HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	ランダム入力による衝突振動系の応答 ： アナログシミュレーション
Author(s)	入江, 敏博; 山田, 元; 古場田, 芳裕
Citation	北海道大學工學部研究報告, 84, 39-49
Issue Date	1977-07-11
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41424
Type	departmental bulletin paper
File Information	84_39-50.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第84号（昭和52年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 84 (1977)

ランダム入力による衝突振動系の応答

—— アナログシミュレーション ——

入江敏博* 山田 元* 古場田芳裕**

（昭和51年12月28日受理）

Dynamic Response of a Vibro-Impact System to Random Force

—— Analogue Simulation ——

Toshihiro IRIE, Gen YAMADA and Yoshihiro KOBATA

(Received December 28, 1976)

Abstract

The impact vibration arising when a mass collides with a rigid wall under the action of a harmonic force has been studied intensively in recent years. However, in the literature only a limited number of papers are available on the impact vibration caused by a random force.

In this paper, a computer simulation was carried out on stationary impact vibration arising in such a vibro-impact system under the action of a random force with stationary Ergodicity and a harmonic force including random components by the use of the hybrid computer HIDAS-2000 consisting of digital and analogue computing systems. From the present study, the following conclusions were obtained. When a random force acts on the system with a small clearance, small collisions arise frequently at short time intervals, but deflections, colliding velocities and time intervals between two adjacent collisions become large with the increase of the clearance. When a harmonic force including random components acts on the system, peak values appear in the vicinity of the frequency and 2, 3, ... and 1/2, 1/3, ... times as many as the frequency of the harmonic force in the powerspectrum density curves. The fact suggests that the fundamental, super- and sub-impact vibrations arise in the system.

1. まえがき

機械や機械構造物は多くの機械要素から構成されているが，これらの要素の間には，多少とも遊び（すき間）が存在するのが普通である。この種の遊びは機械系に複雑な衝突振動を引き起こし，そのために機械の性能や精度を劣化させるのみならず，ひいては機械の寿命を縮めるにいたる。一方，パイルドライバー，振動スクリーン，鍛造機械，衝撃ダンパのように，この種の衝突振動のエネルギーを積極的に利用する機械もある。

従来こういった問題について，衝突振動系を1自由度振動系[1),2)]あるいは多自由度振動系[3)]で表わして，これに加振力が作用するとき起こる衝突振動を研究した論文はかなり多い。しかしこれらはいずれも入力が調和力の場合に限られており，わずかに Masri がランダム力による衝撃

* 機械工学第二学科 機械力学講座
** 現在はキャノン株式会社

ダンパの応答を論じた研究[4]があるに過ぎない。

この問題について，前に著書らは1自由度振動系のディジタルシミュレーションを試みたことがあるが[5]，ランダム入力として完全なガウス分布をもつ白色ノイズを用いることができなかった。また振動系の応答計算，記録，信号の変換やパラメータの変更などにはアナログ計算機の方が効率がよく，データ処理や計算のコントロールのためにはディジタル計算機の方が適しているので，本研究では両者の機構をあわせもつハイブリッド計算機 HIDAS-2000 を用いていっそう詳しい計算を試みる。

2. 衝突振動の計算法

図1に示すように，こわさ k のばねと減衰系数 c のダンパに支えられた質量 m の物体が，固定壁と一定の間隔（遊び）d を隔てて静止するか $(d>0)$，圧着されて $(d<0)$ 静止している。この物体にランダム加振力 $F(t)$ が作用するとき，物体の運動はつぎの運動方程式に支配される。

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F(t) \tag{1}$$

x は物体の静止平衡位置から壁の方向に測った動的な応答変位を表わすが，物体が静止時壁面に圧着されているときは，壁を取り去った自由物体の平衡位置から測った変位を表わす。変位，時間，力などに無次元量 $\xi=x/x_{st}(x_{st}=F_0/k:F_0$ は基準力$)$，$\tau=\omega_0 t(\omega_0=\sqrt{k/m}$：非減衰固有振動数$)$，$f(\tau)=F(t)/F_0$，減衰比 $\zeta=c/2\sqrt{mk}$ (<1) を用いれば，式 (1) は

$$\ddot{\xi}+2\zeta\dot{\xi}+\xi=f(\tau) \tag{2}$$

と書ける。ここで記号 $\cdot$ は τ に関する微分を表わす。静止時物体が壁面に圧着されているか，遊びがあるかを問わず，加振力がある一定のレベルに達すると図2のように壁面との間に衝突振動が起こる。この図で $\delta=d/x_{st}$ は無次元遊び，τ_j は衝突時刻，$z_j=\tau_j-\tau_{j-1}$ はあい隣る二つの衝突間の時間間隔，$u_{j\mp0}=\dot{\xi}(\tau_{j\mp0})$ は衝突直前と直後の物体の速度を表わす。

