



Title	熱平衡MHDプラズマにおける熱電氣的不安定とその抑制
Author(s)	小澤, 保知; Ozawa, Yasutomo; 粥川, 尚之 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 86, 91-101
Issue Date	1978-02-03
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41439
Type	departmental bulletin paper
File Information	86_91-102.pdf



熱平衡 MHD プラズマにおける 熱電氣的不安定とその抑制

小澤保知* 粥川尚之* 昆 太一*
谷津茂男* 青木義明*

(昭和52年8月31日受理)

Electrical and Thermal Instabilities and Their Suppression in Thermally Equilibrium MHD Plasma

Yasutomo OZAWA Naoyuki KAYUKAWA Taichi KON
Shigeo YATSU Yoshiaki AOKI

(Received August 31, 1977)

Abstract

Transition processes from the diffuse discharge to the constricted and/or filamentary arc discharge were analysed for the MHD plasma-electrode contact region. The variational analysis for such an instability problem was successfully carried out. It was clarified that Hall's effect was one of the most influential parameters giving rise to the occurrence of the electrothermal instability. It was also concluded that by use of the spatially non-uniform magnetic field, which declines sharply within the hydrodynamical boundary layer was most effective in order to suppress the instability.

1. ま え が き

高圧弱電離の MHD プラズマにおけるストリーマやアークの発生は熱電氣的不安定現象としてとらえられる。すなわち、プラズマに対するジュール加熱効果と熱輸送効果のバランスを考えると、前者が後者より多い場合熱電離が促進され局所的な電流集中がストリーマあるいはアークに移行すると考えられる。

電子と中性粒子の衝突が比較的少ない希ガスプラズマを用いる非平衡型 MHD 発電などでは、電子流体からの熱損失を押えジュール加熱効果を多くすることが非平衡性を保ち導電率を高くする上で本質的な要請であり、エネルギーバランスの観点からは熱電氣的不安定の起り易いプラズマであることが理論的にも実験的にも確認されている。

一方、電子温度と中性粒子温度が等しい熱平衡型 MHD 発電等では、電極から十分離れた領域での電流密度は比較的低く一般にストリーマのない拡散放電状態にあるが、電極の近傍では低温度の境界層やホール効果のために電流密度が局所的に高められ、容易に集中放電やアークに移行する。このため、MHD 発電では内部抵抗の増大による発電特性の低下や動作の不安定、電極材料の傷損などが起り、特に冷電極を用いた長時間運転発電機の実用化に対して大きな障害と

* 原子工学科 エネルギー変換工学講座

なっている。

電極と境界層プラズマの温度差が大きくなると、熱輸送の増加に比較して導電率の低下によるジュール加熱効果が増大し不安定に至り易くなると考えられるが、この問題の近似的な解析が D. Oliver¹⁾ により行なわれている。また、岡崎ら²⁾ は同じ問題をより詳細に扱い熱的には良導体で電気的には不良導体の電極を利用することが不安定抑制の観点から有効であると述べている。

ホール効果を考慮した理論は D. Oliver³⁾ により電極温度との関係を中心として近似的に議論され、さらに T. Kon ら⁴⁾ により数学的により厳密な理論が展開されている。さらに文献 4) では不安定現象に及ぼす諸パラメータを検討し、先に小澤・粥川⁵⁾ が別の観点から提案した不均一印加磁場の採用が放電形態の制御に対して最も効果的であることを提案している。

本報は文献 4) の理論をさらに詳細に展開し、安定拡散放電から不安定集中放電への移行を支配する臨界条件とホール効果の関係を調べ、さらに一様印加磁場と不均一印加磁場の場合を比較検討したものである。

2. 電極境界層モデルと基礎方程式

図-1 に座標系と定常拡散放電状態

の境界層モデルを示す。電気的に中性な熱平衡プラズマを考え磁気レイノルズ数 $R_m = \mu_0 \sigma u L = B_{ind}/B_{app}$ が十分 1 より小さく、誘導磁場が印加磁場に比較して無視できる場合、MHD プラズマにおける熱電気場の現象は次式で記述される。

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \frac{J^2}{\sigma} \quad (1)$$

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) - \mu (\vec{J} \times \vec{B}) \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (4)$$

ただし、一般化オーム則 (2) でホール効果に対するイオンの寄与を無視している。また $D/Dt = \partial/\partial t + \vec{u} \cdot \nabla$ 、 κ 、 σ 、 μ はそれぞれ熱伝導率、導電率、移動度、 \vec{J} 、 \vec{E} 、 \vec{B} 、 \vec{u} はそれぞれ電流密度、電界強度、磁束密度およびプラズマ速度である。以下、単位系は MKS 単位系による。

移動度および導電率は熱電離を考え (5)、(6) 式で与えられる。また熱伝導率は簡単のため以下の計算では定数とする。

$$\mu = \frac{e}{m_e} \sqrt{\frac{\pi m_e}{8 k_B T}} \frac{k_B T}{\varepsilon_s p} \left(\frac{1 - \varepsilon_s}{\varepsilon_s} Q_g + Q_s \right)^{-1} \quad (5)$$

$$\sigma = e \sqrt{\frac{\varepsilon_s p}{k_B T}} \mu \left(\frac{2 \pi m_e k_B T}{h^2} \right)^{3/4} \exp \left(- \frac{e \phi_s}{2 k_B T} \right). \quad (6)$$

e 、 m_e 、 k_B 、 h は単位電荷、電子質量、ボルツマン定数、プランク定数であり、 Q_g 、 Q_s 、 ε_s 、 ϕ_s は電子-中性原子、電子-シード原子の衝突断面積、シード率、電離ポテンシャルである。

