



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	粒状体の剪断機構に関する確率過程論的研究
Author(s)	新保, 勝; Shimbo, Masaru
Citation	北海道大學工学部研究報告, 80, 67-73
Issue Date	1976-06-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41366
Type	departmental bulletin paper
File Information	80_67-74.pdf



粒状体の剪断機構に関する確率過程論的研究

新 保 勝

(昭和 50 年 10 月 6 日受理)

A Stochastic Approach to Shear Mechanism of Granular Media

Masaru SHIMBO*

(Received October 6, 1975)

Abstract

A microscopically formulated stochastic theory is developed in this paper to account for the shear mechanism of granular media. The coefficient of particle friction is treated as a random variable on the particle surface, and the particle sliding is regarded as a stochastic process with reference to the friction law. As an example, shearing and volumetric strain vs stress ratio curves are calculated for a uniform distribution of the coefficient of particle friction and were shown to be hyperbolic, thus the physical meaning of the experimental constants in Kondner and Zelasko's hyperbolic formulation may be clarified. The proposed theory appears to fit experimental results obtained from triaxial tests on cohesionless soils when comparatively densely packed.

1. ま え が き

粒状体の剪断変形特性に関しては、従来種々の粒度分布、間隙比、応力条件、排水条件等で研究が行われ、応力-歪関係は実験的にわかっているにもかかわらず、その説明はまだ十分になされていない面が多いようである。例えば、砂質土の円筒形供試体を平均主応力一定で、軸方向および半径方向に圧縮したとき、この円筒の破壊以前のダイラタンシー曲線¹⁾に関する実験式は得られているが²⁾、その基本的な構造はまだわかっていない。

著者は先に微視的観点から粒状体の剪断変形を解析するに際して、数個の等径円筒あるいは等径球からなる系の破壊機構³⁾を局所的に導入し、粒子間のすべりは Coulomb の摩擦法則を仮定すると共に、粒子接点角と粒子間摩擦係数がいずれも確率分布に従うような剪断模型を構成した⁴⁾。その際、粒子系の破壊は疎状態から最密状態になって停止するとして解析を進め、ゆる詰めの不均質粒状体の均質化過程にこの理論を適用した。本論文では、同一の模型ではあるが、粒子間のすべりの停止は摩擦力によるものとし、特に粒子表面上に摩擦係数を分布させ、粒子間のすべり機構を確率過程論的に取扱うことによって、比較的密な粒状体の剪断変形特性が記述できることを以下に示す。

* 工学部 情報数理工学第一講座

* Division of Information Engineering, Graduate School of Engineering, Hokkaido University, Sapporo Japan.

2. 摩擦法則

微視的観点に立って、粒状体の剪断現象を基本的には粒状体を構成する二粒子間のすべりで説明する。このすべりは粒状体の内部で局部的に起るものとし、すべりが生じない残りの部分は剛体として扱う。更に、すべりは準静的に起るものとする。また、記述を簡単にするためまず二次元粒状体の剪断機構について考える。

粒状体内に座標系 x^1, x^2 を図 1(a) の如く取り、 x^1 軸と β の角をなすすべり面上で x^1 方向に σ_1 、 x^2 方向に σ_2 の応力が働くとする。この面上に働く力の法線方向成分、接線方向成分は

$$\begin{cases} f_n = \sigma_1 \sin^2 \beta + \sigma_2 \cos^2 \beta \\ f_s = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\beta \end{cases}$$

となる。この部分に働く摩擦力は摩擦係数を μ とすれば、 μf_n で与えられる。今、この状態で粒子が釣合っているものとするれば

$$\mu f_n \geq f_s$$

であり、すべり出す寸前の釣合状態においては $\mu = f_s/f_n$ 、すなわち

$$\mu = \frac{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1\right) \sin 2\beta}{2 \left[1 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1\right) \sin^2 \beta\right]} \quad (1)$$

の関係が成立つ。

3. 剪断変形量

粒状体内の局所的な剪断変形を計算するに際して、ここでは円筒の集まりを考える。条件として、 x^1 軸および x^2 軸に関してそれぞれ対称な変形のみを許すものとし、円筒の回転は考えず、専ら摩擦によるすべりだけを考える。

