HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	構造的に曲線直交異方性を有する板の理論
Author(s)	韮沢, 憲吉
Citation	北海道大學工學部研究報告, 80, 1-12
Issue Date	1976-06-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41365
Type	departmental bulletin paper
File Information	80_1-12.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第80号（昭和51年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 80 (1976)

構造的に曲線直交異方性を有する板の理論

韮沢憲吉*

（昭和50年12月27日受理）

Theory of the Structurally Curvilinear Orthotropic Plate

Noriyoshi NIRASAWA

(Received December 27, 1975)

Abstract

A curved steel deck plate stiffened by tangential and radial ribs on one side is structurally curvilinear orthotropic. In this paper, a theory of the structurally curvilinear orthotropic plate is described.

The fundamental differential equations are first introduced in polar coordinates. In these equations, the full interaction between the deck plate and the ribs is considered exactly, and it is shown that because of eccentricity of ribs, the bending and in-plane problems of a steel deck plate can not be discussed separately. The solutions in both problems of out-plane and in-plane deformations are obtained. For practical examples, a curved deck plate with various edge conditions was analyzed, and bending moments, deflections and normal stresses in the deck plate were presented.

1. 序　　論

板に補剛材を1方向または直交する2方向に接合させて，剛性の増加を期待する補剛板構造は，土木構造のみならず，機械，建築，造船，航空などの諸工学の構造の分野においても一般的である。このような構造の解析は，ミクロ的には折板理論，有限帯板法，有限要素法などにより局所応力の評価および解析精度の検討が行なわれるが，マクロ的に構造全体の挙動を得るには直交異方性板理論が用いられることが多い。

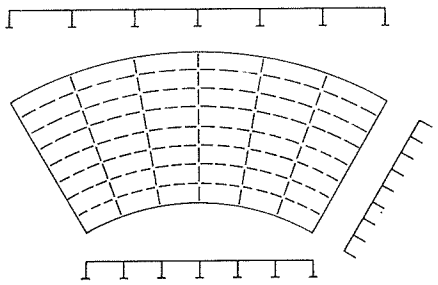
直交異方性板の研究は，その曲げについて，M. T. Huber[1] が微分方程式を提案したのに始まる。以後，多くの研究者によって，その方程式を基礎として研究が行なわれてきたが，Huber 式は材料的に直線直交異方性を有する等厚板に関する式であるため，他の構造形態をなす板の解析への適用については，いくつかの問題点が指摘されている。それで，構造的に直交異方性を有する板の解析に適用できる微分方程式が，A. Pflüger[2] によって誘導され，K. Trenks[3] がその式に解を与え，解析例を示している。さらに，E. Giencke[4] はリブのねじり剛性を考慮して，より厳密な式を提案している。

直線直交異方性板に対して，極座標の各軸と異方性の軸が一致する場合の，曲線直交異方性板の研究は，その曲げの問題について，芳村[5] の研究がある。芳村の誘導した微分方程式は，材料的に曲線直交異方性を有する板に関する式であって，直線直交異方性板の Huber 式に対応する

* 土木工学科構造力学講座

ものである。さらに芳村は，曲線直交異方性変厚板[6]についても，その微分方程式を誘導し，扇形平板の解析を行なっている。

ところで，例えば，曲線橋における曲鋼床版のような構造を取扱う場合，その構造は一般に，板にリブが円周方向に接合され，またさらにそれと直交して放射状にも接合されている。このような板は，その異方性の軸が極座標の各軸に一致することになり，構造的に曲線直交異方性を有しているものと考えられる。芳村は，このような構造についても，半径方向に曲げ剛性の変化する変剛度板として微分方程式を誘導し，解析している[7]。その研究においては，曲げ変形問題にのみ注目し，リブの偏心による影響は考慮していない。しかし，実際の鋼床版構造はその上面が車両交通に供されるため，リブが下面にのみ配置された片面補剛板構造であるので，中立面がデッキプレートの中央面より低下することになる。このため，曲げ変形とともに面内変形も起り，その関係を考慮した解析が必要となる。



図—1 曲鋼床版構造

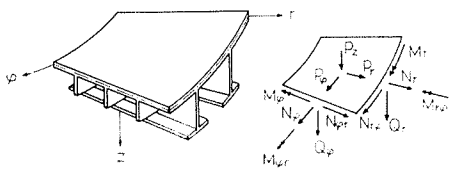
この報告においては，直交異方性板のこれまでの研究をふまえて，曲鋼床版のようにリブによって偏心補剛された，構造的に曲線直交異方性を有する板の挙動を表現する基礎方程式を誘導し，それが，4階の三元連立偏微分方程式となることを示す。この際，デッキプレートは二次元応力状態，リブは単軸応力状態として取扱い，両者の接合部においてひずみの適合を満足させ，リブのねじり剛性をも考慮に入れる。誘導された微分方程式は，面内変形と曲げ変形の両者の相互作用も表現し，偏心補剛板においては，もはや，それらを独立に扱えないことが明らかとなる。次に，その微分方程式を直角座標系に変換すると，直線直交異方性板の Giencke 式に一致すること，および，リブの偏心の影響などを無視して充実板の方程式に変換すると芳村の式に対応することを示して，その方程式の位置づけを行なう。さらに，縦リブで補剛される扇形平板の解を，鉛直荷重の作用する場合とせん断荷重の作用する場合について誘導する。最後に，数値解析例を示す。

解析においては，板理論で通常用いられている仮定の他に，次の仮定を用いる。(1) 面内せん断力はデッキプレートのみによって受持たれる。(2) 反り応力は無視する。(3) リブの配置は十分に密である。

