



HOKKAIDO UNIVERSITY

| | |
|------------------|---|
| Title | 有限長変断面棒における応力パルスの伝播 |
| Author(s) | 台丸谷, 政志; Daimaruya, Masashi; 石川, 博将 他 |
| Citation | 北海道大學工學部研究報告, 81, 21-27 |
| Issue Date | 1976-08-30 |
| Doc URL | https://hdl.handle.net/2115/41377 |
| Type | departmental bulletin paper |
| File Information | 81_21-28.pdf |



有限長変断面棒における応力パルスの伝播

台丸谷 政 志* 石 川 博 将* 秦 謹 一*

(昭和 51 年 3 月 31 日受理)

Stress Pulse Propagation in a Finite Length Bar with a Variable Cross Section

Masashi DAIMARUYA, Hiromasa ISHIKAWA and Kin-ichi HATA
(Received March 31, 1976)

Abstract

The present paper is concerned with the propagation of a longitudinal stress pulse in a finite length bar with a continuously variable cross section. The one-dimensional theory of elasticity is used in formulating the equation of motion under the assumption that the bar is thin, has small changes of its cross section and the wave length is sufficiently long compared with the lateral dimensions of the bar. The solution is obtained by the application of the Laplace transform. As example, with regard to a truncated cone, numerical results such as the time-dependence of strains for different stations along the bar and strains as a function of distances for various values of time are presented. A series of pulse propagation experiments on the truncated cones was also performed to examine the validity of the present analytical result. A comparison of the results showed good agreements between the experimental measurements and the theoretical calculations.

1. 緒 言

一様断面を有する棒状物体の場合には、縦衝撃荷重に伴う応力波伝播に関する研究は数多くなされているが、断面が軸方向に変化する漸変断面棒に関するものは少なく、特に有限長棒に関する報告は非常に少ないようである。T. Tsui¹⁾ は二つのパラメータで決められる断面積を持つ有限長変断面棒を伝播する応力波を仮想仕事の原理に基づいて解析している。同様な解析報告が H. D. Fisher²⁾ によって数値計算例を含めて行なわれている。さらに断面積がより一般的に表わされる場合については G. H. Handelman³⁾ によって摂動法を用いて解析されている。また実験報告も V. H. Kenner らによって中実円錐⁴⁾、中空円錐⁵⁾の場合についてそれぞれ行なわれているが他端よりの反射波まで含めて理論値との比較はなされていない。そこで著者らは先の報告⁶⁾ において 2 個のパラメータによって表わされる変断面棒がその一端に一定速度衝撃を受ける場合をラプラス変換法を用いて解析し、反射波を含めて理論値と実験値との比較を行なった。

本報では前報と同様な方法で、漸変断面を有する有限長棒における半正弦状の応力パルスの伝播挙動を解析した。一例として截頭円錐棒の場合に関して数値計算を行ないひずみ波の伝播波形ならびに数点の位置における時間変動を求めた。またこれらに対応する実験を 2 種類の截頭円錐

* 機械工学第二学科，塑性加工学講座

棒について行った。半正弦状の応力パルスは鋼球を衝突させることによって得た。このようにして截頭円錐棒の数点の位置においてひずみ波の時間変動を測定し、理論値との比較を行なった。

2. 理論解析

著者らの先の報告⁶⁾と同様に、軸に沿って変化する断面積 $A(x)$ は次式で与えられるとする。

$$A(x) = A_0 \left(\frac{x}{\mu l} \right)^n \quad (1)$$

ただし、 A_0 は $x = \mu l$ における断面積であり、その他の記号ならびに座標は Fig. 1 に示す。

式 (1) を一次元理論に基づく運動方程式に代入すれば次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{n}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2)$$

