



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	ベクトル値評価規準をもつ強い競争状況下の一般化最適制御問題
Author(s)	山元, 進; 小山, 昭一; 三浦, 良一
Citation	北海道大學工学部研究報告, 88, 11-22
Issue Date	1978-08-10
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41475
Type	departmental bulletin paper
File Information	88_11-22.pdf



ベクトル値評価規準をもつ強い競争 状況下の一般化最適制御問題

山 元 進 小 山 昭 一 三 浦 良 一

(昭和 52 年 12 月 28 日受理)

Generalized Optimal Control Problem with a Vector-valued Performance Criterion under a Strongly Conflicting Situation

Susumu YAMAMOTO, Syoichi KOYAMA, Ryoichi MIURA

(Received December 28, 1977)

Abstracts

Under a strongly conflicting situation generalized optimal control problem with a vector-valued performance criterion is considered.

Two types of solutions for the problem in which one control strategist dominates the other, that is to say, ϕ [ψ]-preferential solution, is defined appropriately by the different setting of the problem.

Seeking the solution theoretically is impossible to be performed directly from its definition, but is possible through the equivalent transformation of optimization under proper assumptions.

It is shown that an open-loop type preferential solution is obtained analytically on a linear system with a vector-valued performance criterion, which considers the difference of energy consumption between a couple of control strategists.

In the course of deriving this solution, the appropriate selection of the third hypothetical control-strategist's strategy necessarily arises, therefore, finally the determination of triple control strategies are to be performed and a corresponding optimal performance criterion may also be derived analytically.

1. 序 論

一対の制御主体の存在を許容し、両制御主体の最適化の意図が真向から相対立する、いわゆる強い競争状況下の一般化制御問題¹⁾は、微分ゲームにおける追跡—回避問題²⁾と密接な関係がある。

数学的定式化において、定義される解は一般的には、いずれか一方の制御主体が支配的である min max 解、あるいは max min 解であるが、適正なシステムダイナミクス、制御方策空間、および評価規準の特性づけにより、それら解は等価な鞍点に帰着することが知られている。

一方従来の競争状況を考慮しない最適制御問題において、その適用範囲を拡張することを目標に、ベクトル値評価規準を導入した問題が、Zadeh, L. A.³⁾ を起点に研究されつつあるが、この場合最適解自体にある程度の任意性が認められ、統一的、決定的な解の定義は確認されていない

* 自動制御工学講座

ようである。

さて完全情報をもつ場合における強い競争状況下の確定的一般化制御問題において、ベクトル値評価規準の存在する場合には、同様に、解にある程度の任意性があると考えられるとともに、さらに新しい視点に立って解を定義する必要性がある。

ここでは、強い競争状況下にある二制御主体のいずれか一方が評価規準に対し優先的である、という意味で適切な解を定義する。この解は、定義の時点では求めることが困難であるが、ある実現可能な仮定の下に、等価な最適化の変換を経て理論的に導出できることを示す。

2. $\phi[\psi]$ -優先解

2.1 定 式 化

競争状況を表現する一般化された状態変数は、次の形のダイナミックスに従うものとする。

$$\frac{dz}{dt} = f_{(z, \phi, \psi, t)} \quad (2.1.1)$$

$z \in R^l$: 一般化状態ベクトル

$\phi \in \Phi \subseteq R^p$; $\psi \in \Psi \subseteq R^q$: 制御方策ベクトル

f : クラス $C^{(2)}$ の n 次元ベクトル値関数

現実存在する評価規準 $P_{(z, \phi, \psi, t)}$ はベクトル値であり、次のように表現されるものとする。

$$P_{(z, \phi, \psi, t)} = [P_{(z, \phi, \psi, t)}^1, \dots, P_{(z, \phi, \psi, t)}^N]^T \quad (2.1.2)$$

$P_{(z, \phi, \psi, t)}^i \quad i \in I_N$: i -スカラー値評価規準

ただし、

$$I_N = \{i : i=1, 2, \dots, N\} \quad (2.1.3)$$

ここに、 ϕ は何らかの意味で、与えられたベクトル値評価規準の最小化を目標とする制御主体の制御方策であり、一方 ψ は、同様の意味でその最大化を意図する ϕ の敵対制御主体の制御方策である。

2.2 解 の 定 義

強い競争状況下であるから、最小化（最大化）する評価規準は何らかの意味でスカラーであることが望まれる。ここでは、いずれか一方の制御主体側にそのベクトル値評価規準の要素の中から、最適化すべきスカラー値評価規準を選択する優先権が与えられる場合を考察の対象とする。

〔定義 2.2.1〕

$$\phi\text{-優先解} : [\phi_\phi^*, \phi_\psi^*] = \arg[\max_{\phi \in \Phi} \min_{\psi \in \Psi} \min_{i \in I_N} P_{(z, \phi, \psi, t)}^i] \quad (2.2.1)$$

$$\psi\text{-優先解} : [\phi_\phi^*, \phi_\psi^*] = \arg[\min_{\phi \in \Phi} \max_{\psi \in \Psi} \max_{i \in I_N} P_{(z, \phi, \psi, t)}^i] \quad (2.2.2)$$

