



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	計算機向きの様相論理の公理化
Author(s)	沢村, 一; 前田, 隆
Citation	北海道大學工學部研究報告, 88, 153-162
Issue Date	1978-08-10
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41477
Type	departmental bulletin paper
File Information	88_153-162.pdf



計算機向きの様相論理の公理化

沢 村 一* 前 田 隆**

(昭和 52 年 12 月 28 日受理)

An Axiomatization of Computer-oriented Modal Logics

Hajime SAWAMURA and Takashi MAEDA

(Received December 28, 1977)

Abstract

The need of modal concepts has been recognized in artificial intelligence and mathematical theory of computation.

In this paper, an axiomatization of computer-oriented modal logics with the modalities, necessity and possibility, has been given in such a way that an effective decision procedure will be readily constructed.

Also, the characteristic theorems of the axiom system, i. e. soundness, consistency, decidability were proved.

1. ま え が き

計算機科学における論理学の中心的役割は対象を的確に表現できる, 表現能力豊かな言語と必要とされる演繹能力を提供することにある。この目的のために今まで古典論理が主として用いられてきたが, 古典論理にはない概念を補う目的に加えて計算機科学においていくつかの応用をもち得るという理由から非古典論理もまた用いられつつある¹⁻⁴⁾。計算の数学的理論 (MTC) の分野について例を上げるならば, ポインター変数, 配列変数を含む任意の代入文の意味は内包論理 (Intensional logic) を使うことによって一様に与えることができる⁵⁾。また Pratt のプログラムの論理²⁾では, “プログラム p が停止したとき命題 A が成立するならば, 次にプログラム q が停止することができて命題 B が成立する” というような表明を論理式 $\Box(A \supset \Diamond B)$ で表現することができるが, 古典論理に基づく Floyd-Hoare の論理ではプログラムについてのこのような複雑な表現はできない。

本論文では非古典論理の一つであり, 様相概念として $\Box$ (必然性)と $\Diamond$ (可能性)をもつ様相命題論理の計算機処理に適した一つの公理化を与え, 次にその公理系の特徴づけを行なった後, 任意の様相命題論理式が証明可能か否かを判定する決定手続きを与える。

2. 形式的体系 L-S4

ここでは G. Gentzen の LK を基礎におくがこれは単に Hilbert 流の公理化とは異なる別の形式化というだけでなく, 我々の目的に対し次のような特徴をもつという点で重要である。

○証明が自然で見やすい

* 情報システム工学講座

** 工業数学講座

○公理系のメタ的性質を調べるのに適している

○決定手続きが与えやすい

体系 **L-S4** は次のような言語と公理，推論図式からなっている。ただしドイツ文字はメタ変数を表わすものとする。

2.1 言語

2.1.1 記号

- 1) 命題変数: $P, Q, R, \dots$ (必要に応じて添字をつける)。
- 2) 論理記号: $\neg, \wedge, \Box$ 。
- 3) 補助記号: $(,), , ,$ 。

2.1.2 論理式

- 1) 命題変数は論理式である
- 2) $\mathcal{A}$ が論理式なら $\neg\mathcal{A}, \Box\mathcal{A}$ は論理式である
- 3) $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が論理式なら $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ は論理式である
- 4) (1)–(3) によって構成されたもののみが論理式である。

2.1.3 定義された記号, $\vee, \supset, \equiv, \Diamond, \rightarrow$

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) &\stackrel{\text{def}}{=} \neg(\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \\ (\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) &\stackrel{\text{def}}{=} \neg(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \\ (\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}) &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \supset \mathcal{A}) \\ \Diamond\mathcal{A} &\stackrel{\text{def}}{=} \neg\Box\neg\mathcal{A} \\ (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) &\stackrel{\text{def}}{=} \Box(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \end{aligned}$$

あいまいさが生じないときは論理式の最も外側のカッコは省かれることがある。

2.2 公理図式と推論図式

定義 1 有限個の論理式 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ をコンマ ', ' で区切って並べた

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$$

の形の図式を Sequence と呼び、これらをギリシヤ文字の大文字 $\Gamma, \Delta, \dots$ など表わす。

特別な場合 ($n=0$) として空な Sequence も許す。

定義 2 $\neg\Gamma, \Box\Gamma$ は Γ 中のすべての論理式にそれぞれ $\neg, \Box$ を前置した Sequence を表わす。同様に $\neg\Box\Gamma$ は Sequence $\Box\Gamma$ のすべての論理式に $\neg$ を前置した Sequence を表わす。