ここでは，衝突の際に生じる物体と壁面の変形や衝突時間は，物体の変位や振動周期に比べてきわめて小さく，また衝突直前と直後の速度の間に物体と壁の間の反発係数 ε を用いた一定の関係

$$u_{j+0}=-\varepsilon u_{j-0} \qquad (0<\varepsilon<1) \tag{3}$$

があるものとして計算する。

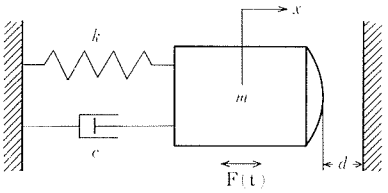

図1　遊びをもつ衝突振動系

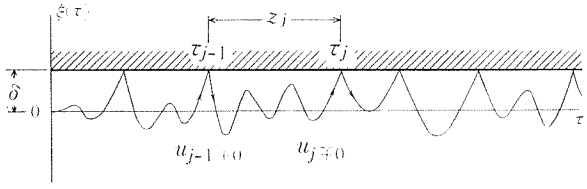

図2　物体と壁面の間に起こる衝突振動

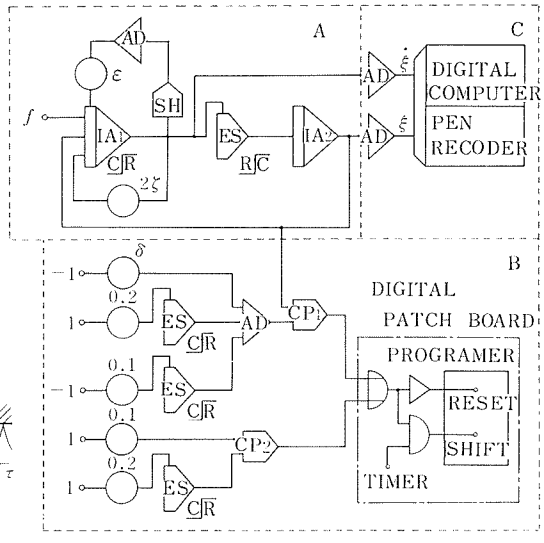

図3　シミュレーション用ブロックダイヤグラム

図3はこの種の振動を計算するためのブロックダイヤグラムを示す。これは応答計算を担当するAブロック，判定，制御のためのBブロックおよびデータ処理のためのCブロックの三つのブロックから構成される。入力によって起こる物体の運動はAブロックで演算されるが，物体が壁に達すると，Bブロックで衝突の判定がなされ，コンパレータ CP_1 の信号によってサンプルホルダ SH に衝突速度が保持される。そして CP_1 の信号とタイマーからの信号によってプログラマーを作動させ，積分器 IA_1 をリセットする。プログラマーで指定された時間が経過したのち，再び IA_1 を作動させて演算を続行する。入力と物体の変位，速度は必要に応じてそれぞれディジタル部Cに送られて記録され，処理される。

3. ランダム入力による定常衝突振動

上記の方法によって計算した定常エルゴード的なランダム入力による振動系の定常応答を以下に示す。図4は系に作用する入力と，これによる物体の変位および速度の計算例を示す。この場合の入力にはアナログ部が内蔵する雑音発生器が発生するランダム波を利用している。厳密に考えれば，積分器がリセットされている間に入力は変化するが，この計算過程のリセットタイムは8～9 msec で，系の固有周期 2π sec に比べてきわめて小さく，物体の運動に対するその影響(運動の誤差)は大きいものではない。

図5は入力のエルゴード性を仮定して，その自己共分散

$$C_{ff}(\tau^*)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\{f(\tau)-\bar{f}\}\{\bar{f}(\tau+\tau^*)-\bar{f}\}d\tau \tag{4}$$

を求めたものである。ここで

$$\bar{f}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(\tau)d\tau \tag{5}$$

は入力の平均値を表わす。$\bar{f}=0$ のときは，$C_{ff}(\tau^*)$ は入力の自己相関関数と一致する。図6は入力のパワスペクトル密度

$$S_f(\beta)=\int_{-\infty}^{\infty}\{C_{ff}(\tau^*)+\bar{f}^2\}e^{-j\beta\tau^*}d\tau^* \qquad (\beta=\omega/\omega_0) \tag{6}$$

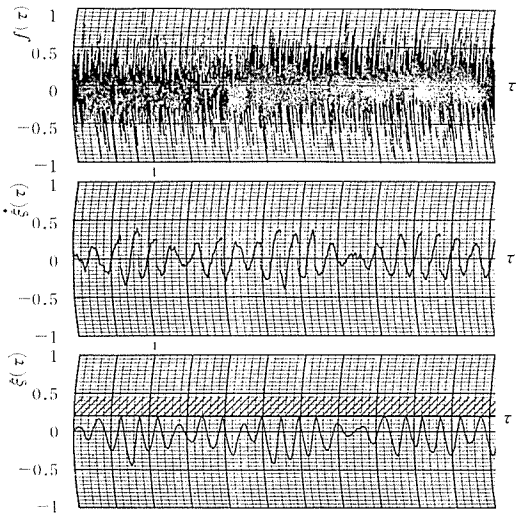

図4 ランダム入力と物体の応答例
($\zeta=0.01$, $\delta=0.2$, $\varepsilon=0.5$)

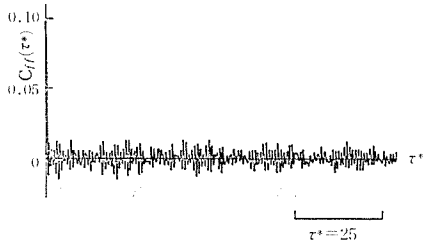

図5 入力の自己共分散 ($(rms)_f=0.32$)

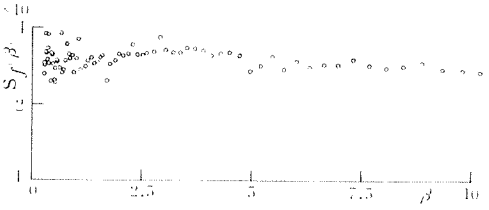

図6 入力のパワスペクトル密度 ($(rms)_f=0.32$)