2.3 最適化の変換

以下 ϕ -優先解について考察を進めることにする。 ϕ -優先解についても同様の過程を経て論及されることは明らかである。この場合求められるべき最適評価規準値 V_ϕ^* は次のように表わされる；

$$V_\phi^* = \min_{\phi \in \Phi} \max_{\psi \in \Psi} \max_{i \in I_N} P_{(z, \phi, \psi, t)}^i \quad (2.3.1)$$

したがってまず仮定の i -制御主体 $i \in I_N$ により、ベクトル値評価規準 P の要素の中から最大のものが選択されなければならないわけであるが、制御方策対 (ϕ, ψ) の選択決定された値に対応して z が、したがって $P^i \quad i \in I_N$ の値が変化するから、真接この最大化の操作は遂行でき

ない。そこで、以下の定理と実現可能な仮定の導入により、初期の最適化は変換した適程を経て理論的に達成されることを示す。

〔仮定 2.3.1〕

$$\min_{\phi \in \Phi} \max_{\psi \in \Psi} \max_{i \in I_N} P^i_{(z, \phi, \psi, t)} = \max_{\psi \in \Psi} \min_{\phi \in \Phi} \max_{i \in I_N} P^i_{(z, \phi, \psi, t)} \quad (2.3.2)$$

この仮定は、競争状況を扱っている従来の一般化制御問題において解析的な形の求解を試みる場合にはほとんど必須の仮定であり、例えば $P^i, i \in I_N$ とシステムダイナミックス (2.1.1) が ϕ, ψ に関して Separable²⁾ である時、満足されるものである。

ここに、スカラー汎関数 $P_m, \bar{P}, \bar{P}_m$ を次のように定義する；

$$P_m(z, \phi, \psi, t) = \max_{i \in I_N} P^i_{(z, \phi, \psi, t)} \quad (2.3.3)$$

$$\bar{P}_{(z, \phi, \psi, \pi, t)} = \pi^T P_{(z, \phi, \psi, t)} \quad (2.3.4)$$

ただし、

$$\pi = [\pi_1, \dots, \pi_N]^T \quad (2.3.5)$$

$$\sum_{i=1}^N \pi_i = 1 \quad \pi_i \geq 0 \quad i \in I_N \quad (2.3.6)$$

$$\bar{P}_m(z, \phi, \psi, t) = \max_{\pi \in \Pi} \bar{P}_{(z, \phi, \psi, \pi, t)} \quad (2.3.7)$$

ここで、

$$\Pi = \{\pi\} \quad (2.3.8)$$

この時、次の定理が成立する。

《定理 2.3.1》

$$P_m(z, \phi, \psi, t) = \bar{P}_m(z, \phi, \psi, t) \quad (2.3.9)$$

この定理は Medanić, J. 等^{4,5)}の定理の拡張となっており、証明はそれに準ずるので省略する。さらに次の仮定を設定する。

〔仮定 2.3.2〕

$$\min_{\phi \in \Phi} \max_{\pi \in \Pi} \bar{P}_{(z, \phi, \psi, \pi, t)} = \max_{\pi \in \Pi} \min_{\phi \in \Phi} \bar{P}_{(z, \phi, \psi, \pi, t)} \quad (2.3.10)$$

この仮定を満足するための $\bar{P}, \phi, \psi$ の位相的性質に関する議論については文献 6)~10) を参照されたい。

〔仮定 2.3.3〕

$$\max_{\psi \in \Psi} \min_{\phi \in \Phi} \bar{P}_m(z, \phi, \psi, \pi, t) = \min_{\phi \in \Phi} \max_{\psi \in \Psi} \bar{P}_m(z, \phi, \psi, \pi, t) \quad (2.3.11)$$

以上の一見拘束的な三つの仮定を満足するような、一般性を有した問題の存在に関していえば、仮定 2.3.1 を満たす、例えば前述の Separability の条件が満足されれば、仮定 2.3.3 の成立も必然的となる。

以上の仮定、定理の導入により、求めるべき V_ϕ^* は、

$$\begin{aligned} V_\phi^* &= \max_{\pi \in \Pi} \max_{\psi \in \Psi} \min_{\phi \in \Phi} \bar{P}_{(z, \phi, \psi, \pi, t)} \\ &= \max_{\pi \in \Pi} \min_{\phi \in \Phi} \max_{\psi \in \Psi} \bar{P}_{(z, \phi, \psi, \pi, t)} \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

の構成となる。すなわち、まず $\bar{P}$ の鞍点 $(\phi^*, \psi^*) \in \Phi \times \Psi$ を求め、それを $\bar{P}$ に代入して得られる $\bar{P}_{(\pi)}$ を $\pi \in \Pi$ により最大化することにより達成される。

3. 一般化線形最適制御問題における優先解

強い競争状況においてベクトル値評価規準が存在する一般化線形最適制御問題において、前節で定義した $\phi[\psi]$ -優先解がシステムの初期状態の陽の関数として解析的に導かれることを示す。