2.2.1 公理図式 $\mathcal{A}, \mathcal{A}, \neg\mathcal{A}, \Gamma$

2.2.2 推論図式

$$\begin{aligned} (\neg\neg) & \frac{\Gamma, \mathcal{A}, \Delta}{\Gamma, \neg\neg\mathcal{A}, \Delta} \\ (\wedge) & \frac{\Gamma, \mathcal{A}, \Delta \quad \Gamma, \mathcal{B}, \Delta}{\Gamma, \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \Delta} \\ (\neg\wedge) & \frac{\Gamma, \neg\mathcal{A}, \neg\mathcal{B}, \Delta}{\Gamma, \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}), \Delta} \\ (\Box) & \frac{\neg\Box\Gamma, \mathcal{A}, \neg\Box\Delta}{\neg\Box\Gamma, \Box\mathcal{A}, \neg\Box\Delta} \\ (\neg\Box) & \frac{\Gamma, \neg\mathcal{A}, \Delta}{\Gamma, \neg\Box\mathcal{A}, \Delta} \end{aligned}$$

3. L-S4 の特徴づけ

様相論理体系 **L-S4** は Gentzen の Sequential な方法に基づく様相論理体系 (付録参照)⁶⁾か

ら得られたものである。その方法は LK から一階述語論理の決定手続きを導いた島内の方法⁷⁾と類似している。この章では $L-S4$ を特徴づけるためにいくつかの定理を証明する。

定理 1 様相論理体系 $L-S4$ は次の $S4$ と演繹的に同等である、ただし言語は $L-S4$ と同じものとする。

$$\begin{aligned}
 &\text{公理図式: } (\Box \vee \Box) \supset \Box \\
 &\quad \Box \supset (\Box \vee \Box) \\
 &\quad (\Box \vee \Box) \supset (\Box \vee \Box) \\
 &\quad (\Box \supset \Box) \supset ((\Box \vee \Box) \supset (\Box \vee \Box)) \\
 &\quad \Box \Box \supset \Box \\
 &\quad \Box(\Box \supset \Box) \supset (\Box \Box \supset \Box \Box) \\
 &\quad \Box \Box \supset \Box \Box
 \end{aligned}$$

$$\text{推論図式: Modus Ponens } \frac{\Box \quad \Box \supset \Box}{\Box}$$

$$\text{Necessitation } \frac{\Box}{\Box \Box}$$

証明 命題論理の部分は容易であるので様相論理に関する部分についてのみ証明する。

(i) 体系 $L-S4$ で $S4$ の公理、推論図式を導出する。

$\Box \Box \supset \Box$ の証明: $\neg(\Box \Box \wedge \neg \Box)$ を証明すればよい、

$$\begin{aligned}
 &\frac{\neg \Box, \Box}{\neg \Box \Box, \Box} (\neg \Box) \\
 &\frac{\neg \Box \Box, \Box}{\neg(\Box \Box \wedge \neg \Box)} (\neg \wedge)
 \end{aligned}$$

$\Box(\Box \supset \Box) \supset (\Box \Box \supset \Box \Box)$ の証明: $\neg(\Box(\neg(\Box \wedge \neg \Box)) \wedge (\Box \Box \wedge \neg \Box \Box))$ を証明すればよい、

$$\begin{aligned}
 &\frac{\Box, \neg \Box, \Box \quad \neg \Box, \neg \Box, \Box}{\Box \wedge \neg \Box, \neg \Box, \Box} (\wedge) \\
 &\frac{\Box \wedge \neg \Box, \neg \Box, \Box}{\Box \wedge \neg \Box, \neg \Box \Box, \Box} (\neg \Box) \\
 &\frac{\Box \wedge \neg \Box, \neg \Box \Box, \Box}{\neg \Box \neg(\Box \wedge \neg \Box), \neg \Box \Box, \Box} (\neg \Box) \\
 &\frac{\neg \Box \neg(\Box \wedge \neg \Box), \neg \Box \Box, \Box}{\neg \Box \neg(\Box \wedge \neg \Box), \neg \Box \Box, \Box \Box} (\Box) \\
 &\frac{\neg \Box \neg(\Box \wedge \neg \Box), \neg \Box \Box, \Box \Box}{\neg \Box(\neg(\Box \wedge \neg \Box)), \neg(\Box \Box \wedge \neg \Box \Box)} (\neg \wedge) \\
 &\frac{\neg \Box(\neg(\Box \wedge \neg \Box)), \neg(\Box \Box \wedge \neg \Box \Box)}{\neg(\Box(\neg(\Box \wedge \neg \Box)) \wedge (\Box \Box \wedge \neg \Box \Box))} (\neg \wedge)
 \end{aligned}$$

