a_{1pl} \\ a_{21l} & a_{22l} & \cdots a_{2pl} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{M1l} & a_{M2l} & \cdots a_{Mpl} \end{bmatrix}$$

と表わすならば，問題は最小の p で，各 $s_{iil}-v_{il}$ を最大にするように行列 $\boldsymbol{S}_l$ を

$$\boldsymbol{S}_l=\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{A}_l'$$

と分解することとなる。ここでは，これを主因子法により解くことにする。すなわち

$$\sum_{i}s_{iil}=\sum_{i}\sum_{\omega}a_{i\omega l}^2$$

なる量（ここでは $s_{iil}-v_{il}$ を改めて s_{iil} とおくことにする）を条件

$$s_{ijl}=\sum_{\omega}a_{i\omega l}a_{j\omega l} \tag{7}$$

の下で最大にする $a_{i\omega l}$ を求める。そのためにまず $p=1$ として，

$$W=\sum_{i}a_{i1l}^2$$

を (7) の下で最大にする a_{i1l} を求める。従ってラグランジュの未定乗数 μ_{jk} を用いて

$$2U=\sum_{i}a_{i1l}^2-\sum_{j}\sum_{k}\mu_{jk}\left(\sum_{\omega}a_{j\omega l}-a_{k\omega l}-s_{jkl}\right)$$

なる U に対して，a_{i1l} それぞれについて微分し，それらを 0 とおくと

$$\frac{\partial U}{\partial a_{j1l}}=a_{j1l}-\sum_{k}\mu_{jk}a_{k1l}=0 \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

$$\frac{\partial U}{\partial a_{i\mu l}}=-\sum_{k}\mu_{jk}a_{k\mu}=0 \qquad (j=,2,\cdots,M;\ \mu=2,3,\cdots,p)$$

となる。これらをまとめてつぎのように書く。

$$\delta_{1\mu}a_{j\mu l}-\sum_{k}\mu_{jk}a_{k\mu l}=0 \tag{8}$$

* $v_{i\omega}$ に関しては後述する。

上式に a_{j1l} を乗じて，j で和をとると

$$\delta_{1\mu}\sum_j a_{j1l}^2-\sum_j\sum_k \mu_{jk}a_{j1l}a_{k\mu l}=0$$

となり，さらに(8)の関係を用い，

$$\lambda_1=\sum_i a_{i1l}^2$$

とおくことにより

$$\delta_{1\mu}\lambda_1-\sum_k a_{k\mu l}a_{k1l}=0 \tag{9}$$

が得られる。(9)に $a_{j\mu l}$ を掛けて μ で和をとり(7)を用いると

$$\sum_k s_{jkl}a_{k1l}-\lambda_1 a_{j1l}=0 \qquad (j=1,2,\cdots,M)$$

となり，これを行列を用いて表わすとつぎのようになる。

$$\boldsymbol{S}_l\boldsymbol{a}_{1l}-\lambda_1\boldsymbol{a}_{1l}=0$$

すなわち上式は

$$(\boldsymbol{S}_l-\lambda_1\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{a}_{1l}=0 \tag{10}$$

と書くことができ，第1因子負荷量 a_{i1l} は行列 $\boldsymbol{S}_l$ の最大の固有値に対応する固有ベクトルの定数倍として求めることができる。その条件は

$$\lambda_1=\sum_j a_{j1l}^2$$

である。この第1因子負荷量 $\boldsymbol{a}_{1l}$ に対して

$$\boldsymbol{S}_{1l}=\boldsymbol{S}_l-\boldsymbol{a}_{1l}\boldsymbol{a}'_{1l}$$

なる $\boldsymbol{S}_{1l}$ について，さらに

$$W_2=\sum_i a_{i2l}^2$$

を条件(7)の下で最大にする $\boldsymbol{a}_{2l}=(a_{i2l})$ を求めそれを第2因子負荷量とする。その導出過程は第1因子負荷量と同様であり(10)の形の固有方程式が得られ，$\boldsymbol{a}_{2l}$ は行列 $\boldsymbol{S}_l$ の固有ベクトルであることが証明できるため，結局 $\boldsymbol{a}_{2l}$ は $\boldsymbol{S}_l$ の2番目に大きい固有値に対応する固有ベクトルの定数倍として

$$\lambda_2=\sum_i a_{i2l}^2$$

から求めることができ，以下同様に p 個の因子負荷量を求めることができる*。

次にこのようにして求まる $\boldsymbol{A}_l$ に対し，(5)のモデル

$$a_{i\omega l}=\sum_\lambda b_{i\omega\lambda}g_\lambda$$

を用いて $b_{i\omega\lambda}$ を求めるわけであるが，ここでは ω を固定して考えるため，$a_{i\omega l}$ が共通因子 $g_{\lambda l}$ で完全に説明されるとは限らず，ω と l に関する独自因子 $e_{i\omega l}$ が入ってくる。上式で考えているときには，この独自因子と共通因子の区別をしていないことになる。従ってこの意味において上式をより正確に

$$a_{i\omega l}=\sum_\lambda b_{i\omega\lambda}g_{\lambda l}+e_{i\omega l} \tag{11}$$