3.1 問題の記述と定式化

本考察は ψ -優先解に対してである。 ϕ -優先解についても、適切な最適化の転換により、以下に示すと同様の過程を経て求解が達成できる。

ϕ, ψ -両制御主体の動的挙動は、次の独立した運動方程式により記求されるものとする；

$$\frac{dx}{dt} = F_{\phi(t)}x + G_{\phi(t)}\phi \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.1.1)$$

$$\frac{dy^i}{dt} = F_{\psi(t)}y^i + G_{\psi(t)}\psi \quad y^i(t_0) = y_0^i \quad \forall i \in I_N \quad (3.1.2)$$

$$x \in R^n, \quad y^i \in R^n \quad \forall i \in I_N \quad \phi \in R^r, \quad \psi \in R^r$$

$F_{\phi}, F_{\psi}; G_{\phi}, G_{\psi} : n \cdot n; n \cdot r$ 連続有界時変行列

ここに、次の基本的二仮定を設定する。

$$[\text{仮定 3.1.1}] \quad y_0^i \neq y_0^j \quad i \neq j \quad \forall i, j \in I_N \quad (3.1.3)$$

〔仮定 3.1.2〕 システム (3.1-1, 2) はおのおの完全可制御である。

過程は完全情報下に進捗するものとし、その評価規準は次の形のベクトル値で指定されるものとする。

$$P_{(\phi, \psi; x_0, y_0)} = [P_{(\phi, \psi; x_0, y_0)}^1, \dots, P_{(\phi, \psi; x_0, y_0)}^N]^T \quad (3.1.4)$$

ただし、

$$Y_0 = [y_0^1, \dots, y_0^N]^T \quad (3.1.5)$$

$$P_{(\phi, \psi; x_0, y_0)}^i = (1/2) \|x(t_f) - y^i(t_f)\|_{S^T}^2 + (1/2) \int_{t_0}^{t_f} [\|\phi\|_{R_{\phi(t)}}^2 - \|\psi\|_{R_{\psi(t)}}^2] dt \quad \forall i \in I_N \quad (3.1.6)$$

$S : v \cdot n$ 実定行列 $w \leq n$

$R_{\phi}, R_{\psi} : r \cdot r$ 正定対称時変行列

t_f は固定終端時間であり、過程は有限時間で終了するものとする。問題は ϕ -制御主体と (ψ, i)-制御主体〔ここに i : 仮想制御主体〕との真向からの対立という局面にある。すなわちどの初期点 $y_0^i, i \in I_N$ から出発するかは決定権は $[\psi, i]$ -制御主体側にあるわけであるから、まず i -仮想制御主体により可能な限り大きい $P^i, i \in I_N$ が選択され、それをさらに ϕ -制御主体が最大化し、その後それを ϕ -制御主体が最小化する、という最適化の設定が適切であると考えられる。これは結局、前節での ψ -優先解に対応するものであり、したがって、次の値 $V_{\psi(x_0, y_0)}^*$ が算定されるべきものである。

$$V_{\psi(x_0, y_0)}^* = \min_{\phi \in R^r} \max_{\psi \in R^r} \max_{i \in I_N} P_{(\phi, \psi; x_0, y_0)}^i \quad (3.1.7)$$

3.2 最適化の等価変換の実現

〔補題 3.2.1〕 $\alpha \hat{\phi}, \hat{\psi}$;

$$\max P_{(\hat{\phi}, \hat{\psi}; x_0, y_0)}^i \leq \max P_{(\hat{\phi}, \hat{\psi}; x_0, y_0)}^i \leq \max P_{(\hat{\phi}, \hat{\psi}; x_0, y_0)}^i \quad \forall \phi, \psi \in R^r \quad (3.2.1)$$

(証明) 評価規準 $P^i \forall i \in I_N$: (3.1.6) とシステムダイナミックス: (3.1-1, 2) の、したがって結果として一般化ハミトニアンの ϕ, ψ に関する Separability と R_{ϕ}, R_{ψ} の正定性により明らかである。

この補題 3.2.1 は、本問における $P^i \forall i \in I_N$: (3.1.6) が前節の仮定 2.3.1 を満足することを

示している。

一方 Bensaïsan, A. によりヒルベルト空間で一般的に証明された汎関数に関する min max 定理が本場合に適用可能であり、それを次の定理に示す。

《定理 3.2.1》〔Bensaïsan, A.¹⁰⁾〕 $\forall \bar{\phi} \in R^r, \bar{\pi} \in \Pi$;

$$\bar{P}_{(\bar{\phi}, \bar{\pi}; x_0, Y_0)} \leq \bar{P}_{(\bar{\phi}, \bar{\pi}; x_0, Y_0)} \leq \bar{P}_{(\bar{\phi}, \bar{\pi}; x_0, Y_0)} \quad \forall \bar{\phi} \in R^r, \bar{\pi} \in \Pi \quad (3.2.2)$$

(証明) R^r は凸閉集合であり, Π はコンパクトな凸集合である。(2.3.5), (3.1-4, 6) より,

$$\bar{P}_{(\bar{\phi}, \bar{\pi}; x_0, Y_0)} = \frac{1}{2} \pi^T \omega_{(t_f)} + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\|\phi\|_{R_{\phi(t)}}^2 - \|\psi\|_{R_{\psi(t)}}^2] dt \quad (3.2.3)$$

ただし,

$$\omega_{(t_f)} = [\|x_{(t_f)} - y_{(t_f)}^1\|_{S^1}^2, \dots, \|x_{(t_f)} - y_{(t_f)}^N\|_{S^N}^2]^T \quad (3.2.4)$$

