



Title	粒状体の確率過程論的剪断理論への補遺
Author(s)	新保, 勝; Shimbo, Masaru
Citation	北海道大學工学部研究報告, 81, 83-86
Issue Date	1976-08-30
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41369">https://hdl.handle.net/2115/41369</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	81_83-86.pdf



## 粒状体の確率過程論的剪断理論への補遺

新 保 勝\*

(昭和 51 年 3 月 31 日受理)

### A Supplement to the Stochastic Shear Theory of Granular Media

Masaru SHIMEO

(Received March 31, 1976)

#### Abstract

It was pointed out in the basic theory of the shear mechanism of granular media of the preceding Bulletin that the coefficient of particle friction as well as the angle of particle sliding was treated as a random variable on the particle surface and that the particle sliding was regarded as a stochastic process from a microscopic point of view. A few remarks are supplemented to this with regard to the increment ratio of shearing to volumetric strain and that of energies due to hydraulic and deviatoric stress. A triaxial test result on cohesionless soils reported elsewhere is also referred as an experimental verification.

#### 1. ま え が き

粒状体の剪断機構に関する前報告<sup>1)</sup>において、微視的観点に立って粒子間のすべりを確率過程論的に論じ、特に、剪断変形の双曲線表示式<sup>2)</sup>に現れる諸定数の物理的意味を明らかにすることを試みた。その際、この理論を、弛い粒状体の解析<sup>3)</sup>に対して、比較的密な粒状体に適用した。これらの報告は共に粒子接点角の他、粒子間摩擦係数もまた確率変数として扱うべきであることを示唆するもので、この点が従来<sup>4),5)</sup>の研究における扱いとは異なる。

本報告では、上記の確率過程論的模型に基づいて、剪断の際の剪断歪と体積歪の増分比、および静水圧と偏差応力によるエネルギー増分比<sup>6),7)</sup>の導出を新に試み、併せて砂質土に関する三軸圧縮試験結果<sup>8)</sup>による検証を行う。

#### 2. 歪 増 分 比

三軸圧縮試験で二主応力が一致する場合の粒状体の微小な破壊を考える。粒状体内に直交座標系  $x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) を取り、各座標軸方向に主応力  $\sigma_i$  が働いているものとする。前報告<sup>1)</sup>との対応から、特定の 4 個の粒子からなる系に着目し、粒状体は等径球の面心立方積みのもので考え、粒状体の破壊は微視的には 4 個の粒子からなる粒子系の破壊を基礎とする。また、粒子系の破壊は座標軸に対称に起るものとし、軸歪  $\varepsilon_1$  および  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$  はいずれも圧縮側を正に取る。剪断歪および体積歪は

\* 工学部情報数理工学第一講座

$$r = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \doteq \frac{\sin \beta}{\sin \beta_0} - \frac{\cos \beta}{\cos \beta_0}$$

$$v = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3 \doteq \frac{\sin \beta}{\sin \beta_0} + \frac{2 \cos \beta}{\cos \beta_0} - 3$$

で定義する。ただし、 $\beta_0$  は破壊前の、 $\beta$  は破壊後の粒子接点角である。これから瞬間的な剪断歪、体積歪、粒子接点角の変化をそれぞれ  $\Delta r$ 、 $\Delta v$ 、 $\Delta \beta$  とすると

$$\begin{cases} \Delta r = \left( \frac{\cos \beta}{\sin \beta_0} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta_0} \right) \Delta \beta \\ \Delta v = \left( \frac{\cos \beta}{\sin \beta_0} - \frac{2 \sin \beta}{\cos \beta_0} \right) \Delta \beta \end{cases} \quad (1)$$

となる。式 (1) より剪断歪および体積歪の変化量の比（以下、歪増分比と称する）は

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{\cos \beta \cos \beta_0 - 2 \sin \beta \sin \beta_0}{\cos(\beta - \beta_0)} \quad (2)$$

である。あるいは、式 (2) において

$$\beta = \beta_0 + \Delta \beta$$

とおけば、微小な  $\Delta \beta$  に対しては

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = 1 - 3 \sin^2 \beta_0 - \frac{3}{2} \sin 2\beta_0 \cdot \Delta \beta \quad (3)$$