今、円筒群が互に力を及ぼしながら釣合っている中で、特定の相接する円筒が相対的に動き出そうとする直前の釣合状態における摩擦係数、応力比、粒子接点角の関係は式(1)で計算される。この局所的な円筒の集まりの破壊機構を図 1 に示す。図において最初 (a) の状態で釣合っていた四個の円筒からなる系が応力比の増加と共に (b) の釣合状態に変化したとする。変形は円筒の中心を結ぶ四辺形の変形を以てする。この系の軸歪および半径方向の軸をそれぞれ ε_1 および ε_2 (圧縮を正とする) とすれば、それらは

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\sin \beta}{\sin \beta_0} \quad \text{および} \quad \varepsilon_2 = 1 - \frac{\cos \beta}{\cos \beta_0} \quad (2)$$

となる。従って、この系の剪断歪および体積歪をそれぞれ $\tilde{\gamma}$ および ν とすれば、それらは

$$\tilde{\gamma} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{\cos \beta}{\cos \beta_0} - \frac{\sin \beta}{\sin \beta_0}, \quad (3)$$

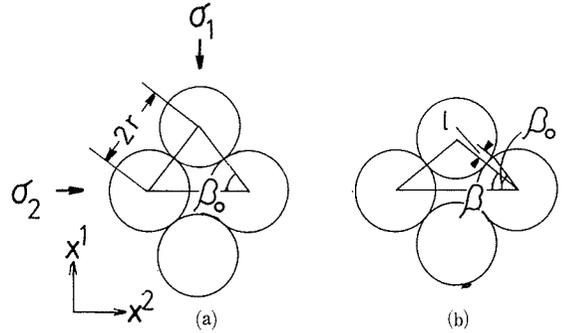


図 1 4 粒子系の破壊

$$v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2 - \frac{\sin \beta}{\sin \beta_0} - \frac{\cos \beta}{\cos \beta_0} \quad (4)$$

となる。また相接する二円筒の接点の移動距離を l とすれば、 r を円筒の半径として

$$l = r(\beta_0 - \beta) \quad (5)$$

となる。

特に、粒子接点角 β が β_0 からほんの僅か変化したとすると

$$\beta = \beta_0 - \Delta\beta \quad (|\Delta\beta| \ll \beta_0)$$

において、 $\Delta\beta$ の二次以上の微小量を無視すれば、式(2)~(5)は近似的に次のように表わせる。

$$\varepsilon_1 \doteq \cot \beta_0 \cdot \Delta\beta, \quad \varepsilon_2 \doteq -\tan \beta_0 \cdot \Delta\beta, \quad (2.1)$$

$$i \doteq \frac{2}{\sin 2\beta_0} \cdot \Delta\beta, \quad (3.1)$$

$$v \doteq 2 \cot 2\beta_0 \cdot \Delta\beta \quad (4.1)$$

4. すべりの確率過程論

粒状体は複数の物質で構成されていたり、また、同一の物質で構成されていても粒形は様々であることが多い。中でも、定量が困難な粒形の処理に関しては、粒子表面上で摩擦係数が分布していて、その値の大小によって粒状体を構成する粒子系の破壊が規定されると理解するのが自然であろう。それは例えば、図2のような性格のものであると考えられる。粒状体が釣合った状態にあるときに、更に剪断応力をかけることにより、一般には粒子間のすべりが粒子表面に沿って空間的に生ずると考えられる。この空間的現象の結果として、時間的変化が現れることから粒子間のすべり機構を確率過程論的に取扱ってみることにする。

粒状体での摩擦係数の分布を $f_\mu(\mu)$ とすると

$f_\mu(\mu) d\mu$: 摩擦係数が μ から $\mu + d\mu$ の間である確率、

$$F(\mu) = \int_\mu^\infty f_\mu(\mu) d\mu: \quad \text{単位長さあたり摩擦係数が } \mu \text{ より大である場所が存在する確率} \quad (6)$$

である。今、図1(a)のように釣合った状態にある一つの粒子接点を原点に取り、図2のように粒子表面上の弧 l を長さ $1/n$ の nl 個の部分区間に分割する。応力比が σ_1/σ_2 であるときに、すべりが距離 l まで止まらずに、次の $dl (=1/n)$ で止まる確率は

$$p\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, l\right) dl = \prod_{i=1}^{nl} \left\{ 1 - F\left(\mu_i, \frac{1}{n}\right) \right\} \cdot F(\mu_l) \quad (7)$$