2. 基礎方程式の誘導と検討

2·1 基礎方程式の誘導

座標はデッキプレートの中央面内に，r, φ 軸をとり，それと直角方向下向きに z 軸をとる。まず，断面力は次のように表わされる。



図—2 板要素と断面力

$$\left.\begin{aligned}
&N_r=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_r\,dz+\int_{F_r}\bar{\sigma}_r\,dF_r, \qquad N_\varphi=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_\varphi\,dz+\int_{F_\varphi}\bar{\sigma}_\varphi\,dF_\varphi\\
&N_{r\varphi}=N_{\varphi r}=\int_{-t/2}^{t/2}\tau_{r\varphi}\,dz\\
&M_r=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_r z\,dz+\int_{F_r}\bar{\sigma}_r z\,dF_r, \qquad M_\varphi=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_\varphi z\,dz+\int_{F_\varphi}\bar{\sigma}_\varphi z\,dF_\varphi\\
&M_{r\varphi}=\int_{-t/2}^{t/2}\tau_{r\varphi}z\,dz+\bar{M}_{r\varphi}, \qquad M_{\varphi r}=\int_{-t/2}^{t/2}\tau_{\varphi r}z\,dz+\bar{M}_{\varphi r}
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ここで，σ_r, σ_φ, $\tau_{\varphi r}$, $\tau_{r\varphi}$ はデッキプレートの応力，$\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\varphi$ はリブの応力，t はデッキプレートの板厚，F_r, F_φ は単位幅あたりのリブの断面積，$\bar{M}_{r\varphi}$, $\bar{M}_{\varphi r}$ はリブによって抵抗される単位幅あたりのねじりモーメントである。

応力とひずみの関係は，ポアソン比を ν として，

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_r=\left\{E/(1-\nu^2)\right\}(\varepsilon_r+\nu\varepsilon_\varphi), \qquad \sigma_\varphi=\left\{E/(1-\nu^2)\right\}(\varepsilon_\varphi+\nu\varepsilon_r)\\
&\tau_{r\varphi}=\tau_{\varphi r}=\left\{E/2(1+\nu)\right\}\gamma_{r\varphi}\\
&\bar{\sigma}_r=E\bar{\varepsilon}_r, \qquad \bar{\sigma}_\varphi=E\bar{\varepsilon}_\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

一方，変位とひずみの関係は，$z=z$ の点の r, φ, z 軸方向の変形を u_z, v_z, w_z として，それぞれ，

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_r=\partial u_z/\partial r, \qquad \varepsilon_\varphi=(1/r)(\partial v_z/\partial\varphi+u_z)\\
&\gamma_{r\varphi}=(1/r)(\partial u_z/\partial\varphi-v_z)+\partial v_z/\partial r\\
&\bar{\varepsilon}_r=\partial u_z/\partial r, \qquad \bar{\varepsilon}_\varphi=(1/r)(\partial v_z/\partial\varphi+u_z)
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

また，デッキプレートの中央面での変形 u, v, w と u_z, v_z, w_z との関係は，

$$u_z=u-z(\partial w/\partial r), \qquad v_z=v-z(1/r)(\partial w/\partial\varphi), \qquad w_z=w \tag{4}$$

であるから，(3), (4) 式を (2) 式に代入して，

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_r=\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial u}{\partial r}-z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\nu\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}-z\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+u-z\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right\}\\
&\sigma_\varphi=\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}-\frac{z}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{u}{r}-\frac{z}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial u}{\partial r}-z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)\right\}\\
&\tau_{r\varphi}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+2z\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}-2z\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\varphi}\right\}\\
&\bar{\sigma}_r=E\left\{\frac{\partial u}{\partial r}-z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right\}\\
&\bar{\sigma}_\varphi=E\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{u}{r}-\frac{z}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{z}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

従って，断面力と変位の関係は，(5) 式を (1) 式に代入して，

$$\left.\begin{aligned}
&N_r=\frac{Et}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial u}{\partial r}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{u}{r}\right)\right\}+E\left\{F_r\frac{\partial u}{\partial r}-S_r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right\}\\
&N_\varphi=\frac{Et}{1-\nu^2}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{u}{r}+\nu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right\}+E\left\{F_\varphi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{u}{r}\right)-S_\varphi\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right\}\\
&N_{r\varphi}=N_{\varphi r}=\frac{Et}{2(1+\nu)}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right\}\\
&M_r=-\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right)\right\}+E\left\{S_r\frac{\partial u}{\partial r}-J_r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$
\left.\begin{aligned}
M_\varphi &= -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left\{\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right\}\\
&\quad +E\left\{S_\varphi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{u}{r}\right)-J_\varphi\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right\}\\
M_{r\varphi} &= \left\{-\frac{Et^3}{12(1+\nu)}-2B_{r\varphi}\right\}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial \varphi}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)\\
M_{\varphi r} &= \left\{-\frac{Et^3}{12(1+\nu)}-2B_{\varphi r}\right\}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial \varphi}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)
\end{aligned}\right\}
$$

ここで，$2B_{r\varphi}$, $2B_{\varphi r}$ は単位幅あたりのリブのねじり剛性，S_r, S_φ, J_r, J_φ は単位幅あたりのリブの $z=0$ 面に関する断面一次および二次モーメントである。

ところで，断面全体が一様なひずみになるとき，軸方向応力 σ の合力の位置を考えると，r 方向断面と φ 方向断面のそれぞれについて，$z=0$ 面より，

$$
e_r=\frac{S_r}{t/(1-\nu^2)+F_r}, \qquad e_\varphi=\frac{S_\varphi}{t/(1-\nu^2)+F_\varphi} \tag{7}
$$