ここで、 u は x 方向変位、 c_0 は縦弾性波の伝播速度で、 $c_0 = (E/\rho)^{1/2}$ 、 E は縦弾性係数、 ρ は密度である。

初期条件 $(u)_{t=0} = (\dot{u})_{t=0} = 0$ を考慮し、次式の無次元変数を導入して

$$\xi = \frac{x}{\mu l}, \quad \tau = \frac{c_0 t}{\mu l} \quad (3)$$

式 (2) のラプラス変換を行ない、 $\nu = -(n+1)/2$ の置換を行なえば次式が得られる。

$$\frac{d^2}{d\xi^2} (\xi^{-\nu-1} \bar{u}) + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi^{-\nu-1} \bar{u}) - \left\{ p^2 + \left(\frac{\nu+1}{\xi} \right)^2 \right\} (\xi^{-\nu-1} \bar{u}) = 0, \quad \bar{u}(\xi, p) = \int_0^\infty u(\xi, \tau) e^{-p\tau} d\tau \quad (4)$$

式 (4) の一般解は次式のように得られる。

$$\bar{u}(\xi, p) = \xi^{\nu+1} \{ C_1 I_{\nu+1}(\xi p) + C_2 K_{\nu+1}(\xi p) \} \quad (5)$$

ここで、 C_1, C_2 は積分定数、 $I_{\nu+1}, K_{\nu+1}$ はそれぞれ $(\nu+1)$ 次の第一、第二種の変形 Bessel 関数である。したがってラプラス像空間におけるひずみ波ならびに応力波の一般解が次式のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(\xi, p) &= \xi^{\nu+1} p \{ C_1 I_{\nu}(\xi p) + C_2 K_{\nu}(\xi p) \} \\ \sigma(\xi, p) &= E \varepsilon(\xi, p) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

次に変断面棒の一端に半正弦状の応力パルスが入射し他端は自由であると仮定すれば境界条件は次式のように与えられる。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=\mu l} = \begin{cases} \varepsilon_0 \sin \frac{t}{t_0} \pi & (0 \leq t \leq t_0) \\ 0 & (t > t_0) \end{cases}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=(1+\mu)l} = 0 \quad (7)$$

式 (7) を式 (3) の無次元変数で表わし、ラプラス変換すれば

$$\left(\frac{d\bar{u}}{d\xi} \right)_{\xi=1} = \varepsilon_0 \frac{a}{p^2 + a^2} (1 + e^{-\tau_0 p}), \quad \left(\frac{d\bar{u}}{d\xi} \right)_{\xi=\lambda} = 0 \quad (8)$$

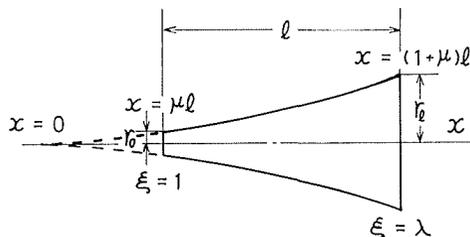


Fig. 1 Bar with variable cross section

ここで, ε_0, t_0 は定数であり, $\varepsilon'_0 = \mu \varepsilon_0$, $\lambda = 1 + 1/\mu$, $\tau_0 = c_0 t_0 / \mu l$, $a = \pi/\tau_0$

式 (6), (8) より積分定数 C_1, C_2 が求められ, 像空間におけるひずみが次式のように得られる。

$$\frac{\varepsilon(\xi, p)}{\varepsilon'_0} = \xi^{\nu+1} \frac{a}{p^2 + a^2} \frac{f(\xi, p)}{f(1, p)} + \xi^{\nu+1} \frac{a}{p^2 + a^2} \frac{f(\xi, p)}{f(1, p)} e^{-\tau_0 p} \quad (9)$$

ここで,

$$f(\xi, p) = I_\nu(\xi p) K_\nu(\lambda p) - K_\nu(\xi p) I_\nu(\lambda p) \quad (10)$$

ラプラス逆変換積分を行なうため式 (9) の第 1 項を

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'_0} = \xi^{\nu+1} \frac{a}{p^2 + a^2} \frac{f(\xi, p)}{f(1, p)} \quad (11)$$