3. 定常放電状態に及ぼす磁場分布の影響

先ず定常熱電気場の状態と印加磁場分布の影響を調べておく。境界層に温度分布がある場

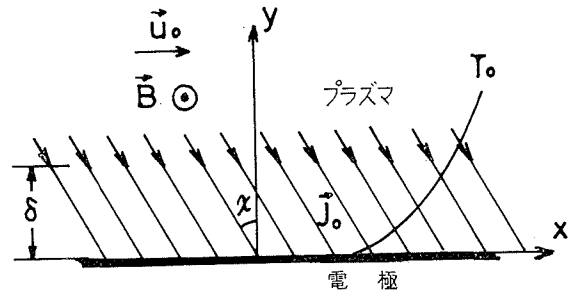


図-1 定常拡散放電境界層モデル

合、一般に式(2), (3), (4)の解として空間的に不均一な電気伝導現象が見られる。ここで y 方向の乱れに比較して x 方向の乱れが少ないものとする、式(3), (4)から $J_{y0}(y) = \text{const} = J_{y\infty}$, $E_{x0}(y) = \text{const} = E_{x\infty}$ となる。添字 0 は定常境界層の量, ∞ は電極より十分離れた主流部の量を示す。したがって、定常電流、電位分布は $\nabla \times \vec{\phi}_z(x, y) = \vec{J}_0$, $-\nabla \phi(x, y) = \vec{E}_0$ で定義される流れ関数 ϕ と電位関数 ϕ により次式で求められる。

$$\phi_0(x, y) = -J_{y0}x + E_{x0} \int_0^y \sigma_0(y) dy - J_{y0} \int_0^y \mu_0(y) B_0(y) dy \quad (7)$$

$$\phi(x, y) = -E_{x0}x + E_{x0} \int_0^y \mu_0(y) B_0(y) dy - J_{y0} \int_0^y \frac{1 + \mu_0(y^2) B(y^2)}{\sigma_0(y)} dy - \int_0^y u_0(y) B_0(y) dy \quad (8)$$

ここで、ホール電流 $\int_0^z \int_0^y J_{x0}(y) dy dz = 0$ なる状態を考えると、ホール電界強度は $E_{x0} = \langle \mu_0 B_0 \rangle J_{y0} / \langle \sigma_0 \rangle$ で与えられる。したがって、局所ホール電流密度は

$$J_{x0}(y) = \left\{ \frac{\langle \mu_0 B_0 \rangle}{\langle \sigma_0 \rangle} \sigma_0(y) - \mu_0(y) B_0(y) \right\} J_{y0} \quad (9)$$

で求められ、さらにこれより局所ホール電流が零となる印加磁場分布⁵⁾として、

$$B_0(y) = \frac{B_{\infty} \mu_{\infty}}{\sigma_{\infty}} \frac{\sigma_0(y)}{\mu_0(y)} \quad (10)$$

を得る。ただし、 $\langle \rangle$ は y の全領域に亙る平均値： $\langle \sigma_0 \rangle = D^{-1} \int_0^y \sigma_0(y) dy$ 等を表わす。図-2 に $0 \leq y \leq \delta_h$ における温度分布を 1/10 乗則で近似した場合の電流分布を一様磁場 $B_0(y) = B_{\infty}$ と不均一磁場式(10)の場合について示す。

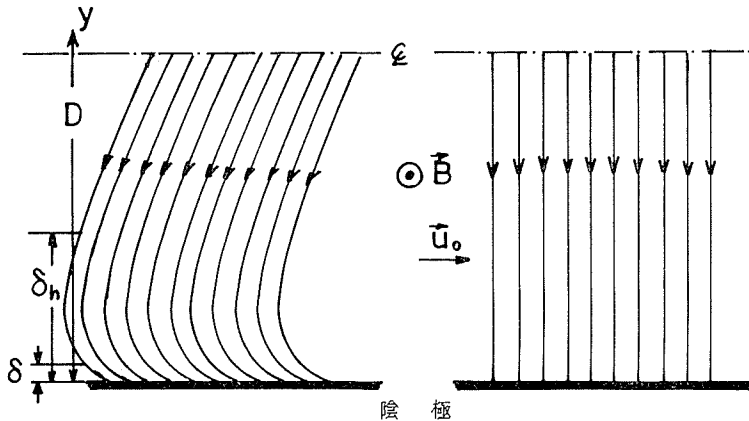


図-2 一様磁場(左)と不均一磁場(右)における定常電流分布,
 $T_{\infty} = 2500^{\circ}\text{K}$, $u_0 = 500 \text{ m/s}$, $\beta_{\infty} = 2$, $T_w = 1500^{\circ}\text{K}$

次に温度分布は厳密には式(1)を解かねばならない。しかし、不安定放電領域は一般に $\delta \sim 10^{-3} \text{ m}$ ときわめて狭く、境界層平均温度 T_0 で表わすとすれば、式(1)は次のように近似される¹⁾。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2\alpha}{\delta^2} (T(\delta) - T) + \frac{2\alpha}{\delta^2} (T_w - T) + \alpha_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{J^2}{\rho C_p \sigma} \quad (11)$$

ただし、 α は熱拡散率 $\kappa / \rho C_p$, $T(\delta)$, T_w はそれぞれ境界層端、電極表面の温度を表わす。したがって、式(9)を考慮し、 $\beta \equiv \mu B$ で定義するホール係数を用いると x 方向の熱流がない場合の定常温度は次のように求められる。

$$T_0 = \frac{1}{2} (T(\delta) + T_w) + \frac{1}{4} \frac{\delta^2 J_{y0}^2}{\kappa \sigma_0 (T_0)} \left[1 + \left(\frac{\langle \beta_0 \rangle}{\langle \sigma_0 \rangle} \sigma_0 - \beta_0 \right)^2 \right] \quad (12)$$