の位置である。従って，この e_r, e_φ は断面の実際上の重心への，デッキプレート中央面からの距離を表わす。この重心の位置において曲げモーメントを考えて，$*$ を付して表わすと，

$$
\left.\begin{aligned}
M_r^* &= M_r-e_rN_r\\
&= -\left[\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}+EJ_r-(1-\nu^2)\frac{ES_r^2}{\{t+(1-\nu^2)F_r\}}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\\
&\quad -\nu\left[\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right\}+\frac{ES_rt}{t+(1-\nu^2)F_r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{u}{r}\right\}\right]\\
M_\varphi^* &= M_\varphi-e_\varphi N_\varphi\\
&= -\left[\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}+EJ_\varphi-(1-\nu^2)\frac{ES_\varphi^2}{\{t+(1-\nu^2)F_\varphi\}}\right]\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\\
&\quad -\nu\left[\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{ES_\varphi t}{t+(1-\nu^2)F_\varphi}\frac{\partial u}{\partial r}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{8}
$$

となる。ここで，M_r^*, M_φ^* の右辺の第1項目の［　］の中が，その断面の曲げ剛性を与える。

次に，デッキプレートに作用している荷重強度を p_r, p_φ, p_z として，板要素のつりあいを考えると，断面力の間に次の関係が成立する。

$$
\frac{\partial N_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial N_{\varphi r}}{\partial \varphi}+\frac{1}{r}(N_r-N_\varphi)=-p_r \tag{9·1}
$$

$$
\frac{1}{r}\frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}(N_{r\varphi}+N_{\varphi r})=-p_\varphi \tag{9·2}
$$

$$
\frac{\partial Q_r}{\partial r}+\frac{1}{r}Q_r+\frac{1}{r}\frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi}=-p_z \tag{9·3}
$$

$$
\frac{\partial M_r}{\partial r}+\frac{M_r-M_\varphi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial M_{\varphi r}}{\partial \varphi}-Q_r=0 \tag{9·4}
$$

$$
\frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{M_{r\varphi}+M_{\varphi r}}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi}-Q_\varphi=0 \tag{9·5}
$$

これらの式のうち，後の三式から Q_r, Q_φ を消去すると，

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\left(2\frac{\partial M_r}{\partial r}-\frac{\partial M_\varphi}{\partial r}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 M_{r\varphi}}{\partial r\,\partial \varphi}+\frac{\partial^2 M_{\varphi r}}{\partial r\,\partial \varphi}\right)\\
&\qquad -\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{\partial M_{\varphi r}}{\partial \varphi}\right)-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2}=p_z
\end{aligned} \tag{9·6}
$$

以上のように得られた(9·1), (9·2), (9·6)式に(6)式を代入してやると，変位に関する方程式が得られる。このとき，一般に F_φ, S_φ, J_φ, $B_{\varphi r}$ は r, φ に関して一定であるが，F_r, S_r, J_r, $B_{r\varphi}$ は r の関数であることに注意して，次の記号，

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{F}_r=\left\{t/(1-\nu^2)\right\}+F_r, \qquad \bar{F}_\varphi=\left\{t/(1-\nu^2)\right\}+F_\varphi\\
&\bar{J}_r=\left\{t^3/12(1-\nu^2)\right\}+J_r, \qquad \bar{J}_\varphi=\left\{t^3/12(1-\nu^2)\right\}+J_\varphi\\
&\bar{J}_{r\varphi}=\left\{t^3/12(1-\nu^2)\right\}+(1/E)(B_{r\varphi}+B_{\varphi r})
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

を用いると，その最終結果は，

$$\bar{F}_r\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\bar{F}_\varphi\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{u}{r^2}\right)+\frac{t}{2(1+\nu)}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)+\frac{t}{2(1-\nu)}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\varphi}$$
$$+\frac{\partial F_r}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial S_r}{\partial r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-S_r\left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)+S_\varphi\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial r}\right)=-\frac{p_r}{E} \tag{11}$$

$$\bar{F}_\varphi\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)+\frac{t}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)$$
$$+\frac{t}{2(1-\nu)}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}-S_\varphi\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial\varphi^3}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\varphi}\right)=-\frac{p_\varphi}{E} \tag{12}$$

$$\bar{J}_r\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}+2\left(\bar{J}_r+r\frac{\partial J_r}{\partial r}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}-\left(\bar{J}_\varphi-2r\frac{\partial J_r}{\partial r}-r^2\frac{\partial^2 J_r}{\partial r^2}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\bar{J}_\varphi\frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r}$$
$$+2\bar{J}_{r\varphi}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial r^2\partial\varphi^2}-2\left(\bar{J}_{r\varphi}-\frac{r}{E}\frac{\partial B_{r\varphi}}{\partial r}\right)\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\varphi^2}+2\left(\bar{J}_\varphi+\bar{J}_{r\varphi}-\frac{r}{E}\frac{\partial B_{r\varphi}}{\partial r}\right)\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}$$
$$+\bar{J}_\varphi\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}-S_r\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}-2\left(\frac{S_r}{r}+\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\left(\frac{2}{r}\frac{\partial S_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 S_r}{\partial r^2}\right)\frac{\partial u}{\partial r}$$
$$-S_\varphi\left\{\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}+u\right)-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}+u\right)+\frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}+u\right)\right\}=\frac{p_z}{E} \tag{13}$$

と得られる。この三元連立偏微分方程式がリブで片面補剛された，構造的に曲線直交異方性を有する板の基礎微分方程式である。これらの三式のうち，(11), (12)式は面内変形に関する方程式，(13)式は曲げ変形に関する方程式であるが，面内変形の式にたわみ w，曲げ変形の式に u, v が入っていて，面内変形と曲げ変形の相互作用を表わし，三式のうちの一式または二式のみを独立には扱えないことが明らかである。