の関係が成立つ。なお、式 (3) に現れた  $\Delta \beta$  は粒状体の剪断破壊機構に関する確率過程論的取扱<sup>1)</sup>から

$$\Delta \beta = \frac{\sin 2\beta_0}{r} \frac{\frac{q}{p}}{2\mu_0 - \left\{ \sin 2\beta_0 - 2 \left( \sin^2 \beta_0 - \frac{1}{3} \right) \mu_0 \right\} \frac{q}{p}} \quad (4)$$

で与えることができる。ただし、粒子接点角の変化  $\Delta \beta$  は微小であるとし、粒子間の摩擦係数は零から  $\mu_0$  までの一様分布を仮定する。また、 $r$  は粒子の半径、

$$p = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3}, \quad q = \sigma_1 - \sigma_3$$

は平均主応力および主応力差である。式 (3)、(4) から

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = 1 - 3 \sin^2 \beta_0 + \frac{3 \sin^2 2\beta_0}{2r} \frac{\frac{q}{p}}{2\mu_0 - \left\{ \sin 2\beta_0 - 2 \left( \sin^2 \beta_0 - \frac{1}{3} \right) \mu_0 \right\} \frac{q}{p}} \quad (5)$$

を得る。式 (4)、(5) はいずれも一定の半径、摩擦係数、粒子接点角の場合に、歪増分比が応力比  $q/p$  に関して双曲線であることを示している。

式 (5) で粒子接点角  $\beta_0 = 40^\circ$ 、摩擦係数  $\mu_0 = 0.8$ 、粒子半径  $r = 12.6 (\times 10^{-3} \text{ mm})$  とおいた計算式

$$-\frac{dv}{dr} = 0.37 \frac{\left( 1.3 - \frac{q}{p} \right)}{2.0 - \frac{q}{p}} \quad (6)$$

を図 1 に破線で示す。図中の実線は Tatsuoka and Ishihara<sup>8)</sup> による砂質土に関する平均主応力一定の三軸圧縮試験結果である。なお、実験は粒子の有効径  $2r_{10} = 0.22 \text{ mm}$ 、均等係数 2.21、初期間隙比  $e_0 = 65.8\%$ 、平均主応力  $p = 2.0 \text{ kg/cm}^2$  で行われたものである。

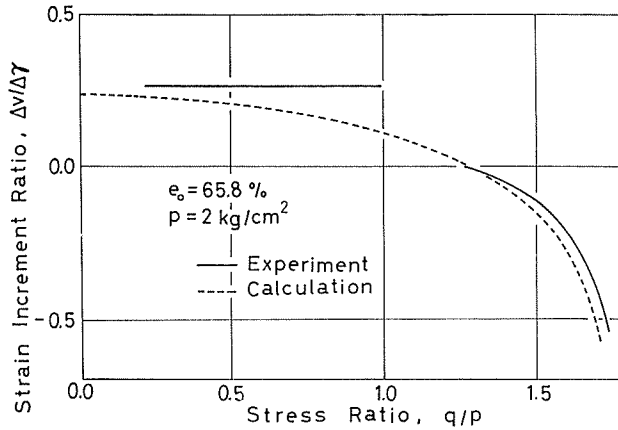


図1 応力比一歪増分比関係 (実験結果は Tatsuoka and Ishihara<sup>6)</sup> による)

### 3. エネルギー増分比

前節で述べた歪増分比を基に静水圧および偏差応力によるエネルギー増分の比について考える。エネルギーの増分は、応力および歪をスカラー成分および偏差成分に分解することにより

$$\begin{aligned}\sigma_{ji} \Delta \varepsilon_{ji} &= \left( \frac{1}{3} \sigma \delta_{ji} + \hat{\sigma}_{ji} \right) \Delta \left( \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ji} + \hat{\varepsilon}_{ji} \right) \\ &= \frac{1}{3} \sigma \Delta \varepsilon + \hat{\sigma}_{ji} \Delta \hat{\varepsilon}_{ji}\end{aligned}\quad (7)$$