したがって P は固定した $x_0, Y_0, \phi \in R^r$ について, ある $\phi \in R^r, \forall \pi \in \Pi$ に対し R_{ϕ} の正定性により厳密に凸, かつ下半連続であり, 一方ある $\pi \in \Pi, \forall \phi \in R^r$ に対し厳密に凹, かつ上半連続である。さらに $\|\phi\| + \|\pi\| \rightarrow \infty$ の時, $-\bar{P}_{(\bar{\phi}, \bar{\pi}; x_0, Y_0)} + \bar{P}_{(\phi, \psi; x_0, Y_0)} \rightarrow \infty$ となるようなある対 $(\bar{\phi}, \bar{\pi}) \in R^r \cdot \Pi$ が確かに存在する。したがって文献10)の定理の成立に要求される仮定が全て満足されることから, 以下その証明に準じる。

この定理3.2.1は, 本問において前節の仮定2.3.2が満足されることを保証する。最後の仮定2.3.3についてであるが, 前節にも記したように本場合においては, 仮定2.3.1の成立がとりもなおさず仮定2.3.3の成立を確実にする。

〔補題 3.2.2〕 $\forall \check{\phi}, \check{\psi} \in R^r$;

$$\bar{P}_{(\check{\phi}, \check{\psi}; x_0, Y_0)} \leq \bar{P}_{(\check{\phi}, \check{\psi}; x_0, Y_0)} \leq \bar{P}_{(\check{\phi}, \check{\psi}; x_0, Y_0)} \quad \forall \check{\phi}, \check{\psi} \in R^r \quad (3.2.5)$$

(証明) 補題3.2.1の証明に準じる。

以上の補題3.2-1, 2, 定理3.2.1の適用により, 求められるべき V_{ϕ}^* : (3.1.7) は (2.3.12) に示される最適化の構成を踏まえるとよいことになる。すなわちまず $\bar{P}$ の鞍点: $(\phi_{(\pi, t)}^*, \psi_{(\pi, t)}^*)$ を決定する。この動的最適化は一般化制御理論の範ちゅうに属し実現可能である。ついで求められた鞍点を $\bar{P}$ に代入して得られる $\bar{P}_{(\pi; x_0, Y_0)}$ を最大化する $\pi^* \in \Pi$ を決定する。この π によるスカラー関数 $\bar{P}$ の最大化は拘束条件: (2.3.6) 下にあり, これによく知られたラグランジ乗数法により達成される。

3.3 鞍点 $(\phi_{(\pi, t; x_0, Y_0)}^*, \psi_{(\pi, t; x_0, Y_0)}^*)$ の決定

w 次元一般化状態変数 $z^i \quad \forall i \in I_N$;

$$z^i = S[T_{\phi(t_f, t)} x - T_{\psi(t_f, t)} y^i] \quad \forall i \in I_N \quad (3.3.1)$$

の導入により, 以下にシステム: (3.1-1, 2) とベクトル値評価規準: (3.1-4, 6) の等価変換を行う。

ここに,

$$z_0^i = S[T_{\phi(t_f, t_0)} x_0 - T_{\psi(t_f, t_0)} y_0^i] \quad \forall i \in I_N \quad (3.3.2)$$

$$\frac{dT_{v(t_f, t)}}{dt} = -T_{v(t_f, t)} F_{v(t)} \quad v = \phi, \omega \quad (3.3.3)$$

$$T_{v(\tau, \tau)} = E_n \quad E_n: n \cdot n \text{ 単位行列} \quad \forall \tau \in [t_0, t_f] \quad (3.3.4)$$

(3.3.1) の両辺を微分して (3.3-3, 4) を用いて,

$$\frac{dz^i}{dt} = \bar{G}_{\phi(t_f, t)} \phi - \bar{G}_{\psi(t_f, t)} \psi \quad z_{(t_0)}^i = z_0^i \quad \forall i \in I_N \quad (3.3.5)$$

ただし,

$$\bar{G}_{v(t_f, t)} = ST_{v(t_f, t)} G_{v(t)} \quad v = \phi, \psi \quad (3.3.6)$$

以下では, この等価変換された一般化システム: (3.3.5) により考察を進める。(3.3.1) を用いて P^i : (3.1.6) $\bar{P}$: (3.2.3) を書き換えると,

$$P_{(\phi, \psi; z_0^i)}^i = \frac{1}{2} \|z_{(t_f)}^i\|^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\|\phi\|_{R_{\phi(t)}}^2 - \|\psi\|_{R_{\psi(t)}}^2] dt \quad \forall i \in I_N \quad (3.3.7)$$

$$\bar{P}_{(\phi, \psi; z_0)} = \frac{1}{2} \sum \|z_{(t_f)}^i\|_{E_N}^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\|\phi\|_{R_{\phi(t)}}^2 - \|\psi\|_{R_{\psi(t)}}^2] dt \quad (3.3.8)$$