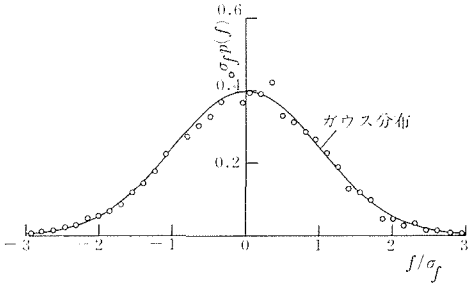

図7 入力の確率密度 ($(rms)_f=\sigma_f=0.32$)

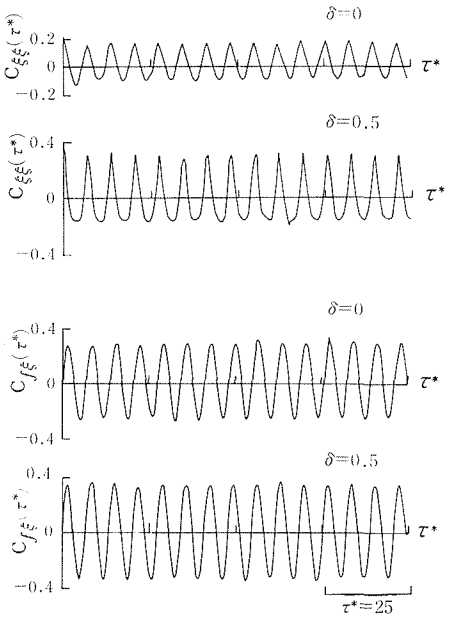

図8 変位の自己分散
($\zeta=0.01$, $\varepsilon=0.5$; $(rms)_f=0.32$)

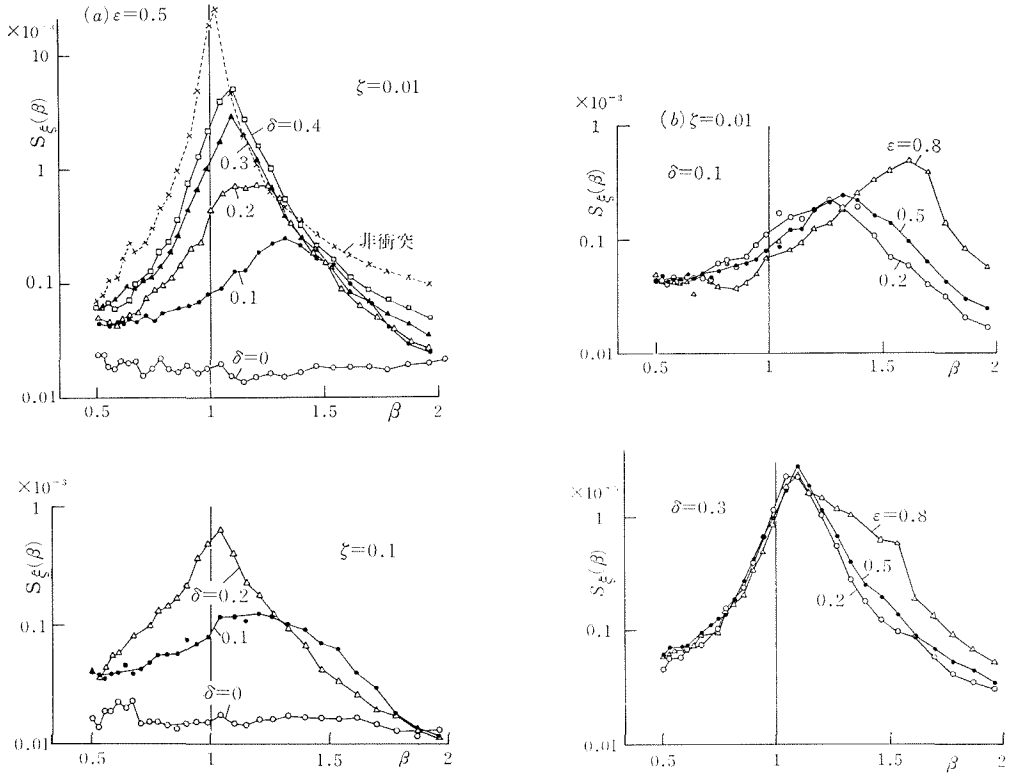

図9 応答変位のパワスペクトル密度 ($(rms)_f=0.32$)

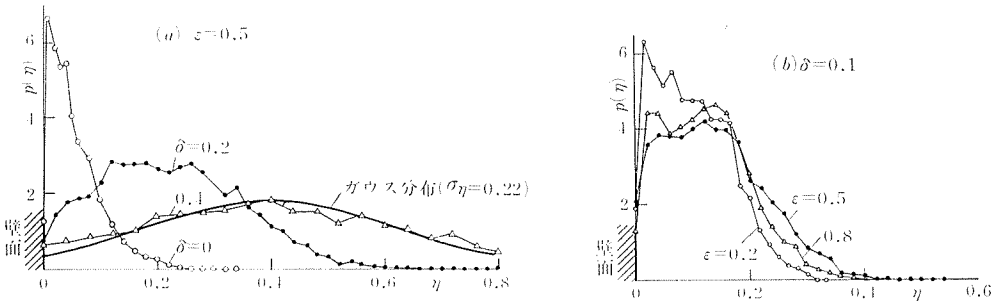

図10 応答変位の確率密度 ($\zeta=0.01$; $(rms)_f=0.32$)