$\Box \Box \supset \Box \Box \Box$ の証明: $\neg(\Box \Box \wedge \neg \Box \Box \Box)$ を証明すればよい、

$$\begin{aligned}
 &\frac{\neg \Box, \Box}{\neg \Box \Box, \Box} (\neg \Box) \\
 &\frac{\neg \Box \Box, \Box}{\neg \Box \Box, \Box \Box} (\Box) \\
 &\frac{\neg \Box \Box, \Box \Box}{\neg \Box \Box, \Box \Box \Box} (\Box) \\
 &\frac{\neg \Box \Box, \Box \Box \Box}{\neg(\Box \Box \wedge \neg \Box \Box \Box)} (\neg \wedge)
 \end{aligned}$$

Necessitation の導出: 推論図式 $(\Box)$ において Γ, Δ が空の場合に相当する。

したがって、 $S4$ は $L-S4$ で導出される。

(ii) $S4$ における $L-S4$ の推論図式 $(\Box)$, $(\neg \Box)$ の導出に対しては $L-S4$ の Sequence $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ を $\vdash \mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 \vee \dots \vee \mathcal{A}_n$ に翻訳する。

$(\neg \Box)$ の導出: Γ を $\Box_1, \Box_2, \dots, \Box_m$; Δ を $\Box_1, \Box_2, \dots, \Box_m$ とすると Sequence $\Gamma, \neg \Box, \Delta$ は

$\vdash \mathfrak{P}_1 \vee \mathfrak{P}_2 \vee \dots \vee \mathfrak{P}_m \vee \neg \mathfrak{P} \vee \mathfrak{Q}_1 \vee \mathfrak{Q}_2 \vee \dots \vee \mathfrak{Q}_n$,

Sequence $\Gamma, \neg \Box \mathfrak{P}, \Delta$ は $\vdash \mathfrak{P}_1 \vee \mathfrak{P}_2 \vee \dots \vee \mathfrak{P}_m \vee \neg \Box \mathfrak{P} \vee \mathfrak{Q}_1 \vee \mathfrak{Q}_2 \vee \dots \vee \mathfrak{Q}_n$ となる。

したがって、

$$\vdash \mathfrak{P} \supset (\mathfrak{P}_1 \vee \dots \vee \mathfrak{P}_m \vee \mathfrak{Q}_1 \vee \mathfrak{Q}_2 \vee \dots \vee \mathfrak{Q}_n)$$

$$\vdash \Box \mathfrak{P} \supset \mathfrak{P}$$

$$\vdash \Box \mathfrak{P} \supset (\mathfrak{P}_1 \vee \mathfrak{P}_2 \vee \dots \vee \mathfrak{P}_m \vee \mathfrak{Q}_1 \vee \mathfrak{Q}_2 \vee \dots \vee \mathfrak{Q}_n)$$

$$\vdash \mathfrak{P}_1 \vee \mathfrak{P}_2 \vee \dots \vee \mathfrak{P}_m \vee \neg \Box \mathfrak{P} \vee \mathfrak{Q}_1 \vee \mathfrak{Q}_2 \vee \dots \vee \mathfrak{Q}_n$$