もし，横リブの断面が半径方向に一定であって，その配置が曲率の中心から放射状であれば，F_r, S_r, J_r, $B_{r\varphi}$ は半径の逆数に比例することから，一般に，

$$f_r=f_0(r_0/r) \qquad f_0:\ r=r_0 \text{ での値} \tag{14}$$

とおきかえられ，そのときの基礎方程式は容易に誘導される。

2·2　基礎方程式の検討

いま，(11), (12), (13)式において，$r\to\infty$, $\partial/\partial r\to\partial/\partial x$, $(1/r)(\partial/\partial\varphi)\to\partial/\partial y$ として，直角座標系に変換すると，

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{F}_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{t}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{t}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-S_x\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=-\frac{p_x}{E}\\
&\bar{F}_y\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{t}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{t}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-S_y\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}=-\frac{p_y}{E}\\
&\bar{J}_x\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\bar{J}_{xy}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\bar{J}_y\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-S_x\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-S_y\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}=\frac{p_z}{E}
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

と直線直交異方性板について Giencke が誘導した式になる。従って，(11), (12), (13)式は，Giencke

の厳密式に対応する，構造的曲線直交異方性板の厳密式といえる。また，(15) 式において，リブのねじり剛性を無視すると，Pflüger の誘導した式になる。

次にリブが板の両面に対称に配置されている場合を考えると，断面の中立面とデッキプレートの中央面が一致することになり，このときの基礎方程式は，$S_r=S_\varphi=0$ とおいて次のように得られる。

$$\bar{F}_r\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\bar{F}_\varphi\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{u}{r^2}\right)+\frac{t}{2(1+\nu)}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)$$
$$+\frac{t}{2(1-\nu)}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial \varphi}+\frac{\partial F_r}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{p_r}{E} \tag{16}$$

$$\bar{F}_\varphi\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)+\frac{t}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)+\frac{t}{2(1-\nu)}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \varphi}=-\frac{p_\varphi}{E} \tag{17}$$

$$\bar{J}_r\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}+2\left(\bar{J}_r+r\frac{\partial J_r}{\partial r}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}-\left(\bar{J}_\varphi-2r\frac{\partial J_r}{\partial r}-r^2\frac{\partial^2 J_r}{\partial r^2}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\bar{J}_\varphi\frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r}$$
$$+2\bar{J}_{r\varphi}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial r^2\partial \varphi^2}-2\left(\bar{J}_{r\varphi}-r\frac{\partial B_{r\varphi}}{\partial r}\right)\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial \varphi^2}$$
$$+2\left(\bar{J}_\varphi+\bar{J}_{r\varphi}-r\frac{\partial B_{r\varphi}}{\partial r}\right)\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\bar{J}_\varphi\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4}=\frac{p_z}{E} \tag{18}$$

この場合，(16), (17) 式は面内変形のみの，(18) 式は曲げ変形のみの方程式となる。特に (18) 式は，補剛板と充実板の違いにより諸剛性の評価は異なるが，芳村の直線直交異方性変厚板の方程式[6]と同じ形である。さらに，(18) 式において，異方性が位置によって変化しない場合を考えて，J_r, $B_{r\varphi}$ の偏微分項を消すと，芳村の等厚板の式[5]に対応することがわかる。

またさらに，リブのない場合を考えて，(11), (12), (13) 式より，リブに関する項を消すと，等方性扇形平板の面内変形および曲げ変形を表わす微分方程式となる。

3. 基礎方程式の解

3·1 余　　解

縦リブで補剛される扇形板の解を誘導する。まず，デッキプレートの単位幅あたりの伸び剛性を EF, 曲げ剛性を D とする。

$$EF=Et/(1-\nu^2),\qquad D=Et^3\Big/\left\{12(1-\nu^2)\right\} \tag{19}$$

次に，デッキプレートとリブの諸剛性の関係を明確にするために，次の記号を定義する。

$$\left.\begin{aligned}
d&=\frac{(\varphi\text{ 方向単位幅あたりの伸び剛性})}{(r\text{ 方向単位幅あたりの伸び剛性})}=\frac{F+F_\varphi}{F}\\
e&=\frac{(\varphi\text{ 方向断面の重心の }z\text{ 座標：}\ e_\varphi)}{(\text{デッキプレートの板厚})}=\frac{1}{t}\frac{S_\varphi}{F+F_\varphi}\\
f&=\frac{(\varphi\text{ 方向単位幅あたりの曲げ剛性})}{(r\text{ 方向単位幅あたりの曲げ剛性})}=\frac{D+EJ_\varphi-(1-\nu^2)\,ES_\varphi^2/\{t+(1-\nu^2)F_\varphi\}}{D}\\
g&=\frac{(\varphi\text{ 方向単位幅あたりのねじり剛性})}{(r\text{ 方向単位幅あたりのねじり剛性})}=\frac{(1-\nu)D+2B_{\varphi r}}{(1-\nu)D}
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

これらの記号を用いて，基礎方程式を書き改めると，

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)-d\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{u}{r^2}\right)+\frac{1}{2}(1-\nu)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)$$
$$+\frac{1}{2}(1+\nu)\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial \varphi}+det\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial r}\right)=-\frac{p_r}{EF} \tag{21·1}$$

$$d\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{d\varphi^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{2}(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)$$
$$+\frac{1}{2}(1+\nu)\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}-det\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial\varphi^3}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\varphi}\right)=-\frac{p_\varphi}{EF} \tag{21·2}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}+2\frac{1}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}-(f+12\,de^2)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r}-2\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}\right)$$
$$+\left\{(1-\nu)g+(1+\nu)\right\}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial r^2\partial\varphi^2}-\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right)$$
$$-12\,de\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^3}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}+u\right)=\frac{p_z}{D} \tag{21·3}$$