で与えられる。ただし、 μ_k はすべりの距離 k における μ の値を示す。このような確率過程論的扱いは種々の材料の破壊機構について試みられている⁵⁾。特に、粒子表面上に取った各区間の長さ $1/n$ が零に近づくように n を無限に大きく取れば、 $F(\mu_{i/n})/n \ll 1$ の条件の下では、式(8)は

$$p\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, l\right) dl = e^{-\int_0^l F(\mu_k) dk} \cdot F(\mu_l) dl \quad (8)$$

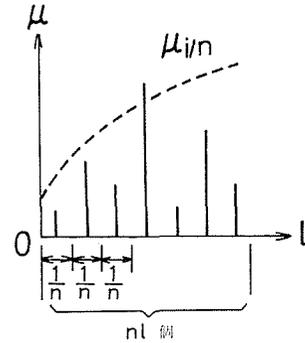


図2 粒子表面上における摩擦係数の分布

となる。

ここで、粒状体は等径円筒で、一様に最密状態にあり、従って粒子接点角 β_0 は一定であるとして、それから後の剪断歪、体積歪は

$$\bar{r}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) = \int_{\beta_0}^{\beta_1} \bar{r} p\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, r(\beta_0 - \beta)\right) (-r) d\beta, \quad (9)$$

$$\bar{v}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) = \int_{\beta_0}^{\beta_1} v p\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, r(\beta_0 - \beta)\right) (-r) d\beta \quad (10)$$

となる。粒子接点角に関しては、例えば $\beta_0 = \pi/3$, $\beta_1 = \pi/4$ が考えられよう。すべりの平均距離は同様に

$$\bar{l}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) = \int_0^{\infty} l p\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, l\right) dl \quad (11)$$

となる。

5. 計 算 例

以上の結果は摩擦係数に関して簡単な分布を仮定すれば次のような意味を持つ。一例として摩擦係数は 0 から μ_0 まで一様に分布していて、確率密度関数が

$$f_{\mu}(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_0} & (\mu \leq \mu_0) \\ 0 & (\mu > \mu_0) \end{cases} \quad (12)$$

で与えられる場合を考える。摩擦係数が特定の値 μ 以上である確率は式(7)から

$$F(\mu) = \int_{\mu}^{\mu_0} f_{\mu}(\mu) d\mu = 1 - \frac{\mu}{\mu_0} \quad (\mu \leq \mu_0)$$

である。粒子間のすべりの停止が摩擦力の釣合によるものとすれば、ここでの μ は式(1)で計算される値

$$\mu = \mu\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \beta\right)$$

を取る。簡単のためにこの値の近似式を用いて $F(\mu)$ を略算してみよう。円筒間のすべりに対しては、 β は $\pi/3$ から $\pi/4$ まで減少しながら変化するものとすれば、 l の変化は微小で、高々 $\pi r/12$ である。そこで、粒子表面上で原点から測った距離 l の場所で粒子が釣合すべき摩擦係数の値を一次式

$$\mu_l = a(x) + b(x)l$$

で近似するなら

$$a(x) = \frac{\sqrt{3}x}{4+3x}, \quad b(x) = \frac{12}{\pi r} \left(\frac{x}{2+x} - \frac{\sqrt{3}x}{4+3x} \right) \quad (13)$$

となる。ただし

$$x = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1$$

である。あるいは、原点の近傍では $\mu_l = a(x)$ と近似することも可能であろう。後者の場合に

$$F(\mu) = F(a) = 1 - \frac{a(x)}{\mu_0} \quad (14)$$

であり、これから、すべりが l と $l+dl$ 間で止まる確率は式(8)から

$$p\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, l\right) dl = F(a) e^{-F(a)l} dl$$

となる。ただし、これらの取扱いでは確率密度関数 $p(\sigma_1/\sigma_2, l)$ は応力比が 1, すなわち静水圧条件で

$$p(l, 1) = \frac{1}{e}$$

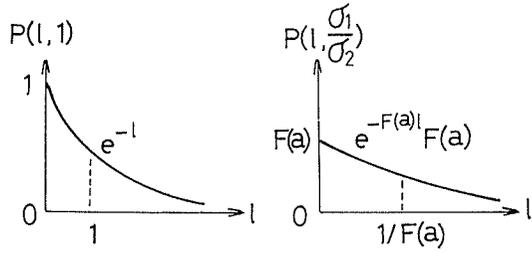


図 3 粒子の平均すべり距離

の値を取り、完全な δ 関数とはならぬこと

に注意したい(図 3)。そこで、すべりの平均距離の計算に際しては式 (11) を補正して

$$\bar{l}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) = \int_0^\infty lp\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, l\right) dl - \int_0^\infty lp(1, l) dl = \frac{1}{F(a)} - 1 \tag{15}$$