(□) の導出: Γ, Δ を一つの Sequence とし $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_m, \Box \mathfrak{Q}_1, \Box \mathfrak{Q}_2, \dots, \Box \mathfrak{Q}_n$ とおけば $\neg \Box \Gamma, \neg \Box \Delta$ は $\neg \Box \mathfrak{P}_1, \neg \Box \mathfrak{P}_2, \dots, \neg \Box \mathfrak{P}_m, \neg \Box \Box \mathfrak{Q}_1, \neg \Box \Box \mathfrak{Q}_2, \dots, \neg \Box \Box \mathfrak{Q}_n$ となる。したがって、Sequence $\neg \Box \Gamma, \mathfrak{P}, \neg \Box \Delta$ は

$$\vdash \neg \Box \mathfrak{P}_1 \vee \neg \Box \mathfrak{P}_2 \vee \dots \vee \neg \Box \mathfrak{P}_m \vee \neg \Box \Box \mathfrak{Q}_1 \vee \neg \Box \Box \mathfrak{Q}_2 \vee \dots \vee \neg \Box \Box \mathfrak{Q}_n \vee \mathfrak{P} \text{ となる。}$$

$$\vdash (\Box \mathfrak{P}_1 \wedge \Box \mathfrak{P}_2 \wedge \dots \wedge \Box \mathfrak{P}_m \wedge \Box \Box \mathfrak{Q}_1 \wedge \Box \Box \mathfrak{Q}_2 \wedge \dots \wedge \Box \Box \mathfrak{Q}_n) \supset \mathfrak{P}$$

$\vdash \Box (\Box \mathfrak{P}_1 \wedge \Box \mathfrak{P}_2 \wedge \dots \wedge \Box \mathfrak{P}_m \wedge \Box \Box \mathfrak{Q}_1 \wedge \Box \Box \mathfrak{Q}_2 \wedge \dots \wedge \Box \Box \mathfrak{Q}_n) \supset \Box \mathfrak{P}$ ($\because S4$ では $\vdash \mathfrak{P} \supset \Box \mathfrak{P}$ から $\vdash \Box \mathfrak{P} \supset \Box \Box \mathfrak{P}$ が演繹できる)

$$\vdash (\Box \Box \mathfrak{P}_1 \wedge \Box \Box \mathfrak{P}_2 \wedge \dots \wedge \Box \Box \mathfrak{P}_m \wedge \Box \Box \Box \mathfrak{Q}_1 \wedge \Box \Box \Box \mathfrak{Q}_2 \wedge \dots \wedge \Box \Box \Box \mathfrak{Q}_n) \supset \Box \mathfrak{P}$$

$$\vdash (\Box \mathfrak{P}_1 \wedge \Box \mathfrak{P}_2 \wedge \dots \wedge \Box \mathfrak{P}_m \wedge \Box \Box \mathfrak{Q}_1 \wedge \Box \Box \mathfrak{Q}_2 \wedge \dots \wedge \Box \Box \mathfrak{Q}_n) \supset \Box \mathfrak{P}$$

$$\vdash \neg \Box \mathfrak{P}_1 \vee \neg \Box \mathfrak{P}_2 \vee \dots \vee \neg \Box \mathfrak{P}_m \vee \neg \Box \Box \mathfrak{Q}_1 \vee \neg \Box \Box \mathfrak{Q}_2 \vee \dots \vee \neg \Box \Box \mathfrak{Q}_n \vee \Box \mathfrak{P}$$

これは Sequence $\neg \Box \Gamma, \Box \mathfrak{P}, \neg \Box \Delta$ の翻訳されたものである。したがって $L-S4$ は $S4$ で導出される。(i), (ii) より $L-S4$ と $S4$ は演繹的に同等である (deductively equivalent)。Q. E. D.

体系 $L-S4$ の妥当性保存定理、完全性を述べるまえに様相命題論理に対するモデルを Kripke の流儀⁸⁻⁹⁾に従った方法で与える。

定義 3 順序対 (W, R) を Kripke フレームという、ここで W は空でない集合とし R は W 上の二項関係とする。

定義 4 命題変数 $\mathfrak{P}$ と W の要素 w の任意の対 $(\mathfrak{P}, w)$ に対し t か f のいずれかを対応させる写像 V を (W, R) 上の付値という。

ここで付値 V を次のように論理式 $\mathfrak{A}$ と $w \in W$ の任意の対 $(\mathfrak{A}, w)$ に対し t か f を対応させるような写像に拡張する、

$$(1) \quad V(\neg \mathfrak{A}, w) = t \Leftrightarrow V(\mathfrak{A}, w) = f$$

$$(2) \quad V(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, w) = t \Leftrightarrow V(\mathfrak{A}, w) = t \text{ かつ } V(\mathfrak{B}, w) = t$$

$$(3) \quad V(\Box \mathfrak{A}, w) = t \Leftrightarrow wRw' \text{ となるすべての } w' \text{ に対し } V(\mathfrak{A}, w') = t$$

