



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	可撓板残留応力測定理論 : 拘束X線法, 拘束歪ゲージ法
Author(s)	土肥, 修; Doi, Osamu; 山口, 昭則 他
Citation	北海道大學工学部研究報告, 85, 27-31
Issue Date	1977-09-16
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41433">https://hdl.handle.net/2115/41433</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	85_27-32.pdf



# 可撓板残留応力測定理論

— 拘束 X 線法, 拘束歪ゲージ法 —

土肥 修\*, 山口昭則\*\*

(昭和 52 年 3 月 30 日受理)

## Theories of Residual Stress Measurements in a Flexible Plate

— Restriction X-Ray Method, Restriction Strain Gauge Method —

Osamu DOI, Akinori YAMAGUCHI

(Received March 30, 1977)

### Abstract

General methods to measure residual stress such as X-Ray Method and Strain Gauge Method are hardly applicably to a flexible plate of poor rigidity due to its easy deformability.

The authors propose the theories of new methods to calculate the principal residual stresses in a flexible plate by measuring the surface stress with X-ray on a removing surface or on a non-removing one, or measuring the strain with a resistance strain gauge, restricting the bending deformation of a plate on a rigid surface with known curvatures after each successive thin layer removal.

### 1. はしがき

極く薄い板の様に剛性が極めて小さく, 容易に弾性変形して一定の形状を保ち難い所謂可撓板の残留応力測定には従来の X 線法<sup>1)</sup>, 歪ゲージ法<sup>2)</sup>をそのまま適用する事が出来ない。

本論文においては可撓板の一方の表面から逐次薄層を除去し, 一定曲率面上に拘束した状態で X 線を用いて測定される除去面 (表面) 又は非除去面 (裏面) の応力から断面内の残留応力分布を求める拘束 X 線法 (表面照射法, 裏面照射法) 及び非除去面に貼付した抵抗線歪ゲージの歪から計算する拘束歪ゲージ法の測定理論を提唱する。曲率を一定に拘束するので拘束曲率法は存在しない。

理論解析に当り次の仮定を設ける。

(1) 可撓板は等方性とする。(2) 残留主応力軸は板の対称軸に一致し, 既知とする。(3) 残留主応力は厚さの方向にのみ変化する。(4) 歪ゲージ法においては抵抗線歪ゲージの剛性が板に比べて十分に小さいものとする。

\* 機械設計学講座

\*\* 特許庁

## 記 号

$\sigma_x, \sigma_y$ :	残留主応力	$C_{0x}, C_{0y}$ :	初期主曲率
$\sigma_X, \sigma_Y$ :	X線測定応力(表面法)	$C_{1x}, C_{1y}$ :	拘束面主曲率
$\bar{\sigma}_X, \bar{\sigma}_Y$ :	X線測定応力(裏面法)	$C_x, C_y$ :	主曲率変化
$\sigma_{nx}, \sigma_{ny}$ :	面内力変化による応力(表面法)	$h$ :	板厚
$\bar{\sigma}_{nx}, \bar{\sigma}_{ny}$ :	面内力変化による応力(裏面法)	$z$ :	除去厚
$\sigma_{bx}, \sigma_{by}$ :	曲げ応力(表面法)	$\zeta$ :	$z$ の変数 ( $0 \leq \zeta \leq z$ )
$\bar{\sigma}_{bx}, \bar{\sigma}_{by}$ :	曲げ応力(裏面法)	$d$ :	抵抗線歪ゲージベース有効厚
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ :	抵抗線歪ゲージの歪	$E$ :	縦弾性係数
$\varepsilon_{nx}, \varepsilon_{ny}$ :	面内力変化による歪	$\nu$ :	ポアソン比
$\varepsilon_{bx}, \varepsilon_{by}$ :	曲げ歪	$K, L$ :	常数

## 2. 拘束 X 線法

## 2.1 拘束 X 線表面照射法

可撓板の試験片につき一方の表面から薄層を除去して主曲率が既知の一定曲率面上に拘束し、除去表面に X 線を照射して測定される主応力から残留応力分布と初期主曲率を求める。 $x, y$  軸を主応力方向に、 $z$  軸を厚さ方向にとり、 $xz, yz$  面内の未知の主曲率半径  $1/C_{0x}$  及び拘束面の既知の主曲率半径  $1/C_{1x}$  に比べて板厚  $h$  が十分に小さいものとする。

図-1 において  $z$  迄の層を除去した時、除去表面に X 線を照射して測定される応力  $\sigma_X$  は残りの板に与える面内力による応力  $\sigma_{nx}$  と一定曲率面上に曲りを拘束した為の応力  $\sigma_{bx}$  の影響を受けて

$$\sigma_X(z) = \sigma_x(z) + \sigma_{nx}(z) + \sigma_{bx}(z) \quad (\text{以下複号同順}) \quad (1.1)$$