ここで、 J_{y0} はプラズマ抵抗と外部負荷の等しい負荷整合条件の場合⁵⁾,

$$J_{y0} = -\frac{1}{2} \langle \sigma_0 \rangle \langle u_0 B_0 \rangle G^{-1} = -\frac{1}{2} \langle \sigma_0 \rangle \langle u_0 B_0 \rangle \left[\langle \sigma_0 \rangle \langle \frac{1}{\sigma_0} \rangle + \langle \sigma_0 \rangle \langle \frac{\beta_0^2}{\sigma_0} \rangle - \langle \beta_0 \rangle^2 \right]^{-1} \quad (13)$$

で与えられる。 G は σ_0 , β_0 に空間不均一性があることによる抵抗の増加である。不均一磁場 (10) のもとでは, (12), (13) 式においてホール効果の影響は消滅し, 平均温度は図-3 のようになる。これから T_w が低い場合境界層温度は不均一磁場で高く, 高温電極程一様磁場で高くなる。また, ホール効果が T_0 に及ぼす影響は電極が高温になると顕著になる。これらは主として J_{y0} の温度依存性に依ると考えられる。

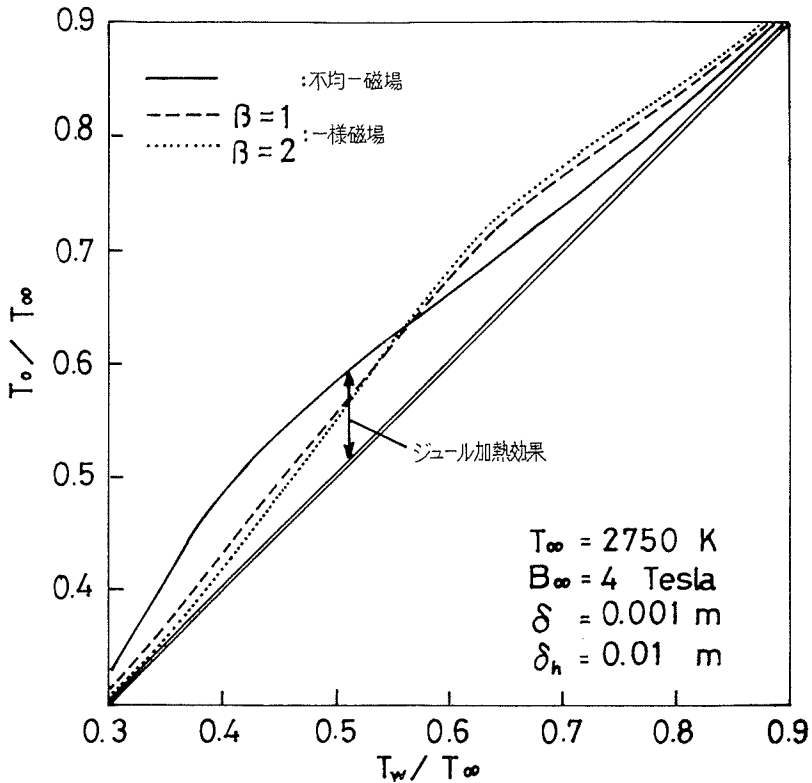


図-3 定常境界層温度 T_0 と電極温度 T_w の関係

4. 熱電気場の安定性

定常拡散放電境界層に熱電気場の微小摂動を加え, その安定性を調べることにより集中放電状態へ移行する条件を調べることができる。摂動量 $T_1, \vec{J}_1, \vec{E}_1$ が満たすべき方程式は式 (1)~(4) より

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \alpha F^2 T_1 - u_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{J_0^2}{\rho C_p \sigma_0} \left(2 \frac{\vec{J}_0 \cdot \vec{J}_1}{J_0^2} - \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right) \quad (14)$$

$$\vec{J}_1 = \sigma_0 \vec{E}_1 + \sigma_1 (\vec{E}_0 + \vec{u}_0 \times \vec{B}) - \mu_0 \vec{J}_1 \times \vec{B} \quad (15)$$

$$\nabla \times \vec{E}_1 = 0 \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_1 = 0 \quad (17)$$

で近似できる。ただし、 α , \bar{u} , \bar{E} には変動はないと仮定している。

以下、先ず一様磁場分布の場合にホール効果の影響を中心として調べ、次に不均一磁場の効果を考慮した場合を取扱う。

4.1 無限体系プラズマ

放電の一般的性質を見るために境界の影響を無視した無限体系としたプラズマの安定性を調べる。電極長に比較して境界層厚さは十分に短いとすると、定常ホール電界成分は零と置き、さらに境界層温度は(12)式で近似できるものとする、式(14)~(17)は以下の無次元式にまとめられる。

$$\frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial \zeta^2} - \bar{u} \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \xi} - A_0(1 + \beta^2) T_1 + 2A_0 \sigma_T^1 (\bar{J}_{y1} - \beta \bar{J}_{x1}) \quad (18)$$

$$\frac{\partial \bar{J}_{x1}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \bar{J}_{y1}}{\partial \xi} + (1 + \beta^2) \sigma_T \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \xi} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \bar{J}_{x1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{J}_{y1}}{\partial \zeta} = 0 \quad (20)$$