定義 5 Kripke フレーム (W, R) とその上の付値 V からなる組 (W, R, V) を Kripke モデルという。

Kripke は種々の様相論理体系が二項関係 R の性質によりうまく特徴づけられることを示したが、我々の体系 $L-S4$ は $S4$ と同等であるので R を反射的かつ推移的な二項関係とする。

定義 6 $\mathfrak{A}$ を論理式としたときすべての $w \in W$ に対し $V(\mathfrak{A}, w) = t$ となるならば $\mathfrak{A}$ は Kripke モデル (W, R, V) で正しいという、また任意の Kripke モデルで正しいとき妥当であるといい $\vdash \mathfrak{A}$ と書く。

定義 7 Sequence $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ が Kripke モデル (W, R, V) で正しいというのはすべての $w \in W$ に対してある $\mathfrak{A}_i (1 \leq i \leq n)$ があって $V(\mathfrak{A}_i, w) = t$ が成り立つときをいう。

明らかに唯一の論理式からなる Sequence が正しいということと論理式 $\mathfrak{A}$ が正しいということとは同値である。

定義 8 Sequence が証明可能であるという概念は次のように帰納的に定義される,

1) 公理は証明可能である

2) $\frac{\Gamma(A)}{A}$ が **L-S4** の一つの推論図式でありさらに Γ (および A) が証明可能ならば A も証明可能である。

定義 9 唯一つの論理式 $\mathfrak{A}$ からなる Sequene が証明可能のとき単に論理式 $\mathfrak{A}$ が **L-S4** で証明可能であるといい $\vdash \mathfrak{A}$ と書く。

定理 2 (Soundness) **L-S4** の任意の論理式 $\mathfrak{A}$ に対し, $\mathfrak{A}$ が **L-S4** で証明可能ならば $\mathfrak{A}$ はすべての Kripke モデルで正しい (妥当である)。

証明 様相論理式に関する部分だけを証明する。任意の Kripke モデル $K=(W, R, V)$ をとる。

(i) 公理は妥当であることは定義から明らか

(ii) $(\Box)$ の場合: $\frac{\neg\Box\mathfrak{A}_1, \dots, \neg\Box\mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}}{\neg\Box\mathfrak{A}_1, \dots, \neg\Box\mathfrak{A}_n, \Box\mathfrak{B}}$ とし (Γ, A , は一つの Sequence とした), $\neg\Box\mathfrak{A}_1, \dots, \neg\Box\mathfrak{A}_n, \Box\mathfrak{B}$ が K で正しいと仮定する。 $\neg\Box\mathfrak{A}_1, \dots, \neg\Box\mathfrak{A}_n, \Box\mathfrak{B}$ が K で正しくない

と仮定すると, ある $w \in W$ に対し, $V(\neg\Box\mathfrak{A}_i, w) = \text{f}$ ($i=1, \dots, n$) および $V(\Box\mathfrak{B}, w) = \text{f}$ したがって, $V(\Box\mathfrak{B}, w) = \text{f}$ より wRw' なるある w' に対して

$$V(\mathfrak{B}, w') = \text{f}$$

$V(\neg\Box\mathfrak{A}_i, w) = \text{f}$ ($i=1, \dots, n$) より $V(\Box\mathfrak{A}_i, w) = \text{t}$ ($i=1, \dots, n$) であるから wRw'' なる任意の w'' で, R の推移性から

$$V(\Box\mathfrak{A}_i, w'') = \text{t} \quad (i=1, \dots, n)$$

したがって, wRw' なるある w' で

$$V(\Box\mathfrak{A}_i, w') = \text{t} \quad (i=1, \dots, n) \quad \text{かつ} \quad V(\mathfrak{B}, w') = \text{f}$$

$$V(\neg\Box\mathfrak{A}_i, w') = \text{f} \quad (i=1, \dots, n) \quad \text{かつ} \quad V(\mathfrak{B}, w') = \text{f}$$

となるから Sequence $\neg\Box\mathfrak{A}_1, \dots, \neg\Box\mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}$ は正しくないことになり仮定に反する。ゆえに K は任意の **S4** モデルであったから $(\Box)$ は妥当性を保存する。