ただし,

$$Z = [(z^1)^T, \dots, (z^N)^T]^T \quad (3.3.9)$$

一般化制御理論において明らかなように, 強い競争状況においては, 従来の最適制御理論において許容されると同様に, 最適性の必要条件^{1,2)}より閉ループ形式の鞍点おから開ループ形式のそれが導出可能である。したがって一般化ハミルトン-ヤコビ方程式は,

$$-\frac{\partial V_{(Z, \pi, t)}}{\partial t} = \min_{\phi \in R^r} \max_{\psi \in R^r} \mathcal{L}_{(Z, (\partial V / \partial Z)^T, \phi, \psi, \pi, t)} \quad (3.3.10)$$

ただし,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\|\phi\|_{R_{\phi}}^2 - \|\psi\|_{R_{\psi}}^2] + \left\langle \left(\frac{\partial V}{\partial Z} \right)^T, \frac{dZ}{dt} \right\rangle \quad (3.3.11)$$

今スカラー関数 $V_{(Z, \pi, t)}$ を,

$$V_{(Z, \pi, t)} = \frac{1}{2} \|Z\|_{K_{(\pi, t)}}^2 \quad (3.3.12)$$

とし, $nN \cdot nN$ 行列 $K_{(\pi, t)}$ は対称であるとする。すなわち, $K_{ij} \forall i, j \in I_N$ を K の i 行 j 列の $n \cdot n$ 要素行列として,

$$K_{ij(\pi, t)} = K_{ji(\pi, t)}^T \quad (3.3.13)$$

境界条件は, (3.3-8, 12) より,

$$V_{(Z(t_f), \pi, t_f)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|z_{(t_f)}^i\|_{E_N}^2 \quad (3.3.14)$$

(3.3.12) より,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial Z} \right)^T = KZ \quad (3.3.15)$$

一方,

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \right|_{\phi = \phi^*} = 0 \quad (3.3.16)$$

に (3.3-11, 15) を用いて, 最達制御方策 ϕ_{π}^* は,

$$\begin{aligned} \phi_{\pi}^* &= -R_{\phi(t)}^{-1} \bar{G}_{\phi(t_f, t)}^T \tilde{E}^T K_{(\pi, t)} Z \\ &= -R_{\phi(t)}^{-1} \bar{G}_{\phi(t_f, t)}^T \sum_{i=1}^N K_{(\pi, t)}^i z^i \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

ただし,

$$K_{(\pi, t)}^i = \sum_{j=1}^N K_{ij(\pi, t)}: n \cdot n \text{ 対称行列} \quad \forall i \in I_N \quad (3.3.18)$$

$$\tilde{E} = [E_n, \dots, E_n]^T: nN \cdot n \text{ 行列} \quad (3.3.19)$$

ϕ -制御主体についても同様にして求められ,

$$\psi_{\pi}^* = -R_{\psi(t)}^{-1} \bar{G}_{\psi(t_f, t)}^T \tilde{E}^T K_{(\pi, t)} Z \quad (3.3.20)$$

一方, (3.3.12) より,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2} \|z\|^2_{dK/dt} \quad (3.3.21)$$

(3.3-15, 17, 20, 21) を (3.3.10) に代入して, 次式を得る。

$$\|Z\|_{\{dK/dt\}-K\tilde{B}(M_{\phi(t_f,t)}-M_{\psi(t_f,t)})\tilde{B}^TK}=0 \quad (3.3.22)$$

$$M_{v(t_f,t)} = \bar{G}_{v(t_f,t)} R_{v(t)}^{-1} \bar{G}_{v(t_f,t)}^T \quad v = \phi, \psi \quad (3.3.23)$$

したがって K に関する次の行列微分方程式を得る。

$$\frac{dK_{(\pi,t)}}{dt} = K_{(\pi,t)} \tilde{E} (M_{\phi(t_f,t)} - M_{\psi(t_f,t)}) \tilde{E}^T K_{(\pi,t)} \quad (3.3.24)$$

あるいは等価に,

$$\frac{dK_{ij(\pi,t)}}{dt} = \sum_{\theta=1}^N K_{i\theta(\pi,t)} (M_{\phi(t_f,t)} - M_{\psi(t_f,t)}) \sum_{\theta=1}^N K_{\theta j} \quad \forall i, j \in I_N \quad (3.3.25)$$

境界条件は, (3.3-14, 18) より K_{ij} , K^i に対し,

$$K_{ij(\pi,t_f)} = \begin{cases} \pi_i E_n & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \forall i, j \in I_N \quad (3.3.26)$$

$$K_{(\pi,t_f)}^i = \pi_i E_n \quad \forall i \in I_N \quad (3.3.27)$$

(3.3.25) が解析的に解けることを以下に示す。

(3.3.27) の両辺の $j=1$ から $j=N$ までの総和をとり,

$$\frac{d\left(\sum_{i=1}^N K_{ij}\right)}{dt} = \sum_{\theta=1}^N K_{i\theta} (M_{\phi} - M_{\psi}) \sum_{j=1}^N \sum_{\theta=1}^N K_{\theta j} \quad \forall i \in I_N \quad (3.3.28)$$

(3.3.19) を用いて (3.3.28) を変換した後, 両辺の $i=1$ から $i=n$ までの総和をとると,

$$\frac{d\hat{K}_{(\pi,t)}}{dt} = \hat{K}_{(\pi,t)} (M_{\phi(t_f,t)} - M_{\psi(t_f,t)}) \hat{K}_{(\pi,t)} \quad (3.3.29)$$