ただし、無次元数は、 $\xi = x/\delta$, $\zeta = y/\delta$, $\tau = t/(\delta^2/\alpha)$, $\bar{T}_1 = T_1/T_0$, $\bar{J}_{x1} = J_{x1}/J_{y0}$, $\bar{J}_{y1} = J_{y1}/J_{y0}$, $\bar{u} = u_0/\alpha/\delta$,

$$\sigma_T = \partial \ln \sigma_0 / \partial \ln T_0 = (3/4 + e\phi_s/2k_B T_0)$$

$$A_0 = \frac{\delta^2 J_{y0}^2}{\alpha \rho C_p \sigma_0 T_0} \sigma_T$$

で定義され、移動度に対する摂動は導電率に対する摂動に比較して無視している。

さて、無次元周波数 $\bar{\omega} = \omega \delta^2 / \alpha$, 無次元波数 $\vec{k} = \vec{k} \delta$ を定義し、式(18)~(20)の解として、 $\bar{T}_1 = \hat{T} \exp i(\bar{\omega} \tau - \bar{k}_x \xi - \bar{k}_y \zeta)$, $\vec{J} = \hat{J} \exp i(\bar{\omega} \tau - \bar{k}_x \xi - \bar{k}_y \zeta)$ を仮定すると、 \hat{T} , \hat{J} の有意な解が存在する条件より次の分散関係が求まる。

$$Re \bar{\omega} = \bar{u} \bar{k}_x \quad (21)$$

$$Im \bar{\omega} = \bar{k}_x^2 + \bar{k}_y^2 - A_0(1 + \beta^2) \frac{\bar{k}_x^2 + 2\beta \bar{k}_x \bar{k}_y - \bar{k}_y^2}{\bar{k}_x^2 + \bar{k}_y^2} \quad (22)$$

式(21)は摂動波がプラズマ流速で x 方向に伝播することを意味する。式(20)から摂動の安定条件は $Im \bar{\omega} \geq 0$ であるから、MHD プラズマの放電形態の不安定性は A_0 が与えられた時 β^2 の割合で強くなることが判り、境界層において磁場の強度を低くすること、すなわち(10)式の不均一磁場の有効性が示唆される。また、放電の安定化には A_0 を低くすることも有効である。すなわち、ジュール加熱の減少、熱伝導の増加、境界層温度の上昇、プラズマ電離ポテンシャルが低いことなどはいずれも安定化に寄与する。しかしこれらはいずれも一乗効果であり、ホール効果の三乗効果に較べるとその寄与は少ないと思われる。

式(22)から $Im \bar{\omega} = 0$ の中立安定曲線を (\bar{k}_x, \bar{k}_y) 面で示すと図-4を得る。これからも β は不安定領域の拡大に大きな影響を持つことが明らかである。さらに \vec{k} と電極面のなす角を θ として、式(22)の第3項が θ に関して最大となる条件を求めると、

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 + \beta^2} - 1}{\beta} \quad (23)$$

この時、の安定条件は、

$$\bar{k}^2 \geq A_0(1 + \beta^2) \sqrt{1 + \beta^2} \quad (24)$$

である。これらは図-4の連珠線の不安定領域の最長辺の長さとその角度を与えるものである。一般に MHD 発電機の境界層条件では $u_\infty \sim 500$ m/sec, $B_\infty \sim 4$ Tesla, $T_0 \sim 2000^\circ\text{K}$, $\kappa \sim 1.5 \times 10^{-2}$

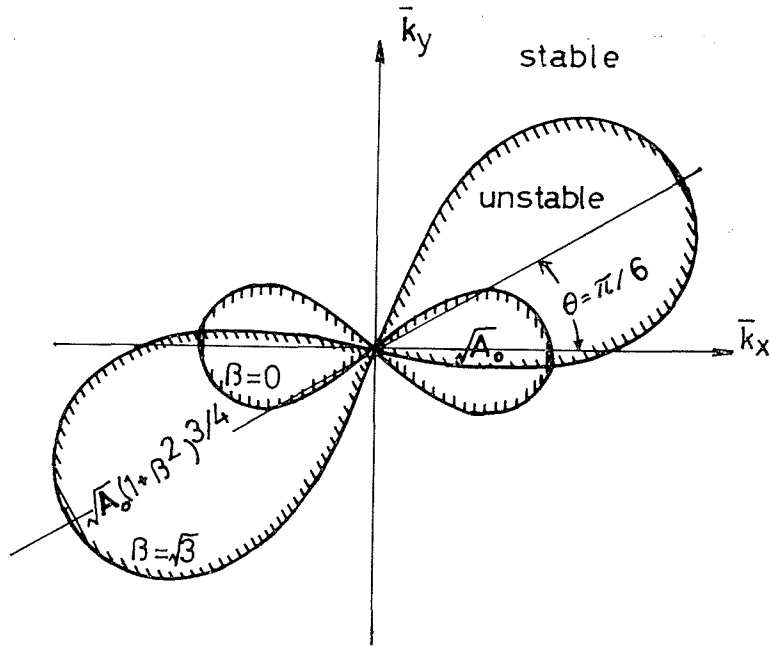
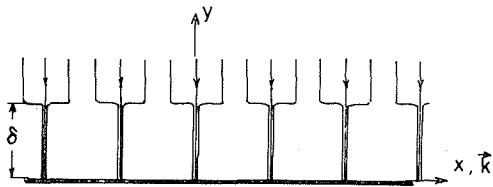
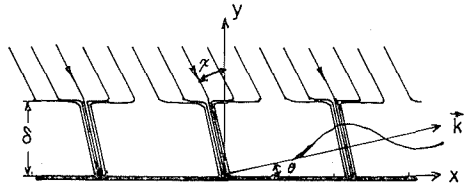