面内力による応力  $\sigma_{nx}(z)$  は単位幅について

$$\sigma_{nx}(z) = \frac{1}{h-z} \int_0^z \sigma_x(\zeta) \cdot d\zeta \quad (1.2)$$

初期主曲率  $C_{0x}$  の板を主曲率  $C_{1x}$  の面に拘束する為に生ずる曲げ応力  $\sigma_{bx}$  は

$$C_x = C_{1x} - C_{0x} \quad (1.3)$$

とおけば、板厚  $h$  が曲率半径の変化  $1/C_x$  に比べて十分に小さい時、

$$\sigma_{bx}(z) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} (C_x + \nu C_y) (h-z) \quad (1.4)$$

式(1.1)~(1.4)から

$$\sigma_X(z) = \sigma_x(z) + \frac{1}{h-z} \int_0^z \sigma_x(\zeta) d\zeta + \frac{E}{2(1-\nu^2)} (C_x + \nu C_y) (h-z) \quad (1.5)$$

$\sigma_X(z)$  は  $z$  の関数として測定されるから、第 2 種 Volterra 積分方程式 (1.5) の解として残留応力  $\sigma_x(z)$  の計算式が得られる。 $C_x$  は未知であるが、後で残留応力の釣合条件から求められるので一応、未定係数として取扱う。式(1.5)の解は

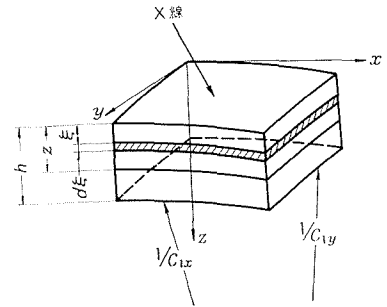


図-1 表面照射法の座標

$$\sigma_x(z) = \sigma_Y - \int_0^z \frac{\sigma_Y(\zeta)}{h-\zeta} \cdot d\zeta - \frac{E}{1-\nu^2} (C_x + \nu C_y) \left( \frac{h}{2} - z \right) \quad (1.6)$$

$C_x$  は未知の初期主曲率  $C_{0x}$  を含むから未定係数であり、残留応力分布を確定する為には  $C_x$  を求める必要がある。残留応力について面内力と曲げモーメントが何れも釣合うべき条件は

$$\int_0^h \sigma_x(z) dz = 0, \quad \int_0^h z \cdot \sigma_x(z) dz = 0 \quad (1.7)$$

式(1.6)右辺第3項は一樣曲げモーメントによる曲げ応力であるから式(1.7)第1式を恒等的に満足している。式(1.6)が式(1.7)第2式を満足する条件から

$$C_x + \nu C_y = - \frac{12(1-\nu^2)}{E \cdot h^3} \int_0^h z \left( \sigma_Y(z) - \int_0^z \frac{\sigma_Y(\zeta)}{h-\zeta} d\zeta \right) dz \quad (1.8)$$

$$K_x = \int_0^h z \left( \sigma_Y(z) - \int_0^z \frac{\sigma_Y(\zeta)}{h-\zeta} d\zeta \right) dz \quad (1.9)$$

とおけば

$$C_x = - \frac{12}{Eh^3} (K_x - \nu K_y) \quad (1.10)$$

式(1.3)から未知の初期主曲率は

$$C_{0x} = C_{1x} + \frac{12}{Eh^3} (K_x - \nu K_y) \quad (1.11)$$

実際の測定においては表面応力  $\sigma_Y$  と除去厚  $z$  との関係曲線につき、先ず式(1.6)右辺第3項を除いた式によって  $\sigma_x$  を計算して  $z$  との関係曲線を描き、図式的に面内力の釣合を検定して測定精度を確めた上でその応力曲線のモーメントが釣合う迄中立点廻りに回転の補正を施せば求める自由状態の残留応力分布が得られる。この時加えた補正值が式(1.6)右辺第3項に相当する。

## 2.2 拘束 X 線裏面照射法

一方の表面から薄層を除去して主曲率が既知の一定曲率面上に拘束し、非除去面に X 線を照射して測定される応力から残留応力分布と初期主曲率を求める。

図-2において表面から  $z$  迄除去した時、裏面の X 線測定応力  $\bar{\sigma}_Y$  は裏面の初期残留応力  $\sigma_x(h)$ 、残りの板に与える面内力による応力  $\bar{\sigma}_{nx}$ 、一定曲率面上に曲りを拘束した為の応力  $\bar{\sigma}_{bx}$  の合成となり、

$$\bar{\sigma}_Y(z) = \sigma_x(h) + \bar{\sigma}_{nx}(z) + \bar{\sigma}_{bx}(z) \quad (2.1)$$

