



Title	非対称応力場に関する二・三の注意
Author(s)	新保, 勝; 河口, 至商
Citation	北海道大學工學部研究報告, 80, 75-79
Issue Date	1976-06-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41362
Type	departmental bulletin paper
File Information	80_75-80.pdf



非対称応力場に関する二・三の注意

新 保 勝* 河 口 至 商*

(昭和 50 年 12 月 27 日受理)

A Note on Asymmetric Stress Fields

Masaru SHIMBO and Michiaki KAWAGUCHI

(Received December 27, 1975)

Abstract

It has been pointed out in a geometrical formulation of asymmetric features in plasticity by one of the present authors that volumetric strain gradient may be entailed by asymmetric stress. In this paper, a few remarks are supplemented to this with special regard to the distortion of a sliding plane in an asymmetric stress field.

1. ま え が き

物体を構成する粒子をぬりつぶして連続体と考える立場で変形を考えると、Euclid 空間に対応する一定の位相と計量を持つ連続体からのずれは塑性的な不完全性を表わす¹⁾。従って、この不完全な連続体は局所的には Euclid 空間である非 Euclid 空間に対応する。故に、一般の変形は非 Riemann 幾何学における捩率で代表される非 Euclid 的属性と曲率で代表される非 Euclid 的属性とを含んでいる。物理的実体としては前者が転位に、後者が転傾 (disclination) に該当する。

物質要素に微視的な下限があるような粒状変形体についても同様に考えることができる。この場合には、各要素は変位に基く回転とは独立な回転の自由度を持つために、応力や歪は概念を拡張して一般的に非対称量として扱う必要がある。著者の一人は以前、上記の幾何学的塑性論の枠内で非対称諸量を把握することを試み、応力の反対称部と体積変形の間に成立する一つの関係式を得た²⁾。本論文では、この関係式の意味する幾何学像から導かれる一つの帰結を補足すると共に、非対称描象の若干の物理的解釈について述べる。

2. 非 対 称 描 象

物質が三次元空間内に占める点 x^i ($i=1, 2, 3$) を物質点と称する。変形状態にある物質内の攪乱を荷うのは物質要素 dx^i である。この要素を物質から切取って無応力、無歪のいわゆる自然状態³⁾においたものを $(dx)^{i'}$ ($i'=1, 2, 3$) とする。 $dx^{i'}$ の代りに $(dx)^{i'}$ と書くのはこれらの要素間の関係

* 工学部 情報数理工学第一講座

* Division of Information Engineering, Graduate School of Engineering, Hokkaido University, Sapporo 060, Japan.

$$(dx)^{i'} = (\delta_i^{i'} + \varepsilon_i^{i'}) dx^i \quad (1)$$

が必ずしも全微分の形にならないためである(図1)。ただし、繰返し指標に関しては総和規約を採用し、 $\delta_i^{i'}$ は Kronecker のデルタ、 $\varepsilon_i^{i'}$ は変形テンソルで物質点 x^i の関数である。なお

$$\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ji}^{j'} \delta_{j'i} \quad (2)$$

は一般に指標 i, j に関して非対称である。以下、簡単のために $\varepsilon_i^{i'}$ は微小量として扱う。

物質要素の長さは自然状態における要素が Euclid 的に実現可能であるとして

$$ds^2 = g_{ji} dx^i dx^j \quad (3)$$

と表わせる。ただし

$$g_{ji} = \delta_{ji} + 2\varepsilon_{(ji)} \quad (4)$$

は計量テンソル、 $\varepsilon_{(ji)} = (\varepsilon_{ji} + \varepsilon_{ij})/2$ は通常の変位の定義である。攪乱がなければ g_{ji} は δ_{ji} となり、式(3)は Euclid 的計量となる。

式(4)から明らかなように、変形テンソル ε_{ji} の反対称部分は計量的欠陥には無関係である。この部分の寄与は次のような意味を持つ。通常の点連続体における応力の対称性は微小物質要素のモーメントの釣合から導かれる。しかし、粒状変形体におけるように有限な下限を持つ要素を考えるならば、この要素は並進のみならず、回転の自由度を持ち、応力の対称性はもはや保証されない。このように物質の各点に方向が付随したと考えられる連続体を Cosserat 連続体と称する⁴⁾。式(4)の変形テンソルは例えば

$$\varepsilon_{(ji)} = \partial_{(j} u_{i)}, \quad \varepsilon_{[ji]} = \partial_{[j} u_{i]} + \omega_{ji} \quad \left(\partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \quad (5)$$