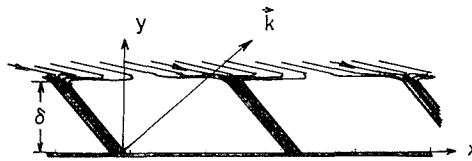
図-4 不安定波数ベクトルに及ぼすホール効果の影響



$\beta=0$ および不均一磁場, $\theta=\chi=0^\circ$



一様磁場, $\beta=0.5, \theta=13.3^\circ, \chi=26.5^\circ$



一様磁場, $\beta=5, \theta=40^\circ, \chi=78.7^\circ$

図-5 境界層における集中放電電流とホール効果の関係

Joule/sec \cdot m \cdot °K, $\sigma_0 \sim 1 \text{ mh}_0/\text{m}$, $\mu_0 \sim 0.4 \text{ m}^2/\text{volt}\cdot\text{sec}$, $\phi_s \simeq 4.5 \text{ eV}$ であるから, $A_0 \simeq 1 \times 10^6 \delta$, $\beta \simeq 1.6$, したがって, 不安定波の最小波長は $\lambda \sim 10^{-3} \text{ m}$, 角度 $\sim \pi/6$, 生長率 $\omega^{-1} \sim 3 \times 10^{-4} \text{ sec}$ の波動現象となる。式(23)より, 集中電流が電極面となす角度は $\beta=0 \sim \infty$ に対応して, $\pi/2$ と $3\pi/4$ の値をとる。一方, 定常拡散放電電流が y 軸となす角度は $\chi = \tan^{-1}(J_{x0}/J_{y0}) = -\tan^{-1}\beta$ である。これらの拡散放電から境界層内で集中放電に変化する様子を β の値に対して 図-5 に示す。

4.2 境界のあるプラズマ—変分解析法—

摂動成分に対して $y=\delta$ の境界層端と $y=0$ の電極面上で境界条件が与えられる場合の安定性を厳密に取扱うために変分法の解析が有効である。

無次元式(18), (19), (20)において, ξ, τ に対して平面波とし, $\bar{T}_1 = \hat{T}(\zeta) \exp i(\bar{\omega}\tau - \bar{k}_x \xi)$, $\bar{J}_{z1} = \hat{J}_x(\zeta) \exp i(\bar{\omega}\tau - \bar{k}_x \xi)$, $\bar{J}_{y1} = \hat{J}_y(\zeta) \exp i(\bar{\omega}\tau - \bar{k}_x \xi)$ を代入すると以下の常微分方程式を得る。

$$[D^2 - \bar{k}_x^2 - \bar{\omega}_i - A_0(1 + \beta^2)] \hat{T} + 2A_0 \sigma_T^{-1} (\hat{J}_y - \beta \hat{J}_x) = 0 \quad (25)$$

$$(D^2 - \bar{k}_x^2) \hat{J}_y + (1 + \beta^2) \sigma_T \bar{k}_x^2 \hat{T} = 0 \quad (26)$$

$$D \hat{J}_y = i \bar{k}_x \hat{J}_x \quad (27)$$

ただし, $D \equiv d/d\zeta$, $\bar{\omega}_i = Im \bar{\omega}$ であり, $Re \bar{\omega} = u \bar{k}_x$ に関する式は省略した。

式(26), (27)より \hat{T} , \hat{J}_x を求め式(25)に代入すると,

$$(D^4 - P_0 D^2 - i Q_0 D + R_0) \hat{J}_y = 0 \quad (28)$$

ただし, $P_0 = 2\bar{k}_x^2 - \bar{\omega}_i + A_0(1 + \beta^2)$, $Q_0 = 2A_0\beta(1 + \beta^2) \bar{k}_x$, $R_0 = \bar{k}_x^2 - \bar{\omega}_i \bar{k}_x^2 - A_0(1 + \beta^2) \bar{k}_x^2$ である。変分解析法として重要なことは \hat{J}_y が与えられた境界条件を満す停留関数であること, すなわち, 式(28)がオイラーの極値方程式となる作用積分関数を求める事である。このために, 式(28)の両辺に, $D^4 - P_0 D^2 + i_0 Q_0 D + R_0$ を作用させ整理すると,

$$[D^8 - 2P_0 D^6 + (P_0^2 + 2R_0) D^4 - (2P_0 R_0 - Q_0^2) D^2 + R_0^2] \hat{J}_y = 0. \quad (29)$$

したがって, $0 \leq \zeta \leq 1$ における積分 $I[\hat{J}_y(\zeta)] \equiv \int_0^1 F(\zeta, \hat{J}_y', \hat{J}_y'', \hat{J}_y''', \hat{J}_y'''') d\zeta$ の停留条件が式(29)に恒等的に一致するためには, F は $\hat{J}_y'''' \equiv d^4 \hat{J}_y / d\zeta^4$ の2次形式として次式でなければならない。

$$F \equiv (\hat{J}_y'''')^2 + 2P_0 (\hat{J}_y''')^2 + (P_0^2 + 2R_0) (\hat{J}_y'')^2 + (2P_0 R_0 - Q_0^2) (\hat{J}_y')^2 + R_0 \hat{J}_y^2, \quad (30)$$

すなわち, 式(28)の解は式(30)の積分 I を極値とするような解である。今, このような解を $\hat{J}_y(\zeta) = \sum_m A_m J_{ym}(\zeta)$ と仮定する。この時, I は $I = I(A_m, A_n) = \sum_n \sum_m A_n A_m (m|n)$ と書ける。ただし $(m|n)$ は J_{ym} の複素共役 J_{yn}^* を用いて

$$(m|n) \equiv \int_0^1 \left[J_{ym}'''' J_{yn}^{*''''} + 2P_0 J_{ym}''' J_{yn}^{*'''} + (P_0 + 2R_0) J_{ym}'' J_{yn}^{*''} + (2P_0 R_0 - Q_0^2) J_{ym}' J_{yn}^{*'} + R_0 J_{ym} J_{yn}^* \right] d\zeta \quad (31)$$