$\bar{\sigma}_{nx} = \sigma_{nx}$  は式(1.2)、また  $C_x$  の符号を表面法と逆にとるので  $\bar{\sigma}_{bx}$  は式(1.4)  $\sigma_{bx}$  で与えられる。層除去前に一定曲率面上に拘束して測定される裏面の応力  $\bar{\sigma}_Y(0)$  は

$$\bar{\sigma}_Y(0) = \sigma_x(h) + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} (C_x + \nu C_y) \quad (2.2)$$

式(2.1), (2.2), (1.2), (1.4) から

$$\bar{\sigma}_Y(z) = \bar{\sigma}_Y(0) + \frac{1}{h-z} \int_0^z \sigma_x(\zeta) d\zeta - \frac{E}{2(1-\nu^2)} (C_x + \nu C_y) \cdot z \quad (2.3)$$

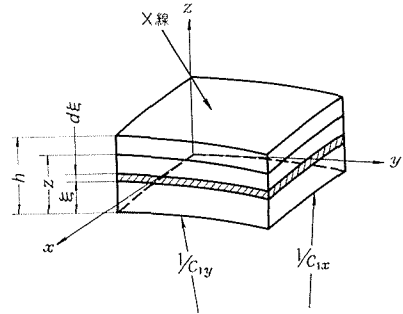


図-2 裏面照射法の座標

$\bar{\sigma}_x(z)$  は  $z$  の関数として測定されるから第1種 Volterra 積分方程式 (2.3) の解として残留応力  $\sigma_x(z)$  の計算式が得られる。 $C_x$  は未定係数として後で残留応力の釣合条件から求める。

$$\delta_x(z) = \bar{\sigma}_x(z) - \bar{\sigma}_x(0) \quad (2.4)$$

とおけば式 (2.3) の解は

$$\sigma_x(z) = (h-z) \frac{d\delta_x(z)}{dz} - \delta_x(z) + \frac{E}{1-\nu^2} (C_x + \nu C_y) \left( \frac{h}{2} - z \right) \quad (2.5)$$

未定係数  $C_x$  は残留応力の釣合条件式 (1.7) から求められる。式 (2.5) 右辺第3項は一樣曲げモーメントによる応力で式 (1.7) 第1式を恒等的に満足する。式 (2.5) が式 (1.7) 第2式を満足する条件から

$$C_x + \nu C_y = - \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} \int_0^h (h-z) \delta_x(z) dz \quad (2.6)$$

$$L_x = \int_0^h (h-z) \delta_x(z) dz \quad (2.7)$$

とおけば

$$C_x = - \frac{12}{Eh^3} (L_x - \nu L_y) \quad (2.8)$$

式 (1.3) から未知の初期主曲率は

$$C_{0x} = C_x + \frac{12}{Eh^3} (L_x - \nu L_y) \quad (2.9)$$

現実的には裏面の応力変化  $\delta_x$  と除去厚  $z$  との関係曲線につき、式 (2.5) 右辺第3項を除いた式によって  $\sigma_x$  を計算し、 $z$  との関係曲線を描き、図式的に面内力の釣合を検定して測定精度を確かめ、次にモーメントが釣合う迄その応力曲線に中立点廻りに回転の補正を施せば自由状態の残留応力分布が得られる。式 (2.5) 右辺第3項はその時加えた応力補正值を表す。

### 3. 拘束歪ゲージ法

未知の初期主曲率  $C_{0x}$  を有する可撓板について一方の面 (裏面) に残留主応力方向に各1枚の歪ゲージを貼布し、他方の面 (表面) から逐次薄層を除去して主曲率が既知の一定曲率面上に拘束した状態で測定される歪変化から残留応力分布と未知の初期主曲率を求める。

図-3 において表面から  $z$  迄除去した時、裏面の歪ゲージに現れる歪  $\varepsilon_x$  は垂直歪  $\varepsilon_{nx}$  と曲げ歪  $\varepsilon_{bx}$  の合成となり

$$\varepsilon_x(z) = \varepsilon_{nx}(z) + \varepsilon_{bx}(z) \quad (3.1)$$

$\varepsilon_{nx}$  は層除去による面内力の変化に対応し

$$\varepsilon_{nx}(z) = \frac{1}{E(h-z)} \int_0^z (\sigma_x(\zeta) - \nu \sigma_y(\zeta)) d\zeta \quad (3.2)$$