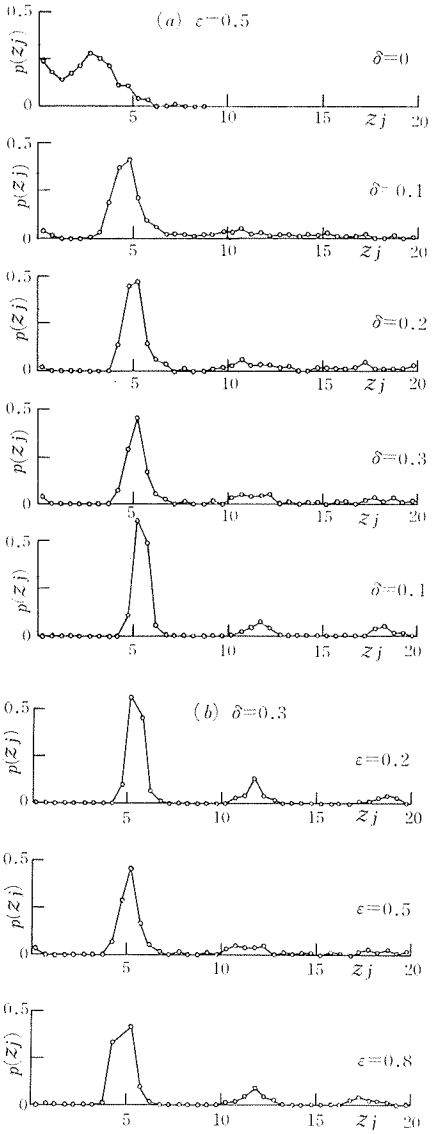

図11 衝突時間間隔の確率密度
($\zeta=0.01$; $(rms)_f=0.32$)

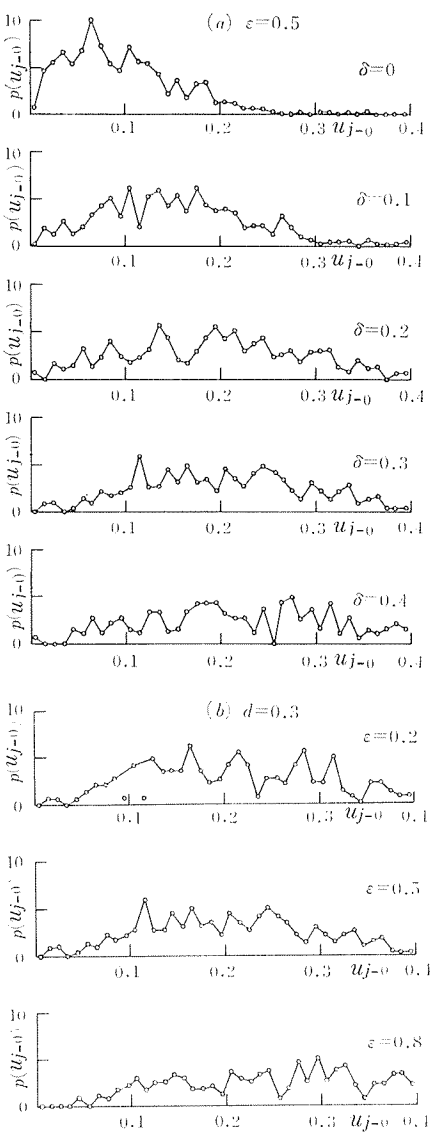

図12 衝突速度の確率密度
($\zeta=0.01$; $(rms)_f=0.32$)

を示し，図7は確率密度 $p(f)$ を示す。これらの曲線から，ここで用いた入力はほぼガウス分布を有する白色ノイズに近いものであることがわかる。これらの図に記した $(rms)_f$ と σ_f は，それぞれ入力の rms 値と標準偏差を表わす。

図8に変位の自己共分散 $C_{\xi\xi}(\tau^*)$ を示す。これから物体の壁の間に遊びがないか，遊びがあっても小さいときは，壁面のごく付近で小さい非周期的衝突振動が頻繁に起こるにすぎないが，遊びが大きくなるにつれて振幅は大きくなり，かつ周期的な振動が起こることがわかる。このことは応答変位のパワスペクトル密度 $S_\xi(\beta)$ を描いた図9 (a) をみても明らかである。この傾向は，振動系の減衰の大きさによってもかわらないが，減衰の大きい系では全体に振動レベルは低下する。また同図 (b) からわかるように，かなり遊びが小さい系では，物体と壁面間の反発係数が大きくなるにしたがって，周期が短い (β の大きい) 衝突振動が起こるが，遊びがある程度大きくなると反発係数の大きさにかかわらず，振動の周期はほぼ一定の値をもつことがわかる。

図10は壁面から測った物体の変位 $\eta=\delta-\xi$ の確率密度を示す。同図 (a) から，遊びが小さいときは壁面の付近で物体が振動するのに対し，遊びが大きくなるにつれて物体の振幅も大きくなるが，遊びがいっそう大きくなると物体が壁面と衝突する回数も少なくなって，一定のガウス分布を有する非衝突振動に移行する。遊びが小さい系に起こる衝突振動については，同図 (b) に示すように，反発係数の大きさは物体変位に大きい影響はもたないようである。