で定義する。任意に仮定した $J_{ym}(\zeta)$, すなわち A_m に関して I が停留するという条件より $\partial I / \partial A_m = 0$ である。したがって, $\sum_n A_n (m|n) = 0, m = 1, 2, \dots$ が要請され, 有意な解 A_n の存在性より,

$$\text{Det} \|(m|n)\| = 0 \quad (32)$$

でなければならない。

以上により変分法による安定・不安定の判別が可能である。実際の具体的手順をまとめると,

- (1) 温度摂動 \bar{T}_1 に課せられた境界条件を満す関数列 $T_m(\zeta)$ により \hat{T} の解を仮定する。
- (2) 式(26)より \hat{J}_y に課せられた境界条件を満す関数列 $J_{ym}(\zeta)$ を求める。
- (3) 式(31)を計算し, 式(32)の条件から分散関係を求める。

以下, 変分法によるこれらの処理法の正当性を検証する目的を含めて具体例を示す。

4.2.1 電極面が熱的良導体・電氣的不良導体の場合

このような電極材料を現実を求めることは困難と思われるが, この場合の放電形態の安定性は文献2)でホール効果がない場合が論じられており, 本報で適応された変分解析法の検証に有効であり, また第1章での物理的な考察からも, この場合が電極材料として安定化のための最理想条件と思われるので意味がある。

境界条件としては $\hat{T}(1) = \hat{J}_y(1) = 0$, $\hat{T}(0) = \hat{J}_y(0) = 0$ と置ける。したがって, 関数列 $T_m(\zeta)$ は $T_m(\zeta) = A_m \sin m\pi\zeta$ と置ける。この時, $J_{ym}(\zeta)$ は式(26)を上境界条件で解いて,

$$J_{ym}(\zeta) = \frac{\bar{k}_x^2 (1 + \beta^2) \sigma_T}{m^2 \pi^2 + \bar{k}_x^2} A_m \sin m\pi\zeta \equiv B_m \sin m\pi\zeta \quad (33)$$

これより, $(m|n)$ を $m=n$ なる時のみ意味があることを考慮して解くと,

$$(m|n) = \frac{1}{2} B_m^2 [m^4 \pi^4 + P_0 m^2 \pi^2 + R_0^2] - Q_0^2 m^2 \pi^2 \quad (34)$$

したがって, 式(32)の条件より

$$m^4 \pi^4 + P_0 m^2 \pi^2 + R_0^2 = Q_0 m \pi, \quad m=1, 2, 3, \dots \quad (35)$$

これを $\bar{\omega}_i$ について解くと, 安定条件 $Im\bar{\omega} \geq 0$ が求まる。すなわち,

$$Im\bar{\omega} = \bar{k}_x^2 + m^2 \pi^2 - A_0 (1 + \beta^2) \frac{\bar{k}_x^2 + 2\beta \bar{k}_x m \pi - m^2 \pi^2}{\bar{k}_x^2 + m^2 \pi^2} \quad (36)$$

$\beta=0$ とおくと岡崎ら²⁾の解に一致する。また $m\pi = \bar{k}_y$ とおくと, 式(22)に一致する。よって MDH 境界層プラズマの熱電気の不安定解析法として新たに導入した変分解析は妥当な手法であると結論される。

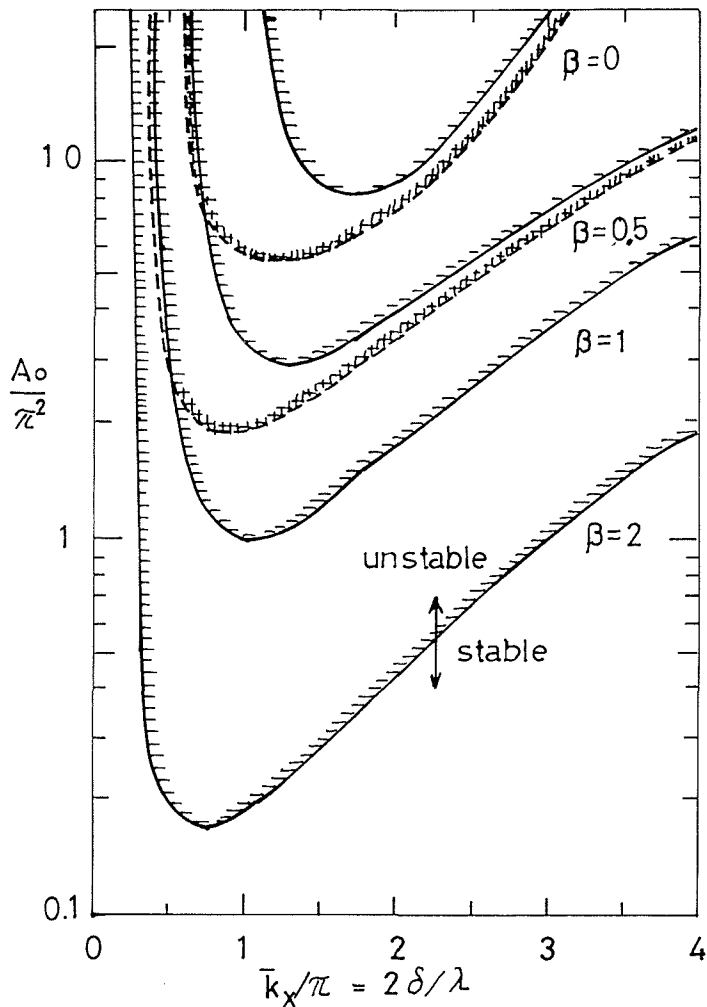


図-6 熱的良導・電氣的不良導体 (////////) および熱的電氣的良導体 (××××××) 電極における放電安定条件におよぼすホール効果の影響

$m=1$ すなわち $\lambda=2\delta$ の摂動波が安定であれば m の高次モードは総て安定である。この時、 β をパラメータとして A_0/π^2 , \bar{k}_x/π 面で安定・不安定領域を描くと 図-6 実線の臨界条件が求まる。