$\varepsilon_{bx}$  は板が自由状態の主曲率  $C_{0x}$  から拘束面の主曲率  $C_{1x}$  に変化した為の歪変化と、板厚が  $h$  から  $(h-z)$  に減少した為の歪変化から成り、更に抵抗線歪ゲージで測定される曲げ歪が正確には裏面からゲージベース有効厚  $d$  だけ離れたゲージワイヤ中心線の歪である点を考慮して

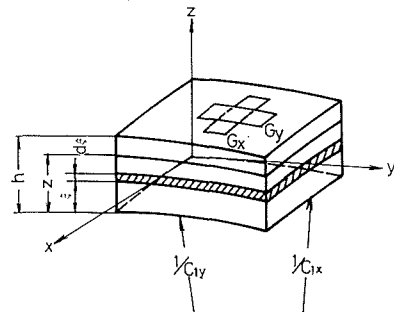


図-3 歪ゲージ法の座標

$$\varepsilon_{bx}(z) = (C_{1x} - C_{0x}) \left( \frac{h-z}{2} + d \right) - (C_{1x} - C_{0x}) \left( \frac{h}{2} + d \right) = -(C_{1x} - C_{0x}) \cdot \frac{z}{2} \quad (3.3)$$

式(3.1)~(3.3), (1.3) から

$$\sigma_x(z) = \frac{1}{E(h-z)} \int_0^z \left( \sigma_x(\zeta) - \nu \sigma_y(\zeta) \right) d\zeta - C_x \cdot \frac{z}{2} \quad (3.4)$$

連立第1種 Volterra 積分方程式(3.4)の解として残留応力は

$$\sigma_x(z) = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (h-z) \frac{d}{dz} \left( \varepsilon_x(z) + \nu \varepsilon_y(z) \right) - \left( \varepsilon_x(z) + \nu \varepsilon_y(z) \right) + (C_x + \nu C_y) \left( \frac{h}{2} - z \right) \right\} \quad (3.5)$$

未定係数  $C_x$  は残留応力の釣合条件から決定され, 残留応力  $\sigma_x$ , 未知の初期主曲率  $C_{0x}$  が確定する。式(3.5)右辺第3項は式(1.7)第1式を恒等的に満足する。式(3.5)が式(1.7)第2式を満足する条件から

$$C_x = -\frac{12}{h^3} \int_0^h (h-z) \cdot \varepsilon_x(z) dz \quad (3.6)$$

式(1.3)から

$$C_{0x} = C_{1x} + \frac{12}{h^3} \int_0^h (h-z) \varepsilon_x(z) dz \quad (3.7)$$

実際の測定においては未知の初期主曲率  $C_{0x}$  に無関係に既知の一定主曲率  $C_{1x}$  の面上に拘束した状態で歪計の零点を調整して適当な除去厚  $z$  毎に拘束面上で歪変化  $\varepsilon_x$  を測定し, 式(3.5)右辺第3項を除いた式によって  $\sigma_x$  を計算して  $z$  との関係曲線を描き, 先づ図式的に面内力の釣合を検定する。次に曲げモーメントの釣合条件が満たされていない時は, 曲げモーメントが釣合う迄中立点廻りに回転の補正を施せば自由状態の残留応力分布が得られる。この時補正した曲げ応力が式(3.5)右辺第3項に相当し, 初期主曲率はこの不釣合モーメントから計算される。

#### 4. 結 言

(1) 剛性が極めて小さく, 一定の形状を保持し難い可撓板に適用できる残留応力測定法として拘束 X 線法, 拘束歪ゲージ法の測定理論を提唱した。

(2) 拘束 X 線法は一方の表面から逐次薄層を除去し, 一定の主曲率面上に変形を拘束した状態で, X 線を用いて測定される除去面又は非除去面の応力から自由状態における全断面の残留応力分布と初期主曲率を求める方法である。除去面に X 線を照射する方法が拘束 X 線表面照射法, 非除去面に照射する方法が拘束 X 線裏面照射法であり, 何れも実用できる。

(3) 拘束歪ゲージ法は一方の表面から逐次薄層を除去し, 一定の主曲率面上に変形を拘束した状態で裏面の抵抗線歪ゲージによって測定される歪から自由状態における全断面の残留応力分布と初期主曲率を求める実用的な方法である。

#### 文 献

- 1) 土肥 修, 佐藤恭博: “X 線による平板の全断面残留応力測定法”. 日本機械学会論文集, 36-289 (昭 45-9), p. 1413.
- 2) 土肥 修: “抵抗線歪計による平板残留応力測定法 一特に薄板に対する考慮一”. 北大工研究報告 27 (昭 36-11), p. 1.