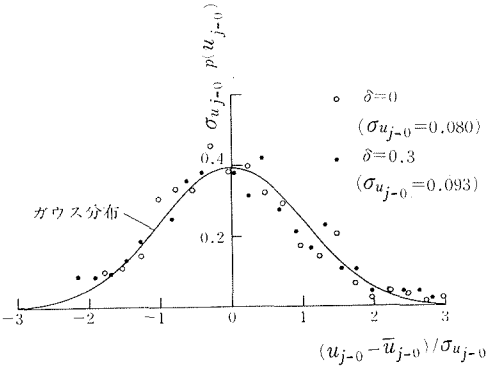

図13 衝突速度の確率密度とガウス分布
$(\zeta=0.01,\ \varepsilon=0.5;\ (rms)_f=0.32)$

図11は衝突時間間隔の確率密度を示す。図 (a) のように，遊びが大きくなるにしたがって時間間隔は多少大きくなり，密度曲線に鋭いピーク値が現われるとともに，その時間間隔の約2倍，3倍の時間間隔をもつ位置にも小さいピーク値が現われる。これは，ランダム入力による定常衝突振動においても，ほぼ一定の衝突周期期とその整数倍の周期を持つ衝突振動が存在し得ることを示唆している。また同図 (b) に示すように，一定の遊びを有する振動系において，反発係数が大きくなるにしたがって時間間隔はいくらか小さくなる傾向をもつ。

図12は衝突速度の確率密度を示す。同図 (a) より，遊びが大きくなるにつれて速度は広い範囲に分布し，かなり大きい速度に達することもあり得る。しかし衝突速度の大きさは，図 (b) にみるように反発係数の値によって著しい影響を受けるものではない。図13に示すように，この確率密度は，遊びの大きさにかかわらず，おおむねガウス分布に近いものとみてさしつかえないと思われる。

4. ランダム成分を含む調和入力による定常応答

つぎに，定常エルゴード性を有するランダム入力を含む調和入力 $f(\tau)=\sin\nu\tau+r(\tau)$ による系の応答を考える。

図14はこの種入力とこれによる物体の応答変位と速度に関する計算例を示す。物体の変位が遊びに等しくなったとき衝突が起こり，その結果急激な速度変動がひき起こされる。

図15は入力の自己共分散の計算例を示す。この場合，用いた入力のランダム成分は大きくないので，その関数の値は調和入力のそれとあまりかわらない。図16はこの入力のパワスペクト

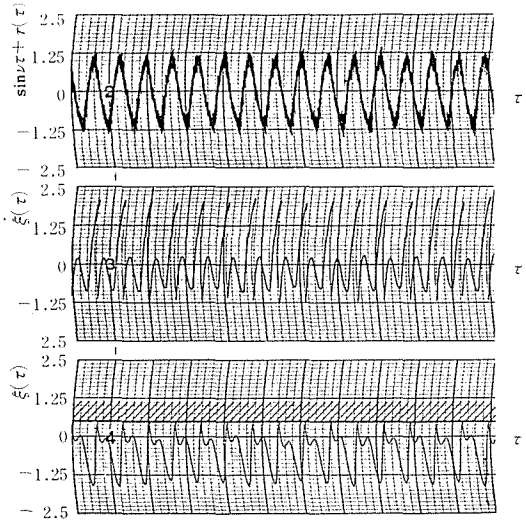

図 14 入力と物体の応答例 ($\zeta=0.05$, $\delta=0.5$, $\varepsilon=0.5$; $\nu=1/1.1$, $(rms)_r=0.13$)

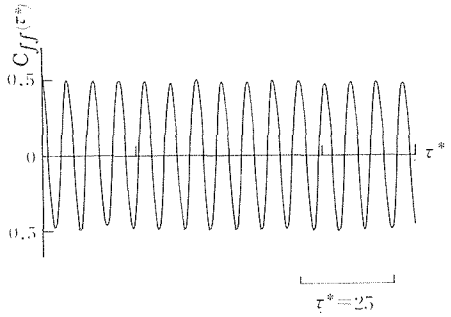

図 15 入力の自己共分散
($\nu=1/1.1$, $(rms)_r=0.13$)

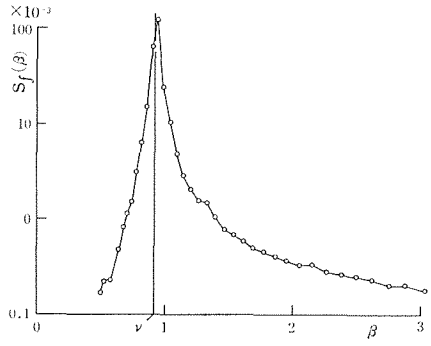

図 16 入力のパワスペクトル密度
($\nu=1/1.1$, $(rms)_r=0.13$)

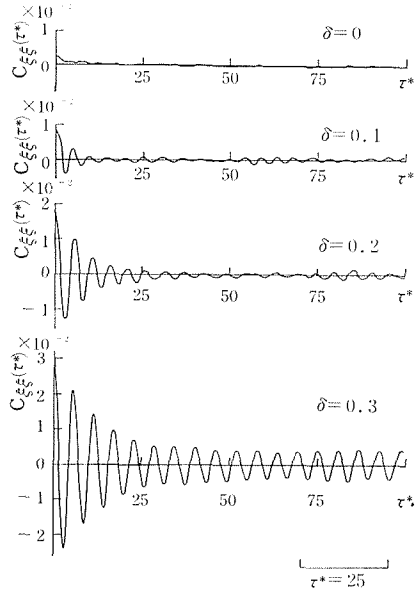

図 17 応答変位の自己共分散と入力と変位の相互共分散
($\zeta=0.05$, $\varepsilon=0.5$; $\nu=1/1.1$, $(rms)_r=0.13$)