4.2.2 電極面が熱的・電氣的良導体の場合

これは一般に使用される水冷金属電極の条件と考えられる。境界条件は $\hat{T}(1)=\hat{j}_y(1)=0$, $\hat{T}(0)=0$, $\hat{E}_x(0)=0$, すなわち, $\hat{j}_x(0)=-\beta\hat{j}_y(0)$ である。 $\hat{T}(\zeta)=\sum_m A_m \sin m\pi\zeta$ とおくと, $J_{ym}(\zeta)$ は,

$$J_{ym}(\zeta) = B_m \left[\sin m\pi\zeta - \frac{m\pi/\bar{k}_x}{\cosh \bar{k}_x - i\beta \sinh \bar{k}_x} \sinh \bar{k}_x(\zeta-1) \right] \quad (37)$$

これを式 (31) に代入し, $m=n=1$ モードのみを考えると

$$\Gamma_1 + 2P_0\Gamma_2 + (P_0^2 + 2R_0)\Gamma_3 + (2P_0R_0 - Q_0^2)\Gamma_4 + R_0^2\Gamma_5 = 0 \quad (38)$$

ただし Γ は以下のように定義されている。

$$\Gamma_1 = \pi^8 - 4\pi^4\bar{k}_x^4\gamma_1 + 2\bar{k}_x^8\gamma_3$$

$$\Gamma_2 = \pi^6 + 4\pi^3\bar{k}_x^3\gamma_2 + 2\bar{k}_x^6\gamma_4$$

$$\Gamma_3 = \pi^4 + 4\pi^2\bar{k}_x^2\gamma_1 + 2\bar{k}_x^4\gamma_3$$

$$\Gamma_4 = \pi^2 - 4\pi\bar{k}_x\gamma_2 + 2\bar{k}_x^2\gamma_4$$

$$\Gamma_5 = 1 - 4\gamma_1 + 2\gamma_3$$

$$\gamma_1 = \frac{\pi^2 \sinh \bar{k}_x \cosh \bar{k}_x}{\bar{k}_x(\bar{k}_x^2 + \pi^2)(\cosh^2 \bar{k}_x + \beta^2 \sinh^2 \bar{k}_x)}$$

$$\gamma_2 = \frac{\pi \sinh \bar{k}_x \cosh \bar{k}_x}{(\bar{k}_x^2 + \pi^2)(\cosh^2 \bar{k}_x + \beta^2 \sinh^2 \bar{k}_x)}$$

$$\gamma_3 = \frac{\pi^2}{\bar{k}_x^2(\cosh^2 \bar{k}_x + \beta^2 \sinh^2 \bar{k}_x)} \left(\frac{1}{4\bar{k}_x} \sinh 2\bar{k}_x - \frac{1}{2} \right)$$

$$\gamma_4 = \frac{\pi^2}{\bar{k}_x^2(\cosh^2 \bar{k}_x + \beta^2 \sinh^2 \bar{k}_x)} \left(\frac{1}{4\bar{k}_x} \sinh 2\bar{k}_x + \frac{1}{2} \right).$$

式 (38) は $Im\bar{\omega}$ に関する 2 次方程式である。これを解いて, $Im\bar{\omega} \geq 0$ の領域を β をパラメータとして図示すると 図-6 の点線で示す限界条件が求まる。

以上の解析により一様磁場を印加した MHD プラズマと電極との接触領域において拡散放電が集中放電へと移行する現象に対して, ホール効果はきわめて大きな影響を持つことが明らかとなった。実際の MHD 発電機の条件では $\beta \sim 2.0$ 程度になると思われ, 水冷電極での A_0 の値は一般に不安定領域に入ることになる。したがって, 以下 4.3 節で調べるように不均一磁場の印加がきわめて有効と考えられる。

4.3 電極表面温度と磁場分布の影響

境界層領域の磁場の強さを一様磁場では $B_0 = B_\infty$, また不均一磁場では, 式 (10) において定常温度で決まる導電率と移動度の関数として $B_0 = \beta_\infty \sigma_0 / \mu_0 \sigma_\infty$ と考え, 近似的なエネルギーバランス式 (11) において温度及び電流に微小摂動を考え, 電極と θ の角度を持って進行する波のみの安定性を求めると, $\partial \bar{T}_1 / \partial \tau \leq 0$ の条件は

$$A[2(P_1 \sin^2 \theta - P_2 \sin \theta \cos \theta + P_3 \cos^2 \theta) - \sigma_T(1 + \tan^2 \chi)] \leq 1 \quad (39)$$

ただし,

$$A \simeq A_0 \sigma_T^{-1}$$

$$\tan \chi = J_{x0} / J_{y0} = \langle \beta \rangle \sigma_0 / \langle \sigma \rangle - \beta_0$$

$$P_1 = \sigma_T \tan^2 \chi + \beta_0 \tan \chi (\sigma_T - \mu_p)$$

$$P_2 = -\beta_0 \tan^2 \lambda (\sigma_T - \mu_T) + 2\sigma_T \tan \lambda + \beta_0 (\sigma_T - \mu_T)$$

$$P_3 = -\beta_0 \tan \lambda (\sigma_T - \mu_T) + \sigma_T$$

$$\sigma_T = \partial \ln \sigma_0 / \partial \ln T_0, \quad \mu_T = \partial \ln \mu_0 / \partial \ln T_0$$