と書くことにし，$e_{i\omega l}$ に対して，つぎのような仮定をする。

---

* 実際に何個まで因子を求めるかということに関しては，文献(2), (3)を参照されたい。

$$\text{(i)}\quad \frac{1}{L}\sum_l e_{i\omega l}=0\quad ,\qquad \frac{1}{L}\sum_l e_{i\omega l}^2=v_{i\omega}$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{1}{L}\sum_l g_{\lambda l}e_{i\omega l}=0\,,\qquad \frac{1}{p}\sum_\omega e_{i\omega l}f_{\omega k}=0$$

この仮定の下で(11)を用いて

$$c_{ij\omega}=\frac{1}{L}\sum_l a_{i\omega l}a_{j\omega l}$$

とおくと

$$\begin{aligned} c_{ij\omega}&=\frac{1}{L}\sum_l\left(\sum_\lambda b_{i\omega\lambda}g_{\lambda l}+e_{i\omega l}\right)\left(\sum_\mu b_{i\omega\mu}+g_{\mu l}+e_{j\omega l}\right)\\ &=\sum_\lambda b_{i\omega\lambda}b_{j\omega\lambda}\\ c_{ii\omega}&=\sum_\lambda b_{i\omega\lambda}^2+v_{i\omega}\end{aligned}$$

を得る。ここで $\boldsymbol{C}_\omega$ なる行列を

$$\boldsymbol{C}_\omega=\begin{bmatrix} c_{11\omega} & c_{12\omega} & \cdots c_{1M\omega}\\ c_{21\omega} & c_{22\omega} & \cdots c_{2M\omega}\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ c_{M1\omega} & c_{M2\omega} & \cdots c_{MM\omega}\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix} c_{11\omega}-v_{1\omega} & c_{12\omega} & \cdots & c_{1M\omega}\\ c_{21\omega} & c_{22\omega}-v_{2\omega}\cdots & & c_{2M\omega}\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ c_{M1\omega} & c_{M2\omega} & & \cdots c_{MM\omega}-v_{M\omega}\end{bmatrix}$$

とし，$(b_{i\omega\lambda})$ よりなる行列を $\boldsymbol{B}_\omega$ とし

$$\boldsymbol{B}_\omega=\begin{bmatrix} b_{1\omega1} & b_{1\omega2} & \cdots b_{1\omega q}\\ b_{21\omega} & b_{2\omega2} & \cdots b_{2\omega q}\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ b_{M\omega1} & b_{M\omega2} & \cdots b_{M\omega q}\end{bmatrix}$$

で表わすことにより問題は $\boldsymbol{C}_\omega$ を $\boldsymbol{B}_\omega$ の積

$$\boldsymbol{C}_\omega=\boldsymbol{B}_\omega\boldsymbol{B}_\omega'$$

に分解することに還元される。この $\boldsymbol{B}_\omega$ を求めるためには，$\boldsymbol{A}_l$ を求めた方法と同様に主因子法により

$$(\boldsymbol{C}_\omega-\lambda\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{b}_\omega=0$$

なる固有方程式の固有値（大きさの順にとる）に対応する固有ベクトルの定数倍として求めることができる。このようにして求めた $\boldsymbol{B}_\omega(\omega=1,2,\cdots,p)$ の成分により

$$\begin{aligned} r_{ij}&=\sum_\omega\sum_\lambda b_{i\omega\lambda}b_{j\omega\lambda}\\ r_{ii}&=\sum_\omega\sum_\lambda b_{i\omega\lambda}^2+v^i\end{aligned}$$

なる関係式を満たすことがわかる。

5. 結　　論

以上の解析方法により，因子分析の対象となる3つの要素，すなわち，変量（テスト），個体，時間（あるいは場所，環境等）を同時に分析を行なうことが可能となるのである。従来の手法では，これら3つの要素からそれぞれ2つずつ取り出して分析を行なっていることになる。そのとき，例えば，変量と個体の関係すなわちR技法により分析を行なう際にもし変量の値が時間に依存している場合に，求まる因子には時間の因子が含まれてくるのであるが，それを知ることはで

きない。ここで述べた手法によりそのような場合の考察が可能である。すなわち双線形なモデル(3)において f_{ω} を個体に依存する共通な因子，g_{λ} を時間に依存する共通な因子とするとき，f_{ω} あるいは g_{λ} のいずれかを固定したときの他の負荷量を見ることによって，それぞれの因子パターンを解釈をすることに意味があるのである。ここでは3つの要素を同時に分析を行なう理論的な根拠を示しただけであるので，この分析の計算実験，あるいは実際の応用については次の機会に述べることとしたい。

参 考 文 献

1) Mostow, G. D., Sampson, J. H. and Meyer, J. P.: Fundamental Stractures of Algebra (1963), p. 514, McGraw-Hill.

2) Lawley, D. N. and Maxwell, A. E.: Factor Analysis as a Statistical Method (1963), Butterworth.

3) 芝 祐順: 因子分析法 (1954), 東京大学出版会.

4) Guilford, J. P.: Psychometric Method (1954), p. 470, McGrow-Hill.