と置いて逆変換を行ない, 後に変時定理に基づいて式 (9) の逆変換解を求める。式 (11) の特異点は $p^2 + a^2 = 0$ ならびに $f(1, p) = 0$ を満足する p で次式で表される 1 位の極である。

$$p = \pm ia, \quad p = \pm i\omega_j (j=1, 2, 3, \dots) \quad (12)$$

ここで, ω_j は次式を満足する第 j 番目の正根である。

$$J_\nu(\omega_j) Y_\nu(\lambda \omega_j) - J_\nu(\lambda \omega_j) Y_\nu(\omega_j) = 0 \quad (13)$$

ここで, J_ν, Y_ν はそれぞれ ν 次の Bessel 関数, Neumann 関数である。

式 (11) のラプラス逆変換積分は Jordan の補助定理より閉路積分に置換えられ, 式 (12) で与えられる極の回りの留数計算に帰着する。

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_1(\xi, \tau)}{\varepsilon'_0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \xi^{\nu+1} \frac{a}{p^2 + a^2} \frac{f(\xi, p)}{f(1, p)} e^{p\tau} dp \\ &= \xi^{\nu+1} \left[\text{Res} \left\{ \frac{a}{p^2 + a^2} \frac{f(\xi, p)}{f(1, p)} \right\}_{p=\pm ia} + \sum_{j=1}^{\infty} \text{Res} \left\{ \frac{a}{p^2 + a^2} \frac{f(\xi, p)}{f(1, p)} \right\}_{p=\pm i\omega_j} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

式 (14) 第 1 項の留数計算の結果は次式のように得られる。

$$\text{Res} \left\{ \frac{a}{p^2 + a^2} \frac{f(\xi, p)}{f(1, p)} e^{p\tau} \right\}_{p=\pm ia} = \frac{J_\nu(\xi a) Y_\nu(\lambda a) - J_\nu(\lambda a) Y_\nu(\xi a)}{J_\nu(a) Y_\nu(\lambda a) - J_\nu(\lambda a) Y_\nu(a)} \sin(a\tau) \quad (15)$$

また第 2 項は

$$\begin{aligned} \text{Res} \left\{ \frac{a}{p^2 + a^2} \frac{f(\xi, p)}{f(1, p)} e^{p\tau} \right\}_{p=\pm i\omega_j} &= \frac{2a}{\omega_j^2 - a^2} \\ &\times \frac{J_\nu(\xi \omega_j) Y_\nu(\lambda \omega_j) - Y_\nu(\xi \omega_j) J_\nu(\lambda \omega_j)}{J_{\nu+1}(\omega_j) Y_\nu(\lambda \omega_j) - J_\nu(\lambda \omega_j) Y_{\nu+1}(\omega_j) - \lambda \{ J_\nu(\omega_j) Y_{\nu-1}(\lambda \omega_j) - J_{\nu-1}(\lambda \omega_j) Y_\nu(\omega_j) \}} \sin(\omega_j \tau) \end{aligned} \quad (16)$$

したがって, 式 (14)~(16) より式 (11) の逆変換解が次式のように得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_1(\xi, \tau)}{\varepsilon'_0} &= \xi^{\nu+1} \frac{F_\nu(\xi a, \lambda a)}{F_\nu(a, \lambda a)} \sin(a\tau) \\ &\quad - 2\xi^{\nu+1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a}{\omega_j^2 - a^2} \frac{F_\nu(\xi \omega_j, \lambda \omega_j)}{G_\nu(\omega_j, \lambda \omega_j) - \lambda G_\nu(\omega_j, \lambda \omega_j)} \sin(\omega_j \tau) \quad (\tau > \xi - 1) \end{aligned} \quad (17)$$

ただし,

$$\begin{aligned} F_\nu(\omega_j, \lambda \omega_j) &= J_\nu(\xi \omega_j) Y_\nu(\lambda \omega_j) - Y_\nu(\xi \omega_j) J_\nu(\lambda \omega_j) \\ G_\nu(\omega_j, \lambda \omega_j) &= J_\nu(\omega_j) Y_{\nu-1}(\lambda \omega_j) - Y_{\nu-1}(\omega_j) Y_\nu(\lambda \omega_j) \end{aligned}$$