この連立微分方程式の一般解は，8個の積分定数を含む余解と特解の和で表わされる。まず，余解を，

$$w=Ar^{\lambda+1}\sin\omega\varphi\,,\qquad u=Br^{\lambda}\sin\omega\varphi\,,\qquad v=Cr^{\lambda}\cos\omega\varphi \tag{22}$$

と仮定して，(21)式の右辺＝0とおいたものに代入すると，それぞれ，

$$\left[\lambda^2-d-\left\{(1-\nu)/2\right\}\omega^2\right]B+\left[-\left\{(1+\nu)/2\right\}\omega\lambda+d\omega+\left\{(1-\nu)/2\right\}\omega\right]C=-\,det\,(\lambda-\omega^2+1)\,A \tag{23·1}$$

$$\left[\left\{(1+\nu)/2\right\}\omega\lambda+d\omega+\left\{(1-\nu)/2\right\}\omega\right]B+\left[\left\{(1-\nu)/2\right\}(\lambda^2-1)-d\omega^2\right]C=det\,\omega(\lambda-\omega^2+1)\,A \tag{23·2}$$

$$\left[\lambda^4-\left\{(1-\nu)\,\omega^2 g+(1+\nu)\,\omega^2+1+f+12\,de^2\right\}\lambda^2+(f+12\,de^2)(\omega^2-1)^2\right]A$$
$$+12\,de\,(1/t)(\lambda+\omega^2-1)(B-\omega C)=0 \tag{23·3}$$

となる。前の二式より，B, C と A の関係は次のように得られる。

$$B=(\Delta_2^1/\Delta_2)\,A\,,\qquad C=(\Delta_2^2/\Delta_2)\,A \tag{24}$$

ここで，Δ_2, Δ_2^1, Δ_2^2 は，

$$\left.\begin{aligned}
\Delta_2&=\left\{(1-\nu)/2\right\}\lambda^4-\left[(d-\nu)\,\omega^2+\left\{(1-\nu)/2\right\}(d+1)\right]\lambda^2+\left\{(1-\nu)/2\right\}d(\omega^2-1)^2\\
\Delta_2^1&=det\,(\lambda-\omega^2+1)\left[-\left\{(1-\nu)/2\right\}\lambda^2+\left\{(1+\nu)/2\right\}\omega^2\lambda-\left\{(1-\nu)/2\right\}(\omega^2-1)\right]\\
\Delta_2^2&=det\,(\lambda-\omega^2+1)\left[\omega\lambda^2+\left\{(1+\nu)/2\right\}\omega\lambda-\left\{(1-\nu)/2\right\}\omega(\omega^2-1)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

これを(23·3)式に代入すると，最終的に，

$$\gamma_1\lambda^8+\gamma_2\lambda^6+\gamma_3\lambda^4+\gamma_4\lambda^2+\gamma_5=0 \tag{26}$$

と λ に関する8次方程式が得られる。ここで，係数 γ_1〜γ_5 は次の通りである。

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_1&=(1-\nu)/2\\
\gamma_2&=-\left[d+\left\{(1-\nu)^2/2\right\}g+(1-2\nu-\nu^2)/2\right]\omega^2-\left\{(1-\nu)/2\right\}\{2+d+f+12\,de^2\}\\
\gamma_3&=\left\{(1-\nu)/2\right\}(d+f+12\,de^2)(\omega^2-1)^2+(d-\nu)\left\{(1-\nu)g+(1+\nu)\right\}\omega^4\\
&\quad+\left[(d-\nu)(1+f)-12\nu\,de^2+\left\{(1-\nu)/2\right\}(d+1)\left\{(1-\nu)g+(1+\nu)\right\}\right]\omega^2\\
&\quad+\left\{(1-\nu)/2\right\}\left\{(d+1)(1+f)+12\,de^2\right\}\\
\gamma_4&=-\left[(d-\nu)f-12\nu\,de^2+\left\{(1-\nu)/2\right\}d\left\{(1-\nu)g+(1+\nu)\right\}\right]\omega^2(\omega^2-1)^2
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\left\{(1-\nu)/2\right\}\left\{(d+1)f+12\,de^2+d(1+f)\right\}(\omega^2-1)^2\\
\gamma_5 &= \left\{(1-\nu)/2\right\} df(\omega^2-1)^4
\end{aligned}
\right\}
$$

(26) 式より 8 個の根が得られるが，

(1) 根 λ が実根の場合には，そのまま，

$$w = Ar^{\lambda+1}\sin\omega\varphi\,,\qquad u = A(\Delta_2^1/\Delta_2)\,r^{\lambda}\sin\omega\varphi\,,\qquad v = A(\Delta_2^2/\Delta_2)\,r^{\lambda}\cos\omega\varphi \tag{28}$$

と余解が決まる。

(2) 根 λ が複素根の場合には，一般に，

$$\lambda = +\alpha \pm i\beta \tag{29}$$

とおいて，(25) 式に代入すると，

$$\Delta_2 = k_0 \pm il_0\,,\qquad \Delta_2^1 = det\,(k_1 \pm il_1)\,,\qquad \Delta_2^2 = det\,(k_2 \pm il_2) \tag{30}$$