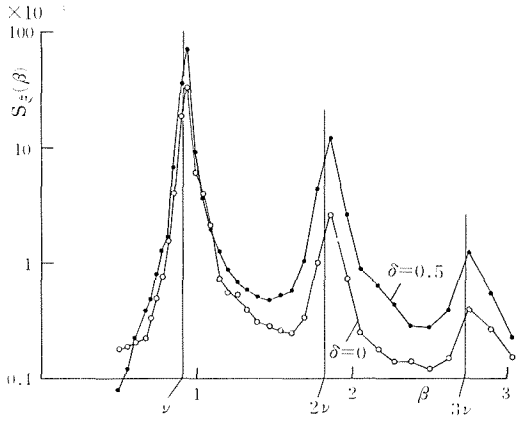

図 18 応答変位のパワスペクトル密度
($\zeta=0.05$, $\varepsilon=0.5$; $\nu=1/1.1$, $(rms)_r=0.13$)

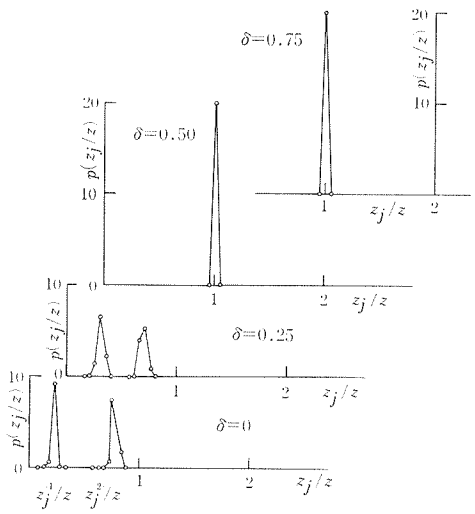

図 19 衝突時間間隔比の確率密度
($\zeta=0.05$, $\varepsilon=0.5$; $\nu=1/1.1$, $(rms)_r=0.13$)

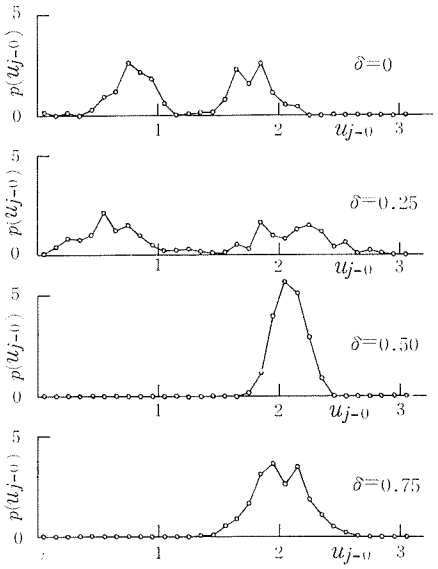

図 20 衝突速度の確率密度
($\zeta=0.05$, $\varepsilon=0.5$; $\nu=1/1.1$, $(rms)_r=0.13$)

ル密度を示す。調和入力では，$\beta=\nu$ の位置に単に一つの線スペクトルが現われるにすぎないが，ランダム成分によってこの点付近にパワスペクトル密度が分布する。

図 17 のおのおのの図は，それぞれ変位の自己共分散 $C_{\xi\xi}(\tau^*)$ および入力の相互共分散

$$C_{f\xi}(\tau^*)=\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}\{f(\tau)-\bar{f}(\tau)\}\{\xi(\tau+\tau^*)-\bar{\xi}(\tau)\}d\tau \tag{7}$$

を示す。分散関数でみる限り，遊びの大小にかかわらず，これらの値はいずれも単なる調和入力のみによる結果と大きい差を示さない。

図 18 は応答変位のパワスペクトル密度を示す。入力の調和成分の振動数 ν とその整数倍の振動数 2ν, 3ν のごく近くにピーク値が現われ，また遊びが大きくなるにつれて運動の振幅が増すので，当然パワのレベルも大きくなる。ランダム成分を含まない場合には，前に筆者の一人が指摘したように[6]，1 サイクルの調和入力が作用する間に 1 回衝突するいわゆる基本 (1/1) 衝突振動と，この間に 2, 3, ... 回衝突するいわゆる高次 (2/1, 3/1, ...) 衝突振動が存在するため，ν, 2ν, 3ν, ... の位置に線スペクトルが現われる。しかしこの場合は，ランダム成分が存在するために，この近傍に変位のパワスペクトル密度が分布することとなる。

図 19 は，調和入力の周期 $\tau=2\pi/\nu$ に対する衝突時間間隔比 z_j/z を示す。遊びが大きい系では，調和入力の周期に等しい時間間隔で衝突振動が起こるが，遊び小さくなると 1 周期の調和入力が働く間に 2 回の衝突を伴う振動が起こるために，$z_j/z<1$ の範囲において $z_j^{(1)}/z$ および $z_j^{(2)}/z$ に二つのピークが現われる。そしてこの場合，$z_j^{(1)}+z_j^{(2)}=z$ である。これらの図に現われていないが，基本衝突振動，高次衝突振動以外に，調和入力の 2, 3, ... 周期の間に 1 回衝突する分数 (1/2, 1/3, ...) 衝突振動も存在する。このことはのちに触れることとする。

図 20 は衝突速度の確率密度を示す。大きい遊びを有する系では，速度分布は一つのピーク値をもつのに対し，遊びが小さくなると，速度に二つのピークが現われてくる。このように調和入力のみが作用する定常衝突振動では，系のパラメータによってきまる一定の衝突時間間隔，衝突速度の値をもつに対し，ランダム入力の影響のため一定値をもたないで，これらの値の付近であ