最後に, 式 (9), (17) より変時定理を用いればひずみ波に関する解が次式のように得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon(\xi, \tau)}{\varepsilon'_0} &= \xi^{\nu+1} \frac{F_\nu(\xi a, \lambda a)}{F_\nu(a, \lambda a)} [\sin(a\tau) H(\bar{\tau}) + \sin\{a(\tau - \tau_0)\} H(\bar{\tau} - \tau_0)] \\ &\quad - 2\xi^{\nu+1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a}{\omega_j^2 - a^2} \frac{F_\nu(\xi \omega_j, \lambda \omega_j)}{G_\nu(\omega_j, \lambda \omega_j) - \lambda G_\nu(\omega_j, \lambda \omega_j)} [\sin(\omega_j \tau) H(\bar{\tau}) + \sin\{\omega_j(\tau - \tau_0)\} H(\bar{\tau} - \tau_0)] \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、 $\bar{\tau} = \tau - (\xi - 1)$, $H(\bar{\tau})$ は Heaviside のステップ関数。

式 (1) は任意定数 μ , n の値の適当な組合せによって種々の断面形状を表現することができる。 μ , n および変断面棒の両端の半径 r_0 , r_l の関係は式 (1) より次式のように表わされる。

$$\mu = \frac{1}{(r_l/r_0)^{n/2} - 1} \quad (19)$$

中実で軸対称な変断面棒を考えれば $\mu > 0$, $n=2$ とき截頭円錐棒となる。この特別な場合は $\nu = -3/2$ となり半整数次の Bessel 関係式を用いれば式 (18), (13) は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon(\xi, \tau)}{\varepsilon_0} = & \xi^{-2} \frac{(\xi \lambda a^2 + 1) \sin\{(\lambda - \xi)a\} - (\lambda - \xi)a \cos\{(\lambda - \xi)a\}}{(\lambda a^2 + 1) \sin\{(\lambda - 1)a\} - (\lambda - 1)a \cos\{(\lambda - 1)a\}} \\ & \times [\sin(a\tau)H(\bar{\tau}) + \sin\{a(\tau - \tau_0)\}H(\bar{\tau} - \tau_0)] \\ & + 2a\xi^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\xi \lambda \omega_j^2 + 1) \sin\{(\lambda - \xi)\omega_j\} - (\lambda - \xi)\omega_j \cos\{(\lambda - \xi)\omega_j\}}{(\omega_j^2 - a^2)\omega_j [(\lambda^2 + 1) \sin\{(\lambda - 1)\omega_j\} + \lambda(\lambda - 1)\omega_j \cos\{(\lambda - 1)\omega_j\}]} \\ & \times [\sin(\omega_j \tau)H(\bar{\tau}) + \sin\{\omega_j(\tau - \tau_0)\}H(\bar{\tau} - \tau_0)] \end{aligned} \quad (20)$$

このとき ω_j は次式を満足する第 j 番目の正根である。

$$\tan\{(\lambda - 1)\omega_j\} = \frac{(\lambda - 1)\omega_j}{\lambda\omega_j^2 + 1} \quad (21)$$

3. 実 験

截頭円錐棒に関して実験を行ない理論値との比較を行なった。細いピアノ線で水平につるした截頭円錐棒の棒端に、同様にピアノ線をつるして振子とした鋼球を衝突させて実験を行なった。試験棒は鋼で Fig. 2 に示す寸法の異なる 2 種類を用いた。同図の①～④は測定位置でおのこの半導体ひずみゲージ (共和電業社製 KSP-2-E4) が軸対称に 4 枚ずつ接着されている。これらをホイートストンブリッジ回路を通して直接シンクロスコープ (岩崎通信機社製 SS-5100) に接続しひずみ波の時間変動を測定した。半正弦状の応力パルスは鋼球を棒端に衝突させることによって発生させた。このような方法によって得られる応力パルスは式 (7) でほぼ近似され得ることが知られており²⁾, 本実験においても確かめられている。使用した鋼球は直径 $1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}$ インチの 3 種類でこれらを約 1 m/sec の速度で棒端の中心に衝突させることによって各々パルス幅 t_0 が約 100, 130, 160 μ sec すなわち波長 A がおよそ 52, 68, 83 cm の半正弦状の応力パルスが得られた。したがって本実験においては最大半径 r_l と波長 A の比は $0.015 < r_l/A < 0.04$ の範囲である。