ここで，

$$
\left.
\begin{aligned}
k_0 &= \left\{(1-\nu)/2\right\}(\alpha^4-6\alpha^2\beta^2+\beta^4)-\left[(d-\nu)\,\omega^2+\left\{(1-\nu)/2\right\}(d+1)\right](\alpha^2-\beta^2)\\
&\quad+\left\{(1-\nu)/2\right\} d(\omega^2-1)^2\\
l_0 &= 2(1-\nu)\,\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)-\left\{2(d-\nu)\,\omega^2+(1-\nu)(d+1)\right\}\alpha\beta\\
k_1 &= -\left\{(1-\nu)/2\right\}(\alpha^3-3\alpha\beta^2)+\left\{\omega^2-(1-\nu)/2\right\}(\alpha^2-\beta^2)\\
&\quad-\left[\left\{(1+\nu)\,\omega^2+(1-\nu)\right\}/2\right](\omega^2-1)\,\alpha+\left\{(1-\nu)/2\right\}(\omega^2-1)^2\\
l_1 &= -\left\{(1-\nu)/2\right\}(3\alpha^2\beta-\beta^3)+\left\{2\omega^2-(1-\nu)\right\}\alpha\beta-\left[\left\{(1+\nu)\,\omega^2+(1-\nu)\right\}/2\right](\omega^2-1)\,\beta\\
k_2 &= \omega\left[(\alpha^3-3\alpha\beta^2)-\left\{\omega^2-1-(1+\nu)/2\right\}(\alpha^2-\beta^2)-(\omega^2-1)\,\alpha+\left\{(1-\nu)/2\right\}(\omega^2-1)^2\right]\\
l_2 &= \omega\left[(3\alpha^2\beta-\beta^3)-2\left\{\omega^2-1-(1+\nu)/2\right\}\alpha\beta-(\omega^2-1)\,\beta\right]
\end{aligned}
\right\} \tag{31}
$$

したがって，このときの余解は，

$$
\left.
\begin{aligned}
w &= Ar^{\alpha+1}\left\{\cos(\beta\log r)\pm i\sin(\beta\log r)\right\}\sin\omega\varphi\\
u &= Ar^{\alpha}\left\{det/(k_0^2+l_0^2)\right\}\left[\left\{(k_0k_1+l_0l_1)\cos(\beta\log r)-(k_0l_1-k_1l_0)\sin(\beta\log r)\right\}\right.\\
&\qquad\left.\pm i\left\{(k_0l_1-k_1l_0)\cos(\beta\log r)+(k_0k_1+l_0l_1)\sin(\beta\log r)\right\}\right]\sin\omega\varphi\\
v &= Ar^{\alpha}\left\{det/(k_0^2+l_0^2)\right\}\left[\left\{(k_0k_2+l_0l_2)\cos(\beta\log r)-(k_0l_2-k_2l_0)\sin(\beta\log r)\right\}\right.\\
&\qquad\left.\pm i\left\{(k_0l_2-k_2l_0)\cos(\beta\log r)+(k_0k_2+l_0l_2)\sin(\beta\log r)\right\}\right]\cos\omega\varphi
\end{aligned}
\right\} \tag{32}
$$

と得られる。この解は，実数部と虚数部を独立させると，それぞれが解となる。

以上のように，特性方程式 (26) の根が実根，複素根のいずれであっても，連立偏微分方程式 (21) の余解は得られ，それは，8 つの独立な解の一次結合で表わされる。

3·2 鉛直荷重 p_z が作用している場合の特解

鉛直荷重 p_z が作用している場合，その荷重と特解を，

$$p_z = pf_n\sin\omega\varphi \qquad (f_n\text{ は }r,\ \varphi\text{ に関しては定数}) \tag{33}$$

$$w = A_0 r^{\lambda+1} \sin\omega\varphi\,, \qquad u = B_0 r^{\lambda} \sin\omega\varphi\,, \qquad v = C_0 r^{\lambda} \cos\omega\varphi \tag{34}$$

と仮定して(21)式に代入すると，前の二式より，

$$B_0 = (\Delta_2^1/\Delta_2)\, A_0\,, \qquad C_0 = (\Delta_2^2/\Delta_2)\, A_0 \tag{35}$$

ここで，Δ_2, Δ_2^1, Δ_2^2 は(25)式で表わされる。さらに(21・3)式より，

$$\begin{aligned}&\Big[\lambda^4 - \Big\{(1-\nu)\,\omega^2 g + (1+\nu)\,\omega^2 + 1 + f + 12de^2\Big\}\,\lambda^2 + (f+12de^2)(\omega^2-1)^2\\ &\quad + 12de\,(1/t)(\lambda+\omega^2-1)\Big\{(\Delta_2^1/\Delta_2) - \omega(\Delta_2^2/\Delta_2)\Big\}\Big]\, A_0 = (p/D)(f_n/r^{\lambda-3})\end{aligned} \tag{36}$$

と得られる。この式が恒等的に成立つためには，$\lambda=3$ でなければならない。これを代入すると，A_0, B_0, C_0 は次のように求まる。

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= (p/D)(f_n/Q)\Big[(1-\nu)\,\omega_1 + (d-1)\Big\{(1-\nu)\,\omega_2 - \omega_3\Big\}\Big]\\ B_0 &= (p/D)(f_n/Q)\Big[-2\,det\,(w^2-4)\Big\{(1+2\nu)\,\omega^2 - 4(1-\nu)\Big\}\Big]\\ C_0 &= (p/D)(f_n/Q)\Big[det\,\omega(\omega^2-4)\Big\{(1-\nu)\,\omega^2 - 22 - 2\nu\Big\}\Big]\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned}&\omega_1 = (\omega+2)(\omega-2)(\omega+4)(\omega-4)\,, \qquad \omega_2 = (\omega^2+2)(\omega+2)(\omega-2)\,, \qquad \omega_3 = 18\omega^2\\ &Q = \Big[\omega_1 + (f-1+12\,de^2)\,\omega_2 - \Big\{(1-\nu)/2\Big\}(g-1)\,\omega_3\Big]\\ &\quad \times\Big[(1-\nu)\,\omega_1 + (d-1)\Big\{(1-\nu)\,\omega_2 - \omega_3\Big\}\Big] - 12d^2e^2\omega_2\Big\{(1-\nu)\,\omega_2 - \omega_3\Big\}\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