不均一磁場では明らかに $\tan \lambda = 0$ で定常電流は J_{y0} のみである。式 (39) の左辺が θ に関して最大となる最も不安定に至り易い波の安定条件を $\mu_T \ll \sigma_T$ として求めると

$$\text{一様磁場で, } A\sigma_T \left[\left(1 - \frac{\sigma_0}{\langle \sigma \rangle} \right)^2 \beta_\infty^2 + 1 \right] \sqrt{1 + \beta_\infty^2} \leq 1 \tag{40}$$

$$\text{不均一磁場で, } A\sigma_T \frac{1 - \beta_0^2}{\sqrt{1 + \beta_0^2}} \leq 1, \quad \beta_0 = \beta_\infty \frac{\sigma_0}{\langle \sigma \rangle} \tag{41}$$

となる。電極温度が十分に低い場合 ($\sigma_0 \ll \langle \sigma \rangle$) には式 (40) は文献 3) の結果と一致する。式 (40), (41) で等号が成立する場合の A を A_{cr} とし、電極温度の関数として計算される平衡温度式 (12) を用いて A_{cr} を図示すると 図-7.1 及び 2 を得る。ここで点線の A は実際にその時の $A_0 \sigma_T^{-1}$ を示す。図から一様磁場でホール効果の影響はきわめて顕著で、しかも実用 MHD 発電機の $\beta \sim 2.0$, $1000^\circ\text{K} \leq T_w \leq 1700^\circ\text{K}$ で境界層は不安定状態にあることが判る。これに対し、不均一磁場ではホール効果の影響はほとんどなく、しかも境界層は常に安定拡散放電状態にあることが判る。

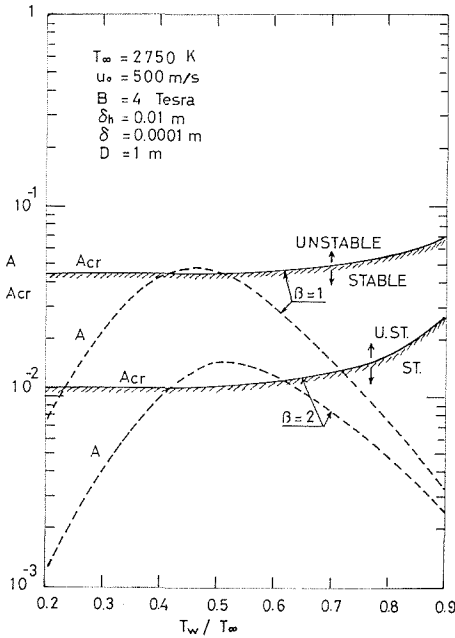


図-7.1 一様磁場における放電安定性と電極温度の関係

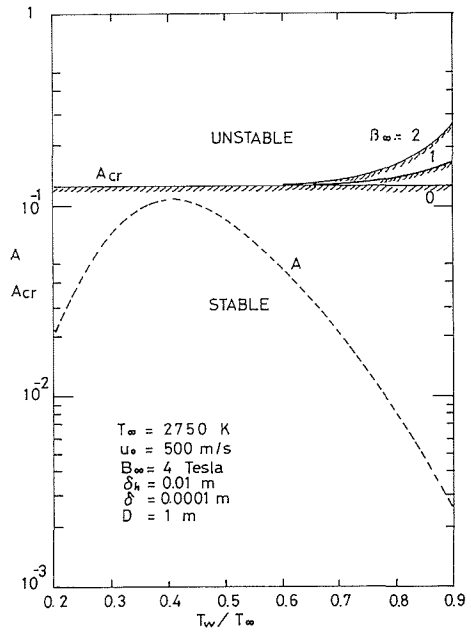


図-7.2 不均一磁場における放電安定性と電極温度の関係

5. む す び

熱平衡 MHD プラズマと電極面との接触領域で生ずる均一拡散放電から集中あるいはアーク放電への移行過程を熱電気場の不安定現象としてとらえ、平面素波解析により一般的性質を、また境界のあるプラズマに対しては変分法による線形安定解析法が有力な手法である事を明らかにした。解析によりホール効果は放電形態の不安定に著しい影響を持つことが明らかとなった。

さらにこのホール効果の影響を除去し、安定化に最も有効な方法として、電極面の近くで導電率とほぼ同様な関数特性を持つ不均一磁場を印加することを提案し、その場合は通常の MHD 発電条件で常に安定拡散放電になることが理論的に明らかになった。数値例は MHD 発電を考えたが、本報の解析手法ならびに磁場の不均一空間構造でホール効果を制御し、放電の安定化を得る方法は粒子間の衝突が多く、自由電子密度が比較的少ない MHD プラズマを利用する種々の装置における電流分布の制御、電氣的出力特性の改善ならびに安定化に有効と思われる。

終りに本研究を進めるに当り、熱心に討論に参加された本学助教授榎戸武揚氏に感謝する。

参 考 文 献

- 1) Oliver, D. A.: Constricted Discharge in Magnetohydrodynamic Plasma, AVCO Everett Research Lab. Report, July (1975).
- 2) 岡崎 健, 他: MHD 発電用プラズマの冷電極近傍の熱不安定, 電磁液体シンポジウム論文集, 東京 (1976), 98.
- 3) Oliver, D. A.: Proc. 15th Symp. Engin. Aspect of MHD, Philadelphia, May (1976).
- 4) Kon, T., *et. al.*: Proc. th Symp. Engin. Aspet of MHD, Pittsburgh, May (1977).
- 5) Ozawa, Y., *et al.*: Proc. 6th Int. Conf. on MHD Elec. Power Gen., 1, Washington D. C., June (1975).