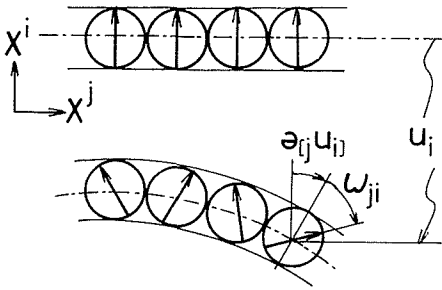


図 2

とおくことができる。ただし、 u^i は変位、 $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$ は変位に基づく回転 $\partial_{[j} u_{i]} = (\partial_j u_i - \partial_i u_j)/2$ に独立な回転である。図2に図式的に一次元の例で $\partial_{[j} u_{i]}$ と ω_{ji} の関係を示す⁵⁾。

変形状態における接続関係は自然状態における Euclid 空間の平行性を基準に導入する。式(1)の変換に際しては

$$\Gamma_k^{i'} dx^k = \delta_i^{i'} d\varepsilon_i^{i'}$$

となり、接続係数 $\Gamma_k^{i'}$ は一般に dx^k の関数である。特に、変形物質から切出した要素の方向が固定されていれば

$$\Gamma_{kji} = \delta_{ih} \Gamma_k^{h'} \delta_{j'i} = \partial_k \varepsilon_{ji}$$

であり³⁾、振率は式(5)を用いて

$$S_{kji} = \Gamma_{[kji]} = \partial_{[k} \omega_{j]i} \quad (6)$$

となる。また、曲率は零となるから、式(4)を計量テンソルに持つ空間は遠隔平行性空間である。

3. 体 積 変 形

物質が等方的であるとして、応力 σ_{ji} の反対称部分と回転 ω_{ji} の間に摩擦法則

$$\sigma_{[ji]} = A\omega_{ji} \quad (7)$$

を仮定する⁶⁾。ただし、 A は物質定数である。式 (6) から

$$S_i = \partial^{jk} S_{ikj} = \frac{1}{2} \partial^j \omega_{ji} \quad (\partial^j = \partial^{jk} \partial_k) \quad (8)$$

を得る。式 (8) はテンソル方程式ではないが、微小な攪乱を扱う限り、他の座標系でも同様の関係が成立つ。式 (7), (8) から

$$S_i = -\frac{1}{2A} \partial^j \sigma_{[ji]} \quad (9)$$

を得る。すなわち、ベクトル S_i を零にしないような非対称応力の場が存在する。

ベクトル S_i の物理的意味は次のごときものである。例えば、 $i=1$ に対しては

$$S_1 = S_{12}^2 + S_{13}^3 = -S_{21}^2 - S_{31}^3$$

の成分以外は零である。 $S_{12}^2 = -S_{21}^2$ は x^3 軸にそって平行な刃状転位で、Burgers ベクトル

の向きは x^2 軸方向である。他方で $S_{13}^3 = -S_{31}^3$ は x^2 軸方向にそい、Burgers ベクトルの向きは x^3 軸方向である (図 3⁷⁾)。この事実は x^1 軸にそって S_1 に比例する勾配をもって異物質が分布していることを示す。いいかえると、物質密度の変化を体積変化とみなせば、 S_i は x^i 方向の体積歪の場所的な変化に関与することになる。故に、前節の結果は、応力の反対称部の不連続性により体積歪に変化が生ずることを意味する。

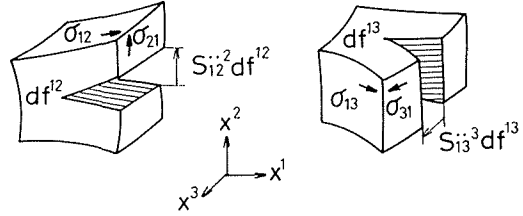


図 3

4. 剪断すべり面

式 (9) は非対称な剪断応力と体積歪の関係を与えるものであるから、これに該当する具体例は非対称な剪断応力、すなわち

$$\sigma_{[ji]} \neq 0,$$

が生ずるような現象の中から選ぶ必要がある。例えば、式 (9) で $i=1$ に対しては

$$S_1 = -\frac{1}{2A} (\partial^2 \sigma_{[21]} + \partial^3 \sigma_{[31]}) \quad (10)$$

であり、これは x^2 方向への $\sigma_{[21]}$ の勾配と x^3 方向への $\sigma_{[31]}$ の勾配の和が x^1 方向への体積歪をもたらすことを意味している。

また、このような剪断応力の非対称性は図式的に図 4 に示すように互にすべり合う粒の層が分離される面で生ずると考えられる。これはすべり面と平行な面 ($x^2 = \text{const.}$) 上で相接する粒状体は抵抗なく回転するとすれば、すべり面に垂直な方向 ($x^1 = \text{const.}$) の剪断応力は一般には零でなくなり、非対