ただし,

$$\hat{K}_{(\pi,t)} = \sum_{i=1}^N K_{(\pi,t)}^i : n \cdot n \text{ 対称行列} \quad (3.3.30)$$

境界条件は (3.3-27, 30) より,

$$\hat{K}_{(\pi,t_f)} = E_n \quad (3.3.31)$$

今 $\hat{K}$ は正則であるとする。(この仮定については3.4項で議論する)

恒等式;

$$\hat{K} \hat{K}^{-1} = E_n \quad (3.3.32)$$

の両辺の時間微分をとり (3.3.29) を用い, さらにその両辺を $\tau=t$ から $\tau=t_f$ まで積分して, 結局,

$$\hat{K}_{(\pi,t,t_f)} = \left[E_n + \int_t^{t_f} (M_{\phi(t_f,\tau)} - M_{\psi(t_f,\tau)}) d\tau \right]^{-1} \quad (3.3.33)$$

(3.3.30) にかんがみ, K^i を次のように設定する。

$$K^i = \Theta_{(\pi,t)}^i \hat{K} \quad \forall i \in I_N \quad (3.3.34)$$

この時, (3.3-30, 34) より, 次式が要求される;

$$\sum_{i=1}^N \Theta^i = E_n \quad (3.3.35)$$

(3.3.28) に (3.3.18) を代入した式に (3.3.34) を用い,

$$\frac{dK^i}{dt} = \Theta^i \hat{K} (M_\phi - M_\psi) \hat{K} \quad \forall i \in I_N \quad (3.3.36)$$

(3.3.34) の両辺を時間微分し $\hat{K}$ の正則性と (3.3.36) より,

$$\frac{d\Theta^i}{dt} = 0 \quad (3.3.37)$$

(3.3-30, 31, 34) を (3.3.37) に用いて, 結局,

$$\Theta^i = \pi_i E_n \quad \forall i \in I_N \quad (3.3.38)$$

(3.3.38) は確かに (3.3.35) を満足する。(3.3-33, 28) を (3.3.35) に代入して, 最終的に K^i は,

$$K_{(\pi_i, t, t_f)}^i = \pi_i \left[E_n + \int_t^{t_f} (M_{\phi(t_f, \tau)} - M_{\psi(t_f, \tau)}) d\tau \right]^{-1} \quad (3.3.39)$$

(3.3.39) は, 境界条件 (3.3.27) を満足する。(3.3-17, 20) に (3.3.39) を代入して鞍点 $(\phi_\pi^*, \phi_\psi^*)$ は,

$$v_{\phi(\pi, t)}^* = -R_{v(t)}^{-1} \bar{G}_{v(t_f, t)}^T \left[E_n + \int_t^{t_f} (M_{\phi(t_f, \tau)} - M_{\psi(t_f, \tau)}) d\tau \right]^{-1} \sum_{i=1}^N \pi_i z^i \quad v = \phi, \psi \quad (3.3.40)$$

(3.3.40) を (3.3.5) に代入して,

$$\frac{dz^i}{dt} = -(M_\phi - M_\psi) \left[E_n + \int_t^{t_f} (M_\phi - M_\psi) d\tau \right]^{-1} \sum_{i=1}^N \pi_i z^i \quad \forall i \in I_N \quad (3.3.41)$$

この時, $z^i \forall i \in I_N$ は, 次のように求められる。

$$z^i = \Psi_{(t, t_0)} z_0^i \quad \forall i \in I_N \quad (3.3.42)$$

(3.3.42) を (3.3.41) に代入した式と (3.3.42) の両辺を微分した式の両辺にそれぞれ π_i を乗じて後, $i=1$ から $i=N$ までの総和をとり, 両式の比較により,

$$\frac{d\Psi_{(t, t_0)}}{dt} = -(M_{\phi(t_f, t)} - M_{\psi(t_f, t)}) \left[E_n + \int_t^{t_f} (M_{\phi(t_f, \tau)} - M_{\psi(t_f, \tau)}) d\tau \right]^{-1} \Psi_{(t, t_0)} \quad (3.3.43)$$

一方, (3.3-29, 43) より,

$$\frac{d[\hat{K} \Psi_{(t, t_0)}]}{dt} = 0 \quad (3.3.44)$$

したがって, $t=t_0, t_f$ に対し, (3.3-33, 42) より,

$$\begin{aligned} \hat{K}_{(t, t_f)} \Psi_{(t, t_0)} &= \hat{K}_{(t_0, t_f)} \\ &= \Psi_{(t_f, t_0)} \end{aligned} \quad (3.3.45)$$

(3.3.40) に (3.3-42, 45) を順次用いて, 鞍点 $(\phi_\pi^*, \phi_\psi^*)$ は,

$$v_{\phi(\pi, t; z_0)}^* = -R_{v(t)}^{-1} \bar{G}_{v(t_f, t)}^T \left[E_n + \int_{t_0}^{t_f} (M_{\phi(t_f, t)} - M_{\psi(t_f, t)}) dt \right]^{-1} \sum_{i=1}^N \pi_i z_0^i \quad v = \phi, \psi \quad (3.3.46)$$