とする必要がある。ここで、式 (5) は β, l の平均値についても成立つとして、粒子接点角の平均変化量は

$$\Delta\beta = \frac{\pi}{3} - \bar{\beta} = \frac{\bar{l}}{r} = \frac{1 - F(a)}{rF(a)}$$

となる。 $\Delta\beta$ が $\pi/3$ に比べて極く微小なら、剪断歪、体積歪は式 (4. 1), (5. 1), (14), (15) を用いて

$$\bar{\gamma}(x) = \frac{\sqrt{3}}{r} \cdot \frac{a(x)}{\mu_0 - a(x)},$$

$$\bar{v}(x) = -\frac{2}{r\sqrt{3}} \cdot \frac{a(x)}{\mu_0 - a(x)}$$

となる。式中の $a(x)$ は式 (13) で、また、 μ_0, r の定数は粒状体に関する実験資料から決定することができる。

6. 三軸圧縮試験

三次元粒状体の剪断についても二次元の場合と同様に扱える。粒状体内に直角座標系 $x^i (i=1, 2, 3)$ を取り、この座標軸方向に主応力 σ_i が働いているものとする。すべり面は二粒子の共通接点における接触平面である。粒子間のすべりは x^1 軸とすべり面の法線とがなす面内で起るとして扱う⁶⁾。釣合条件は式 (1) の代りに

$$\mu = \frac{\sqrt{\sum_{i \neq j} n_i^2 n_j^2 (\sigma_i - \sigma_j)^2}}{\sum_i n_i^2 \sigma_i}$$

となる。ただし、 n_i はすべり面の法線の方向余弦である。特に、二主応力が一致する場合、例えば $\sigma_2 = \sigma_3$ の場合には上式は式 (1)

に一致する。後者の場合、粒状体を構成する粒子系としては例えば x^1-x^2 平面の配列が図 1 で、 x^2-x^3 平面の配列が図 4 であるような面心立方積みものを考える。粒子接点角は矢張り図 1 のように取り、 x^2, x^3 軸方向の変形は同一になるように取る。軸歪 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ および剪断歪 $\bar{\gamma}$ は式 (2), (3), (4) と同じく、体積歪は

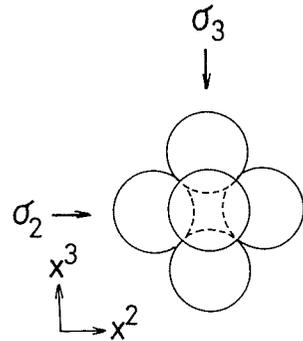


図 4 面心立方配列 (平面図)

$$v = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3 = 3 - \frac{\sin \beta}{\sin \beta_0} - 2 \frac{\cos \beta}{\cos \beta_0}$$

となる。

粒子接点角 β と β_0 が非常に近いとき、これらは

$$\beta = \beta_0 - \Delta\beta$$

とおくことにより、剪断歪は式(4.1)で、体積歪は

$$v \doteq (\cot \beta_0 - 2 \tan \beta_0) \Delta\beta$$

と近似できる。ここで、粒状体内の摩擦係数の分布は式(13)を用い、 $\Delta\beta$ に関して前と同様に

$$\Delta\beta = \frac{1 - F(\bar{\mu})}{rF(\bar{\mu})}$$

とおく。ただし、 $\mu = \bar{\mu}$ は考えている範囲内では、すべりの距離 l に関して一定であるとし、具体的な値は式(1)で計算する。そのとき、軸歪および体積歪は

$$\varepsilon_1 = \frac{A\left(\frac{q}{p}\right)}{1 - B\left(\frac{q}{p}\right)}, \quad (15)$$

$$v = \frac{C\left(\frac{q}{p}\right)}{1 - B\left(\frac{q}{p}\right)} \quad (16)$$

となり、いずれも双曲線の表示を得る。ただし

$$p = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3}, \quad q = \sigma_1 - \sigma_3$$

は平均主応力および軸差応力であり、 A, B, C は定数で

$$A = \frac{\cos^2 \beta_0}{\mu_0 r}, \quad B = \frac{\cos^2 \beta_0 - 2 \sin^2 \beta_0}{3} + \frac{\sin 2\beta_0}{2\mu_0}, \quad C = \frac{\cos^2 \beta_0 - 2 \sin^2 \beta_0}{\mu_0 r} \quad (17)$$