となる<sup>6,7)</sup>。ただし、繰返した指標に関しては Einstein の総和規約を採用し、 $\sigma$  および  $\varepsilon$  は

$$\sigma = \sigma_{ji} \delta_{ji}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{ji} \delta_{ji}$$

である。

式 (7) の右辺第一項は静水圧による寄与、第二項は偏差応力による寄与で、円筒形試料の圧縮に際しては

$$\frac{1}{3} \sigma \Delta \varepsilon = p \Delta v, \quad \hat{\sigma}_{ji} \Delta \hat{\varepsilon}_{ji} = \frac{2}{3} q \Delta r$$

となる。それ故、静水圧によるエネルギー増分の全エネルギー増分に対する割合は

$$\frac{p \Delta v}{p \Delta v + \frac{2}{3} q \Delta r} = \frac{\Delta v}{\Delta r + \frac{2}{3} \frac{q}{p}} \quad (8)$$

で計算される。なお、剪断時に試料を最初静水圧で等方的に圧縮し、その後軸差応力を加える場合には、応力比が零に対しては、エネルギー増分比を与える式 (8) の右辺は1の値を取るとしてよい。

式 (8) に式 (6) を代入し、更に粒子接点角、摩擦係数および粒子径として第2節と同様の数値を採用すれば、

$$\frac{p \Delta v}{p \Delta v + \frac{2}{3} q \Delta r} = \frac{0.56 \left( 1.3 - \frac{q}{p} \right)}{0.72 + 1.44 \frac{q}{p} - \left( \frac{q}{p} \right)^2} \quad (9)$$

を得る。図2に式 (9) を実線で、前記の Tatsuoka ら<sup>6)</sup>の実験結果を○印で示す。図で応力比の小さいところでの実験値のバラツキは、体積歪あるいは剪断歪の増分が小さいための誤差による

部分が多いと思われる。

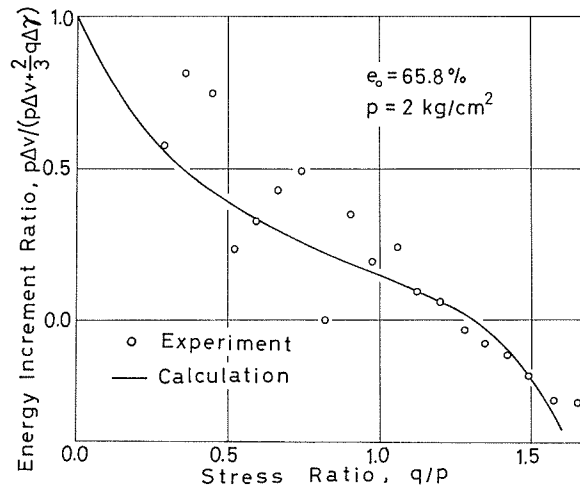


図2 応力比—エネルギー増分比関係 (実験結果は Tatsuoka and Ishihara<sup>8)</sup> による)

#### 4. あとがき

本論文では粒状体の剪断時における剪断歪および体積歪の増分比，等方応力および偏差応力によるエネルギー増分比を微視的観点に立つて構成した確率過程論的模型から理論的に導き，併せて実験との検証を行った。

本研究に際し，東京大学伊理正夫教授および本学河口至商教授から有益な御助言を戴いた。また，建設省龍岡文夫博士には貴重な実験資料をお貸し戴いた。末筆ながら厚く謝意を表する次第である。

#### 文 献

- 1) 新保 勝：北大工学部研究報告，第80号，印刷中。
- 2) Kondner, R. L. and Zelasko, J. S.: A. S. T. M., Special Technical Publication, 761 (1963), p. 250.
- 3) 新保 勝：材料科学，12 (1975), 5・6, p. 244.
- 4) Rowe, P. W.: Proc. Royal Society, London, A, 269 (1962), p. 500.
- 5) 村山朔郎，八木則男：土と基礎，13 (1962), 2, p. 65.
- 6) Iri, M.: RAAG Research Notes, 3, 129 (1968).
- 7) 諸戸靖史，河上房義：土木学会論文報告集，229 (1974), p. 77.
- 8) Tatsuoka, F. and Ishihara, K.: Proc. 4th Int. Conf. on Soil Mech., Budapest (1971), p. 337.