Fig. 3 (a)~(c) にひずみ波の測定例を示す。截頭円錐棒 A に直径 1 インチの鋼球を衝突させた場合で $r_l/A \approx 0.38$ のときである。図中の ①～④は Fig. 2 のゲージ位置におけるひずみ波の時間変動であり、ほぼ波頭が 2 往復する時間範囲である。

Fig. 4 (a) は Fig. 3 (a)~(c) に得られた測定結果を整理した図である。

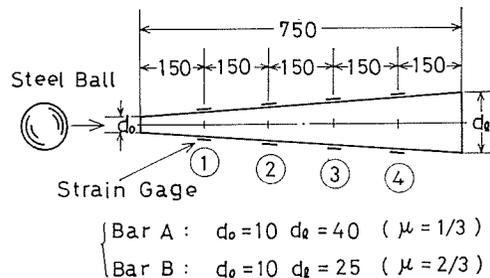


Fig. 2 Specimen dimension and observation stations

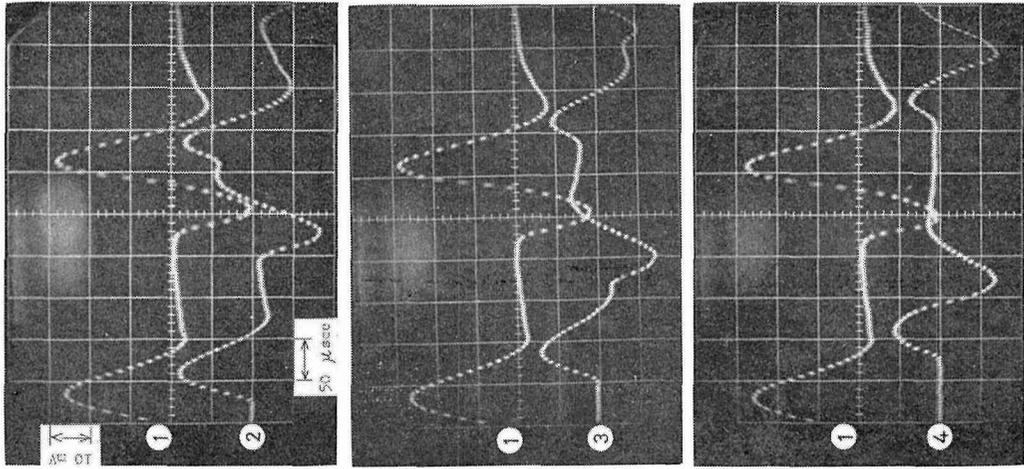


Fig. 3 Typical strain histories on the truncated cone A

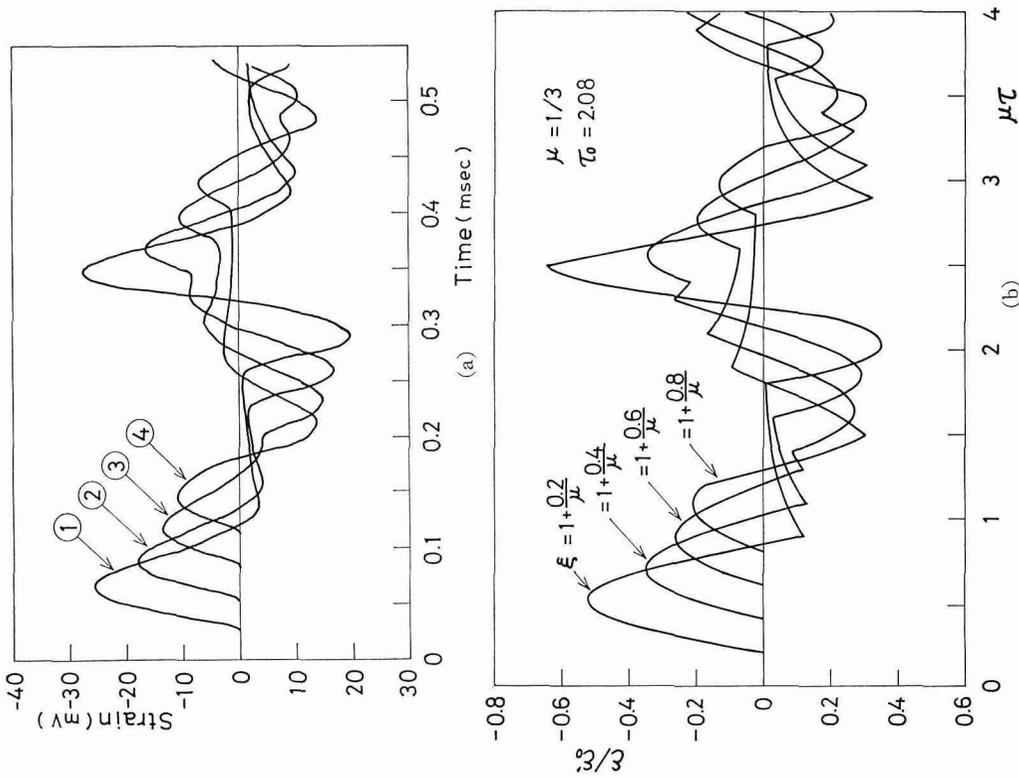


Fig. 4 Comparison of experimental and calculated pulses on the bar A
 (a) Measured strain histories for impact with 1-in. dia. sphere
 (b) Corresponding theoretical strain-time curves