よって，特解は(37)式の A_0, B_0, C_0 を用いて，

$$w = A_0 r^4 \sin\omega\varphi\,, \qquad u = B_0 r^3 \sin\omega\varphi\,, \qquad v = C_0 r^3 \cos\omega\varphi \tag{39}$$

と得られる。ここで，$d=f=g=1$, $e=0$ とおくと，

$$w = \frac{p}{D}\,\frac{f_n}{(\omega+2)(\omega-2)(\omega+4)(\omega-4)}\, r^4 \sin\omega\varphi \tag{40}$$

と等方性扇形平板の曲げの場合の特解が誘導される。

3・3　せん断荷重 p_r が作用している場合の特解

せん断荷重 p_r が作用している場合，その荷重を，

$$p_r = p f_n \sin\omega\varphi \qquad (f_n \text{ は } r,\ \varphi \text{ に関しては定数}) \tag{41}$$

と仮定し，特解は(34)式と同形に仮定して，(21)式に代入すると，

$$\begin{aligned}&\Big[\lambda^2 - d - \Big\{(1-\nu)/2\Big\}\,\omega^2\Big]\, B_0 + \Big[-\Big\{(1+\nu)/2\Big\}\,\omega\lambda + d\omega + \Big\{(1-\nu)/2\Big\}\,\omega\Big]\, C_0\\ &\quad = -\,det\,(\lambda-\omega^2+1)\, A_0 - (p/EF)(f_n/r^{\lambda-2})\end{aligned} \tag{42・1}$$

$$\begin{aligned}&\Big[\Big\{(1+\nu)/2\Big\}\,\omega\lambda + d\omega + \Big\{(1-\nu)/2\Big\}\,\omega\Big]\, B_0\\ &\quad + \Big[\Big\{(1-\nu)/2\Big\}(\lambda^2-1) - d\omega^2\Big]\, C_0 = det\,\omega(\lambda-\omega^2+1)\, A_0\end{aligned} \tag{42・2}$$

$$\begin{aligned}&\Big[\lambda^4 - \Big\{(1-\nu)\,\omega^2 g + (1+\nu)\,\omega^2 + 1 + f + 12\,de^2\Big\}\,\lambda^2 + (f+12de^2)(\omega^2-1)^2\Big]\, A_0\\ &\quad + 12\,de\,(1/t)(\lambda+\omega^2-1)(B_0 - \omega C_0) = 0\end{aligned} \tag{42・3}$$

(42・1)式が恒等的に成立つためには，$\lambda=2$ でなければならない。これを代入して，A_0, B_0, C_0 を求めると，

$$
\left.\begin{aligned}
A_0 &= (p/EF)(f_n/Q')\left\{12\,de\,(1/t)\right\}(\omega^2+1)\left\{3(1-\nu)(\omega^2+1)+4\nu\omega^2\right\}\\
B_0 &= ((p/EF)(f_n/Q')\Big[\left\{\omega_1'+(f-1+12\,de^2)\,\omega_2'-(1/2)(1-\nu)(g-1)\,\omega_3'\right\}\\
&\quad\times\left\{2\omega^2-3(1-\nu)+2(d-1)\,\omega^2\right\}-24\,d^2e^2\omega^2\omega_2'\Big]\\
C_0 &= (p/EF)(f_n/Q')\Big[\left\{\omega_1'+(f-1+12\,de^2)\,\omega_2'-(1/2)(1-\nu)\,(g-1)\,\omega_3'\right\}\\
&\quad\times\omega\left\{(5+\nu)+2(d-1)\right\}-24\,d^2e^2\omega\,\omega_2'\Big]
\end{aligned}\right\}\qquad(43)
$$

ここで,

$$
\left.\begin{aligned}
&\omega_1'=(\omega+1)(\omega-1)(\omega+3)(\omega-3),\qquad \omega_2'=(\omega^2+1)(\omega^2-3),\qquad \omega_3'=8\omega^2\\
&Q'=\Big[\omega_1'+(f-1+12\,de^2)\,\omega_2'-\left\{(1-\nu)/2\right\}(g-1)\,\omega_3'\Big]\\
&\quad\times\Big[(1-\nu)\,\omega_1'+(d-1)\left\{(1-\nu)\,\omega_2'-\omega_3'\right\}\Big]-12\,d^2e^2\omega_2'\left\{(1-\nu)\,\omega_2'-\omega_3'\right\}
\end{aligned}\right\}\qquad(44)
$$

よって，特解は(43)式の A_0, B_0, C_0 を用いて,

$$w=A_0r^3\sin\omega\varphi,\qquad u=B_0r^2\sin\omega\varphi,\qquad v=C_0r^2\cos\omega\varphi\qquad(45)$$

と得られる。

4. 解　　析

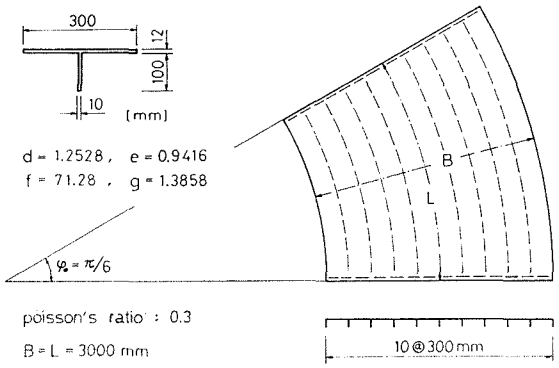
4·1 境 界 条 件

中心角が φ_0 で，両端の直線辺が単純支持された扇形平板の解析においては，解における ω を，$\omega=n\pi/\varphi_0$ (n: 自然数) とすると，その辺における境界条件は満足される。