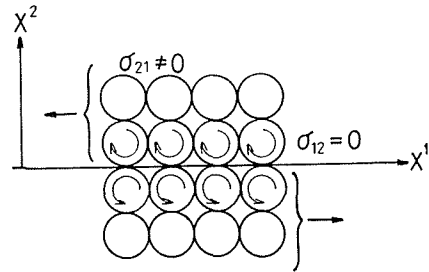


図 4

称応力

$$\sigma_{21} \neq \sigma_{12}$$

が生ずると考えられる。このとき、 S_i の存在はすべり面の上部と下部で過密になったり、過疎になったりし、ひいてはすべり面上の各点でこの有様が変化することを意味する。この過密あるいは過疎の量は不規則と考えられるから、元来すべり面から等距離にある面は変形後不規則に変化するものと予想される⁸⁾。

この状況はすべり面に垂直方向の剪断応力の反対称部によく知られた Janssen の公式を適用することで理解されよう。簡単のために重力を無視すれば、すべり面の上半部および下半部に対してそれぞれ

$$\sigma_{[21]} = \begin{cases} e^{-ax^2} f(x^1) & (x^2 \geq 0), \\ e^{ax^2} f(x^1) & (x^2 \leq 0) \end{cases} \quad (11)$$

とおける。ここで、 a は任意の正定数で、 $f(x^1)$ は x^1 の任意な関数である (図 5)。更に、 $\sigma_{[31]}$ の分布は一定であると仮定すると

$$\partial^3 \sigma_{[31]} = 0$$

であり、 $\sigma_{[31]}$ の分布は体積歪に寄与しない。式 (10), (11) から

$$S_1(x^1, x^2) = \begin{cases} -\frac{a}{2A} e^{-ax^2} f(x^1) & (x^2 \geq 0) \\ \frac{a}{2A} e^{ax^2} f(x^1) & (x^2 \leq 0) \end{cases} \quad (12)$$

式 (12) で $x^2=0$ とおけば、直ちに

$$S_1(x^1, 0) = -af(x^1) \quad \text{および} \quad af(x^1)$$

すなわち、体積歪の不均衡が出る。明らかに、すべり面の上半部と下半部で異符号であることから、ここで得られるすべり面はゆがみを生じていることがわかる。

今、二次元粒状変形体の内部で

$$x^i = 0 \quad \text{および} \quad x^i = \text{const.} \quad (i=1, 2, 3)$$

で囲まれた領域を考える。ただし、 x^3 方向の変形は考えず、 x^1 方向の境界面は拘束されているものとする。 $x^2=0$ 面をすべり面とし、この面の両側に剪断応力が働き、その分布は式 (11) で与えられるとする。上記の結果から、応力の非対称性により、 $x^2=0$ のすべり面にゆがみを生じ、 x^1, x^3 方向が拘束されていることから、この部分の体積変化は x^2 方向の長さの伸縮に現れる。 $x^2=\text{const.}$ 面付近の歪は従って

$$\int_0^H S_1(x^1, x^2) dx^2 + g(0) \quad (13)$$

で計算される。ただし、 H はすべり面から $x^2=\text{const.}$ 面までの距離であり、 $g(0)$ は $x^2=0$ 付近における歪である。このような例はおそらく土質力学⁹⁾ や地震学^{10), 11)} においてその応用を見出し得るように思われる。後者の場合には (13) で表わされる量は地球表面における変位の変動率を与えることになる。

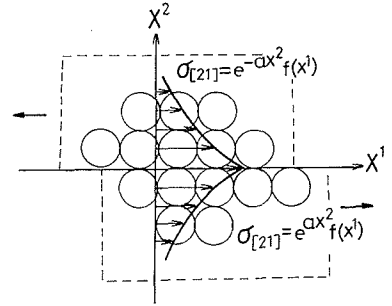


図 5

文 献

- 1) 近藤一夫：材料科学, 1 (1964), p. 10, p. 63.
- 2) Shimbo, M.: Bull. Fac. Engng., Hokkaido Univ., 77 (1975), p. 155.
- 3) Amari, S.: RAAG Memoirs, 3 (1962), p. 99.
- 4) Cosserat, E. and F.: Théorie des corps déformables (1909), Hermann.
- 5) Günther, W.: Abh. Braunsch. Wiss. Ges., 10 (1958), p. 195.
- 6) Oshima, N.: Memoirs, 1 (1955), p. 565.
- 7) Iri, M.: RAAG Research Notes, 3, 129 (1968).
- 8) Shimbo, M.: ibid., 167 (1971).
- 9) 最上武雄 (編): 土質力学 (昭 44), 技報堂.
- 10) Scholz, C. H., Sykes, L. R. and Aggarwal, Y. P.: 科学, 43 (1973), p. 541.
- 11) Teisseyre, R.: PAGEOPH, 102, 1 (1973), p. 15.