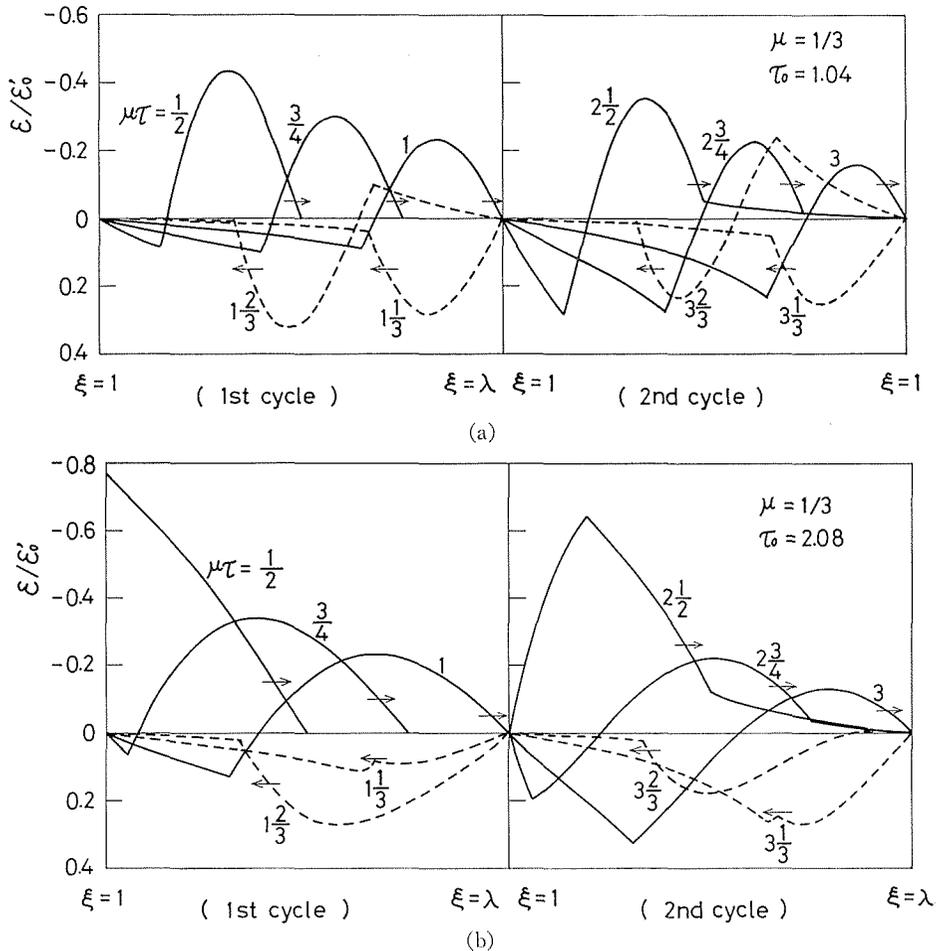


Fig. 5 Propagation of strain pulses in the bar A for two incident pulses
 (a) Wave-length $t_0 = 50 \mu\text{sec}$ and (b) $t_0 = 100 \mu\text{sec}$

Fig. 4 (b) は Fig. 4 (a) に対応する理論値を示した図で $c_0 = 5200 \text{ m/sec}$, $t_0 = 100 \mu\text{sec}$ (したがって $\tau_0 = 2.03$) の値を用いた場合である。一方は横慣性等を無視した一次元理論よりの計算結果であり、他方、実験的には入力パルスは正確な半正弦形ではないにもかかわらず Fig. 4 (a), (b) の各々対応するひずみ波形は良く似た結果となっている。他の鋼球と截頭円錐棒の組合せによって得られた結果も Fig. 3 (a), (b) の対応関係にほぼ近いものであった。

Fig. 5 に各時刻におけるひずみの伝播波形を (a) にパルス幅 $t_0 = 50 \mu\text{sec}$ (b) に $t_0 = 100 \mu\text{sec}$ の場合について示す。ただし、式 (20), (21) よりの計算結果で棒 A に相当する $\mu = 1/3$ の場合である。時刻 $\mu\tau = 1$ のとき衝撃端より入射した応力パルスの波頭は他端に到達しそこで反射されて $\mu\tau = 2$ で衝撃端に戻る。波頭の 2 往復する時間域までの波形を示した。縦軸の数値の-は圧縮波を+は引張り波を表わし各波形に付いている矢印は波頭の進行方向を示す。パルス幅の違いによって伝播波形は異なるが、いずれも伝播波形後部に逆符号の部分に伴うことがわかる。