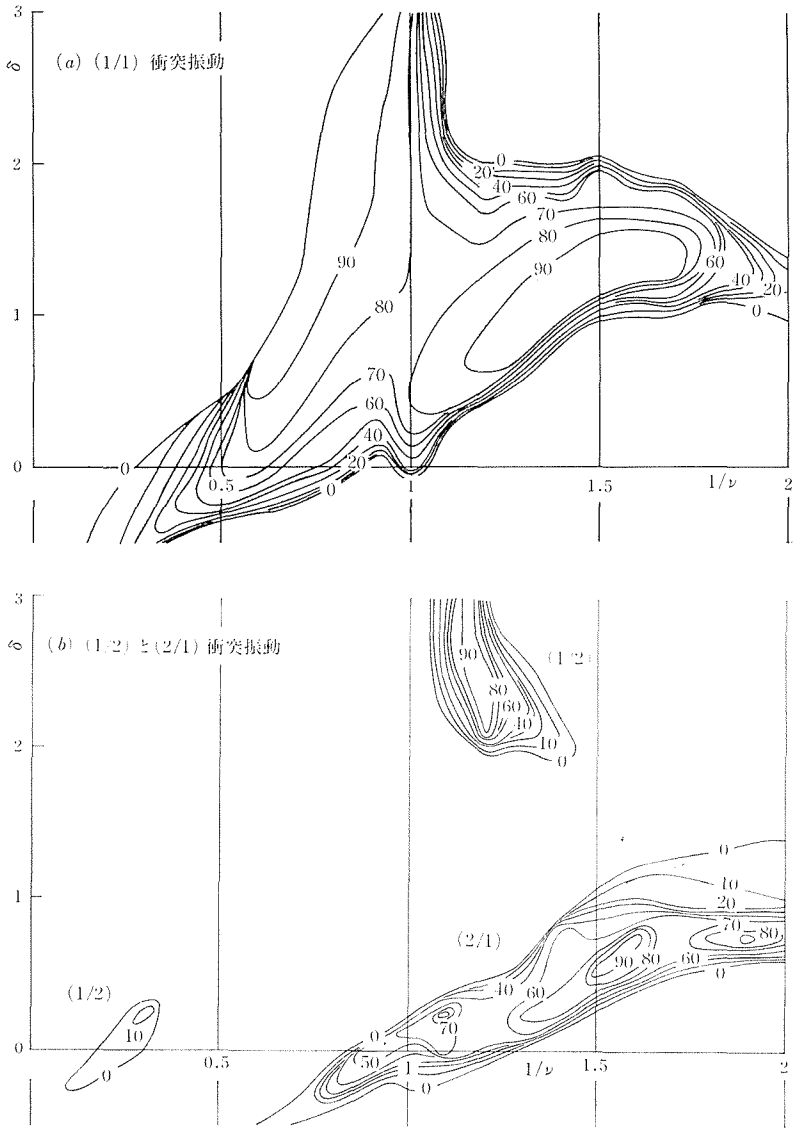

図 21 衝突振動が起こる確率 ($\zeta=0.05$, $\varepsilon=0.5$; $\sin\nu\tau+r(\tau)$, $(rms)_r=0.26$)

る幅をもつこととなる。

図 21 のおのおのの図は，上記の入力が作用した場合に (a) 基本 (1/1) 衝突振動，(b) 高次 (2/1) 衝突振動と分数 (1/2) 衝突振動が起こる確率を，振動数—遊び平面上に描いたものである。この確率を計算するに当っては，衝突回数が 250 回におよぶ振動の衝突時間間隔のうち，(1/1) 振動では $z_j/z-1$，(2/1) 振動では $(z_j^{(1)}+z_j^{(2)})/z-1$，(1/2) 振動では $z_j/2z-1$ $(z=2\pi/\nu)$ がいずれも ±1.5% 以内に入ったものの回数をカウントして求めている。この図とつぎの図 22 において，曲線の形状を見易くするために横軸に振動数の逆数を用いている。これらの図の曲線はすべて各形の衝突振動が起こる確率の等高線を示し，各曲線に記載された数字は確率の値を%で表わしている。