3.4 鞍点に対する条件

3.3 項で仮定した $\hat{K}$ の正則性に関して議論する。

〔補題 3.4.1〕 仮定 3.1.2 が成立するための必要十分条件は,

$$W_{v(t_0, t_f)} = \int_{t_0}^{t_f} M_{v(t_f, t)} dt > 0 : n \cdot n \text{ 対称行列} \quad v = \phi, \psi \quad (3.4.1)$$

ここに, $M_{v(t_f, t)}$, $v = \phi, \psi$ は (3.3.23) により定義される $n \cdot n$ 対称行列であり,

$$M_{v(t_f, t)} = S T_{v(t_f, t)} G_{v(t)}^T R_{v(t)}^{-1} G_{v(t)}^T T_{v(t_f, t)}^T S^T \quad v = \phi, \psi \quad (3.4.2)$$

(証明) Kalman, R. E.¹¹⁾ の命題 5.2 の証明に準じる。ただし, 次の点に注意を要する。すなわち, $W_{v(t_0, t_f)}$ を可制御行列とし, $\bar{W}_{v(t_0, t_f)}$ を次のように定義する。

$$\bar{W}_{v(t_0, t_f)} = T_{v(t_0, t_f)} S^{-1} W_{v(t_0, t_f)} (S^{-1})^T T_{v(t_0, t_f)}^T \quad v = \phi, \psi \quad (3.4.3)$$

さらに次の n 次元ベクトル ν ;

$$\nu = T_{v(t_f, t_0)}^T S^T x \quad (3.4.4)$$

を定義すると、この時、

$$\|x\|_{W_{v(t_0, t_f)}}^2 = \|\nu\|_{\bar{W}_{v(t_0, t_f)}}^2 \quad (3.4.5)$$

したがって $W_{v(t_0, t_f)}$ の正定性により、 $\bar{W}_{v(t_0, t_f)}$ も正定である。ゆえに $\bar{W}_v^{-1}$ が存在することになる。

補題 3.4.1 と (3.3.33) より、したがって次の定理が成立することは明らかである。

《定理 3.4.1》 (ϕ^*, ϕ^*) が鞍点であるための十分条件は、次不等式;

$$W_{\phi(t_0, t_f)} > W_{\psi(t_0, t_f)} \quad (3.4.6)$$

が成立することである。

(証明) (3.4.6) が成立すれば必ず K^{-1} は存在することから明らかである。

一方、古典変分法に源を発する共役点^{12,13)}の概念を導入することにより、仮定 3.1.2 の成立に対する次の陽ではない必要十分条件を得る。

〈系 3.4.1〉 $(\phi_\phi^*, \phi_\psi^*)$: (3.3.46) が鞍点であるための必要十分条件は、全ての $t \in (t_0, t_f)$ に対し如何なる共役点も存在しないことである。

(証明) 本間における最適性の必要条件に関する行列微分方程式は $n \cdot n$ 行列解 $\bar{z}_{(t)}^i, \bar{A}_{(t)}^i \quad r i \in I_N$ に対し、

$$d \begin{pmatrix} \bar{z}^i \\ \bar{A}^i \end{pmatrix} / dt = \begin{pmatrix} 0 & -(M_\phi - M_\psi) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z}^i \\ \sum_{i=1}^N \bar{A}^i \end{pmatrix} \quad r i \in I_N \quad (3.4.7)$$

$$\bar{z}_{(t_f)}^i = E_n \quad r i \in I_N \quad (3.4.8)$$

$$\bar{A}_{(t_f)}^i = \pi_i E_n \quad r i \in I_N \quad (3.4.9)$$

したがって、

$$\bar{A}_{(t)}^i = \pi_i E_n \quad r i \in I_N \quad (3.4.10)$$

(3.4.10) を (3.4.7) に代入して、

$$d\bar{z}^i/dt = -(M_\phi - M_\psi) \quad (3.4.11)$$

(3.4.11) の両辺を $\tau=t$ から $\tau=t_f$ まで積分して、

$$\begin{aligned} \bar{z}_{(t)}^i &= E_n + \int_t^{t_f} (M_\phi - M_\psi) d\tau \\ &= \hat{K}_{(t, t_f)}^{-1} \quad r i \in I_N \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

$\bar{z}_{(t)}^i$ すなわち $\hat{K}_{(t, t_f)}^{-1}$ がある $t \in (t_0, t_f)$ で特異となる時、 t_c が t_f に対する共役点となるから、(6.4.12) より全ての $t \in (t_0, t_f)$ に対し $\hat{K}_{(t, t_f)}$ が存在することとこの区間での共役点の非存在性が等価であることから明らかである。

3.5 $\arg[\max_{\pi \in \Pi} V_{(\pi; z_0)}]$ の決定

残る最適化は $V_{(\pi; z_0)}$ の $\pi \in \Pi$ による最大化により達成される。前項で解析されたように、行列 K は π, t の陽の関数として求められず、その各行【列】の代数和としてのみ解析的な形が得られたので、 V に関しては (3.3.12) は使用できない。したがって (3.3.8) に (3.3.46) を代入して得られる次式を利用する。

$$M_{\phi(1,t)} = \begin{bmatrix} 8(1-t)^2 & 4(1-t) \\ 4(1-t) & 2 \end{bmatrix}, \quad M_{\psi(1,t)} = \begin{bmatrix} (1-t)^2 & (1-t) \\ (1-t) & 2 \end{bmatrix} \quad (3.6.8)$$

$$\det \left[\int_0^1 M_{\phi(1,t)} dt \right] = \frac{4}{3}, \quad \det \left[\int_0^1 M_{\psi(1,t)} dt \right] = \frac{1}{2} \quad (3.6.9)$$