たとえば $0 < \mu\tau < 1$ では入射波は純粋に圧縮波であるにもかかわらず後部に引張波を伴っている。これはテーパ面からの連続的の反射による結果であり一様断面棒の場合には見られない現象である。このことは Fig. 3 (a)~(c) の実験から観察される。

4. 結 言

漸変断面を有する有限長棒を伝播する応力パルスの挙動を一次元弾性理論に基づいてラプラス変換法を用いて解析した。一例として截頭円錐棒の場合について数値計算を行ないひずみ波の時間変動ならびにその伝播波形を示した。また対応する実験を行ない計算値との比較を行なった。実験を $0.015 < r_1/A < 0.04$ かつ $A < l$ の条件下で行なった結果、応力パルスの伝播に伴う分散はほとんど認められずまた横慣性等による影響も大きくは現われず、実験値と計算値はかなり良く一致し、得られた解析結果の有効性が確認された。

最後に実験に協力して戴いた当時学生であった三間正氏、真田寿美夫氏に感謝の意を表す。

文 献

- 1) Tsui, T.: Trans. ASME., Ser. E, 35 (1968), 824.
- 2) Fisher, H. D.: Trans. ASME., Ser. E, 39 (1972), 1159.
- 3) Handelman, G. H. and Rubinfeld L. A.: Trans. ASME., Ser. E, 39 (1972), 279.
- 4) Kenner, V. H. and Goldsmith W.: Experi. Mech., 8-10 (1968), 442.
- 5) Kenner, V. H., Goldsmith W. and Sackman J. I.: Trans. ASME., Ser. E, 36 (1969), 445.
- 6) 台丸谷, 他7名: 北大工学部研究報告, 77号 (昭50), 25.