基本衝突振動は，非衝突振動系の固有振動数を含む広い範囲にわたってかなり高い確率で発生

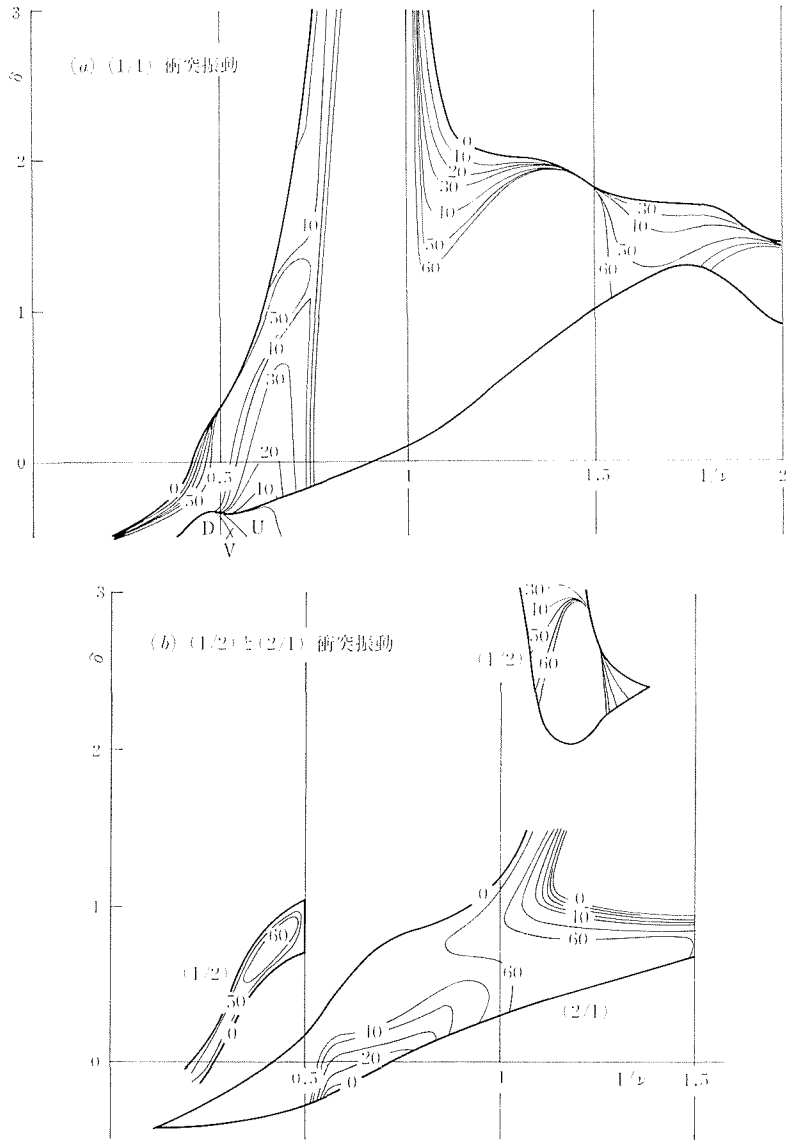

図 22 周期的な衝突振動が起こる振動数と遊びの範囲 ($\zeta=0.05$, $\varepsilon=0.5$; $\sin\nu\tau$)

する。これに対し，(2/1) 衝突振動は遊びが小さく，調和入力の振動数が低い ($1/\nu$ が大きい) 範囲で起こる。また (1/2) 衝突振動は，遊びが小さいと，振動数が高い ($1/\nu$ が小さい) 場合に起こるが，遊びが大きくなると振動数の低いときにも起こりうる。高い振動数において，一見 (1/2) 衝突振動が狭い範囲でしか起こらないようにみえるのは，横軸に $1/\nu$ をとったためこの領域が圧縮されているからである。図 21 の二つの図を互いに重ね合わせると，遊びの大きさや，振動数が変わるにしたがって，一つの形の衝突振動が，他の形のものに移行すること，およびこれらの境界付近において二つの形の振動が一定の確率をもって同時に起こり得ることが認められる。

図 22 の太い実線に囲まれた領域は，ランダム成分を含まない ($r(\tau)=0$) 調和入力によって，安定で周期的な衝突振動が起こる振動数と遊びの範囲を示す[5),6)]。この太線の外部では，周期解

がないか，条件 $u_{j-0}>0$ や $\xi_j(\tau)\geqq 0$ が満足されないか，あるいは周期的な衝突振動が起こり得ても，安定な衝突振動が持続し得ない。太線内の各曲線は運動の安定性の度合い

$$S=100(1-\lambda) \qquad (\%)$$

を示す等高線を示す。

図21と図22の各振動形に対応する図を重ね合わせることによって，概して安定度の高い振動数と遊びをもつ系においては，各形の衝突振動が高い確率で起こることがわかる。またランダム成分が大きくなると，当然衝突振動の起こる確率は低下する。

5. 結　　論

定常エルゴード性をもった白色ランダム入力，およびランダム成分を含む調和的な入力が，遊びを有する1自由度振動系に作用した場合，この系に起こる定常な衝突振動のアナログシミュレーションを実施し，その結果つぎの結論を得た。

(1) ランダム入力が作用する場合，遊びが大きい系では定常衝突振動の周期は長く，物体の応答変位も一般に大きい。

(2) 遊びが大きくて，衝突が起こりにくい系では，応答変位の確率密度はガウス分布に近いが，遊びが小さくなるにしたがって，衝突回数が増し，その結果ガウス分布とは異なった密度曲線を示すにいたる。

(3) 衝突時間間隔，衝突速度とも，遊びが大きくなるにしたがって増加するが，衝突速度は遊びの大きさにかかわらず，ほぼガウス分布に近い値をもつ。

(4) ランダム成分を含む調和入力が作用する場合，遊びが著しく大きくない系では，応答変位のパワスペクトル密度は調和成分のもつ振動数とその整数倍の振動数の付近において一定のピーク値をもつ。

(5) かくしてランダム成分を含む調和入力の作用によって，振動系には基本衝突振動以外に，高次あるいは分数衝突振動が起こり得る。いずれの形の振動が起こりやすいかは，すべて遊びの大きさと入力の調和成分の振動数による。

(6) 調和的な入力が作用する場合に高い安定度で周期的な衝突振動が起こる振動系では，ランダム成分が含まれていても，高い確率で定常な衝突振動が起こる。しかし当然のことながら，ランダム成分が大きくなるにつれてその値は低下する。

本研究の計算に当って，北海道大学汎用シミュレータ室の HIDAS-2000 を利用させて頂いたことを付記して謝意を表する。

文　　献

1) Senator, M., J. Acoust. Soc. Amer., 47 (1970), 5, p. 1390.
2) Kobrinskii, A. E., Dynamics of Mechanisms with Elastic Connections and Impact Systems (1969), ILIFFE Books Co. .
3) Fu, C. C. and Paul,B., Int.J. Solids & Struct., 4 (1968), p. 897.
4) Masri, S. F. and Ibrahim, A. M., J. Acoust. Soc. Amer., 53 (1973), 1, p. 200.
5) 入江ほか2名，北海道大学工学部研究報告，第72号（昭49），p. 13.
6) 深谷，入江，北海道大学工学部研究報告，第58号（昭45），p. 75.