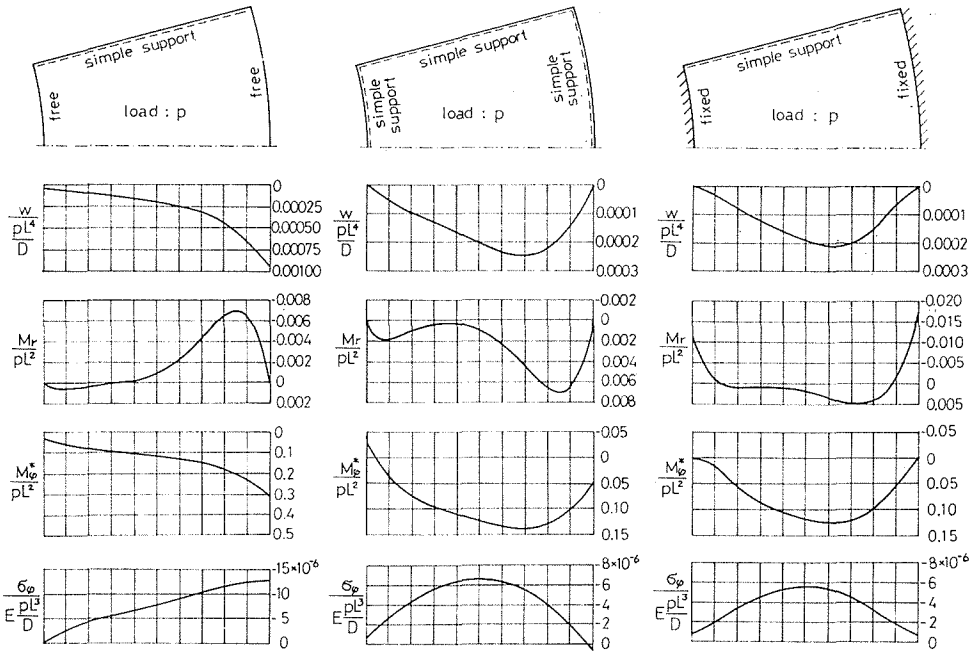
また，余解に含まれる8個の積分定数は，二円弧辺の境界条件によって，その値が決定されることになる。

4·2 集中荷重または部分分布荷重が作用する場合の解析

床版上の任意の点に集中荷重が作用する場合，または任意の位置に部分的に荷重が作用する場合には，その位置において，r=const. の辺に沿って，2個またはそれ以上の扇形平板に分け，そこにおいて連続条件を与えて解析される。その連続条件としては，力の釣合条件が4個，変位の適合条件が4個の合計8個の条件式が得られるため，それぞれの板における解の積分定数は決定されることになる。



図—3　解析された曲鋼床版と縦リブ断面



図—4　中央断面におけるたわみ，曲げモーメントおよび垂直応力

4·3 解　析　例

数値解析例として，図-3に示すような片面補剛された扇形平板に等分布満載荷重が垂直方向に作用した場合の，曲げ変形問題とデッキプレートの面内変形問題を考える。境界条件としては，板の直線辺は単純支持であるが，円弧辺は (1) 自由，(2) 単純支持，(3) 固定の3つの場合について解析した。その結果として，$\varphi=\varphi_0/2$ (板の中央断面) における，板のたわみ w，曲げモーメント M_r, M_φ^*，およびデッキプレート面内の垂直応力 σ_φ を図-4に示す。

5. 結　　論

リブで片面補剛された扇形平板を，構造的に曲線直交異方性を有する板と考えた場合の，基礎方程式が連立偏微分方程式で得られた。この方程式においては，補剛板の諸剛性が厳密に評価されているとともに，リブの偏心の影響も考慮されている。

補剛扇形板に鉛直荷重およびせん断荷重が作用する場合の基礎方程式の解が誘導された。それは，8個の積分定数を含む余解と特解の和で表わされる。

数値解析例が示された。ここで，鉛直荷重が作用した場合，補剛板は曲げ変形とともに，デッキプレート内に面内方向の圧縮応力が発生することが，数値的に示された。

この報告において提案された基礎微分方程式は，厳密である反面，非常に複雑であり，それによる解析も容易なものではないが，実用公式や設計計算値などの検討，精査には，十分に有用なものであると信じる。

謝　　辞

曲線直交異方性板の曲げについて先駆的な研究をされた土木工学科構造力学講座の芳村仁教授には，この研究にあたり，終始，適切な御助言と御指導をいただいた。また同教授の論文にも

教えられることが多くあった。ここに深く感謝の意を表します。

最後に，数値計算は北海道大学大型計算機センターの FACOM 230-75 を利用したことを付記する。

参考文献

1) Huber, M. T.: Bauing., **5** (1923), S. 354.
2) Pflüger, A.: Ing. Archiv, **16** (1974), S. 111.
3) Trenks, K.: Bauing,. **29** (1954), S. 372.
4) Giencke, E.: Stahlbau, **24** (1955), S. 128.
5) 芳村　仁：土木学会論文集, No. 82 (1962-6), p. 1.
6) 芳村　仁：土木学会論文集, No. 86 (1962-10), p. 20 および No. 89 (1963-1), p. 31.
7) Yoshimura, J.: Proc. 19th Japan National Congress for Applied Mechanics (1969), p. 193.