である事を確認して, (3.3.33) より,

$$\hat{K}_{(0,1)}^{-1} = \begin{bmatrix} 10/3 & 3/2 \\ 3/2 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.6.10)$$

明らかに,

$$\det[\hat{K}_{(0,1)}^{-1}] = \frac{53}{12} \quad (3.6.11)$$

であるから,

$$\hat{K}_{(0,1)} = (1/53) \begin{bmatrix} 24 & -18 \\ -18 & 40 \end{bmatrix} \quad (3.6.12)$$

したがって, (3.3.40) より,

$$\phi_{\psi(\pi, t; z_0)}^* = -(2/53)[(96t + 46)\pi_2 - 156t + 18] \quad (3.6.13)$$

$$\psi_{\phi(\pi, t; z_0)}^* = (1/53)[(48t + 94)\pi_2 - 78t - 60] \quad (3.6.14)$$

$$V_{\psi(\pi; z_0)}^* = (2, 912/2, 909[(\pi_2 - (28, 844/5, 824))^2 - (5, 775, 840/33, 884, 032)] \quad (3.6.15)$$

3.5 の手法により $\pi_j^* (j=1, 2)$ の連立解は容易に求められ, 次のようになる。

$$\begin{aligned} \pi_1^* &= 0, \\ \pi_2^* &= 1 \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

(3.6.16) を (3.6-13, 14, 15) に用いて, 最終的に ψ -優先解: $(\phi_\psi^*, \psi_\phi^*)$ と対応する最適評価規準値: V_ψ^* は, それぞれ次のように算定される。

$$\phi_{\psi(t; z_0)}^* = (8/53)(15t - 16) \quad (3.6.17)$$

$$\psi_{\phi(t; z_0)}^* = -(2/53)(15t - 17) \quad (3.6.18)$$

$$V_{\psi(z_0)}^* = 13.934 \quad (3.6.19)$$

4. 結 論

完全情報下の強い競争状況において, ベクトル値評価規準をもつ一般化最適制御問題を考察した。相対立する両制御主体のいずれか一方が, 評価規準に対し優先的であるという意味で適切な $\phi[\psi]$ -優先解を定義した。その時点では求解が困難であるが, ある実規可能な仮定の下に, 等価な最適化の変換を経て, その解が理論的に導出可能であることを示した。

ここにおける実現可能な仮定とは, 一つは一般化ハミルトニアンに関する $\min \max$ 仮定²⁾に通じるものであり, 他の一つは Neumann, J. V. に源を発する一連の $\min \max$ 定理⁶⁻¹⁰⁾における, 評価規準と両制御方策の位相的特性に起因するものである。

また解析的な形の求解が可能である例を, システムが線形で両制御主体の消費エネルギー差を考慮した, Bolza 形のベクトル値評価規準をもつ一般化最適制御問題に対して示した。この問題は, 通常の微分ゲームにおける追跡-回避問題 [Pursuit-Evasion Problem] と関連させて考察すれば, 追跡者 [Pursuer], 回避者 [Evader] の動的挙動は確定しているが, 一方の制御主体の出発点に複数の可能性があり, いずれの点から出発するかの決定権がいずれか一方の制御主体に存在する状況下の問題であると考えられる。

参 考 文 献

- 1) Ho, Y. C.: JOTA, 6 (1970), 3, P. 179-209.
- 2) Isaacs, R.: Differential Games, (1965) John Wiley, N. Y.
- 3) Zadeh, L. A.: IEEE Trans. on A. C. AC-8 (1963) p. 59-60.
- 4) Medanić, J. and Andgelic, M.: JOTA, 8 (1971), 6, p. 413-430.
- 5) Ho, Y. C.: JOTA, 8 (1971), 6, p. 187-189.
- 6) Neumann, J. V. and Morgenstern, O. (銀林他監訳): ゲームの理論と経済行動, (1973) 東京図書.
- 7) Fan, K.: Proceeding of National Academy of Science U.S.A. 38 (1952) p. 121-126.
- 8) Fan, K.: *ibid.* 39 (1953) p. 42-47.
- 9) Sion, M.: Pacific Journal of Mathematics, 8 (1958), p. 171-176.
- 10) Bensaussan, A.: Differential Games and Related Topics, ed. Kuhn, H. W. and Szegő, G. P. (1971) p. 177-199.
- 11) Kalman, R. E.: Bol. Soc. Mat. Mex., 5 (1960), p. 102-119.
- 12) Bliss, G. A.: Lectures on the Calculus of Variations, (1946), Univ. of Chicago Press.
- 13) Breakwell, J. V. and Ho, Y. C.: Int. J. Engng. Sci., 2 (1965), Pergamon Press, p. 565-579.