である。式(15)は $p = 1 \text{ kg/cm}^2$ とおくと、Kondner and Zelasko⁷⁾ が実験的に求めた双曲線表示式に相当する。実験定数 A, B の物理的意味は式(17)から明らかである。

なお、式(15)、(16)の分母の形から、応力比の最大値は $1/B$ によって、すなわち、最大摩擦係数 μ_0 と粒子接点角 β_0 の関数として定まる。

図5、図6に村山・八木⁸⁾による砂質土に関する平均主応力一定の三軸圧縮試験の結果を示

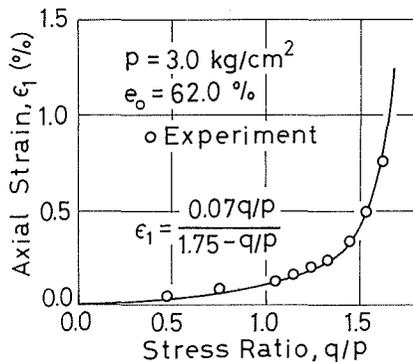


図5 応力—剪断歪関係 (資料は村山・八木⁸⁾による)

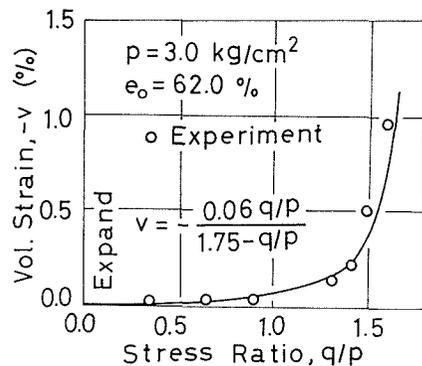


図6 応力—体積歪関係 (資料は村山・八木⁸⁾による)

す。これから、定数 A, B, C を定めると

$$A = 5.0 \times 10^{-4}, \quad B = 0.58, \quad C = 3 \times 10^{-4}$$

を得る。従って、式(17)から

$$\beta_0 = 44^\circ, \quad \mu_0 = 0.264, \quad r = 2800$$

となる。粒子接点角 β_0 は面心立方積みの最密配列に近い。最大摩擦係数 μ_0 が少し低い値であるのは、模型の簡単化によるところが大きいと思われる。粒径 r に関する値は本理論で用いた単位長さが不定であるので、実測結果から更に推定する必要がある。

7. あとがき

本論文では、粒状体の破壊を微視的観点から論じ、数個の粒子からなる系の破壊を局所的に導入した模型について、粒子間のすべりが摩擦によって規定されるとして解析を行った。その際、量的に評価し難い粒形を粒子表面上に分布した摩擦係数として把握し、すべりの停止機構を確率過程論的に検討した。特に、粒状体で摩擦係数の一様分布を仮定すれば、剪断歪および体積歪はいずれも双曲線となる。このことは最大摩擦係数で持ちこたえられない剪断応力で全粒子系が崩れることを意味しており、これから、粒状体に加えられる応力比の限界が求まると共に、従来、実験的に得られていた軸差応力-軸歪関係の双曲線表示式における各定数の物理的意味が明らかになる。比較的密な砂の三軸圧縮試験による応力-体積歪関係についての検証も行った。

この研究にあたって、東京大学甘利俊一助教授には数々の御教示を得、論議していただいた。また、本学河口至商教授には多くの有益な御助言、御批判を賜った。末筆ながら厚く謝意を表す次第である。

文 献

- 1) Reynolds, O.: Phil. Mag., 5 (1885), 20, p. 469.
- 2) Tatsuoka, F. and Ishihara, K.: 4th Conf. on Soil Mechanics, Budapest (1971), p. 337.
- 3) Rowe, P. W.: Proc. Royal Society, London, A, 269 (1962), p. 500.
- 4) 新保 勝: 北大工学部研究報告, 第 78 号, 印刷中.
- 5) 横堀武夫: 材料強度学 (昭 42), 技報堂.
- 6) Horne, M. R.: Proc. Royal Society, London, A, 286 (1965), pp. 62, 79.
- 7) Kondner, R. L. and Zelasko, J. S.: A. S. T. M., Special Technical Publication, No. 761 (1963), p. 250.
- 8) 村山朔郎, 八木則男: 土と基礎, 13 (1965), 2, p. 65.