(iii) $(\neg\Box)$ の場合: Γ, A を一つの Sequence としてそれらを $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$ とする。Sequence $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n, \neg\mathfrak{B}$ は K で正しいと仮定する。 $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n, \neg\mathfrak{B}$ を正しくないと仮定すると, ある $w \in W$ に対し

$$V(\mathfrak{A}_i, w) = \text{f} \quad (i=1, \dots, n) \quad \text{および} \quad V(\neg\Box\mathfrak{B}, w) = \text{f}$$

となる。 $V(\neg\Box\mathfrak{B}, w) = \text{f}$ より

$$V(\Box\mathfrak{B}, w) = \text{t}$$

したがって, wRw' なるすべての w' で

$$V(\mathfrak{B}, w') = \text{t}$$

$$V(\neg\mathfrak{B}, w') = \text{f}$$

ゆえに R の反射性から

$$V(\mathfrak{A}_i, w) = \text{f} \quad (i=1, \dots, n) \quad \text{および} \quad V(\neg\mathfrak{B}, w) = \text{f}$$

これは K で $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n, \neg\mathfrak{B}$ が正しいという仮定に反する。よって $(\neg\Box)$ は妥当性を保存する。

Q. E. D.

この定理からただちに体系 **L-S4** が無矛盾 (consistent) であることがわかる。なぜなら, も

し $\vdash \mathcal{A}$ かつ $\vdash \neg \mathcal{A}$ であるならば $\vdash \mathcal{A}$ かつ $\vdash \neg \mathcal{A}$ となる。よって $\mathcal{A}$ と $\neg \mathcal{A}$ とが共に妥当となるがこれは不可能である。したがって $\mathcal{A}, \neg \mathcal{A}$ が共に証明可能となることはない。

定理 2 の逆, すなわち論理式 $\mathcal{A}$ が任意の Kripke モデルで正しければ $\mathcal{A}$ は $L-S4$ で証明可能であることの証明は Henkin 証明に従う Hughes and Cresswell⁹⁾, 小野⁸⁾の方法でほとんど同様に行なうことができるのでここでは証明を省略する。

定理 3 (Completeness) 体系 $L-S4$ は完全である。

その他に公理系の完全性の証明にはいろいろな方法が考えられている。例えば論理式の妥当性判定手続きから直接, 論理式の証明を構成する方法⁹⁾, 論理体系の固有の性質を利用して証明する方法¹⁰⁻¹¹⁾などがある。しかし様相論理の完全性定理の Henkin 証明の過程からは一階述語論理の Skolem-Löwenheim の定理に対応する次の重要な結果も産み出される。

定理 4 $L-S4$ は有限モデル特性 (finite model property) をもつ。

定義 10 様相論理式の degree を次のように定義する,

- 1) 命題変数の degree は 0
- 2) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の degree をそれぞれ m および n とするとき
 - $\neg \mathcal{A}$ の degree は m
 - $\Box \mathcal{A}$ の degree は $m+1$
 - $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ の degree は $\max(m, n)$

次に体系 $L-S4$ の任意の論理式がこの体系で証明可能であるか否かを有限回の手順で判定する具体的な手続きを次の定理の証明において与える。

定理 5 (Decidability) 体系 $L-S4$ は決定可能である。

証明 次の手続きが決定手続きになっていることを示せば十分である。決定手続きは逆向き (backward) に行なわれるものとし, 最初に証明すべき Sequence を要素とする集合 S を作る。二重否定が現われたときはいつでも取り除いておくものとする (推論図式 ($\neg\neg$) の適用)。

ステップ 1. ($\wedge$) が適用可能な S の要素がなければステップ 2 へ, そうでなければ適用可能なすべての $\Gamma, \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \Delta$ という形をした Sequence を S から除去し $\Gamma, \mathcal{A}, \Delta$ および $\Gamma, \mathcal{B}, \Delta$ のうち公理でないもののみを S に加える。

ステップ 2. ($\neg \wedge$) が適用可能な S の要素がなければステップ 3 へ, そうでなければ適用可能なすべての $\Gamma, \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}), \Delta$ という形をした Sequence を S から除去し $\Gamma, \neg \mathcal{A}, \neg \mathcal{B}, \Delta$ が公理でなければ S に加えステップ 1 へ。

ステップ 3. ($\Box$) が適用可能な S の要素がなければステップ 4 へ, そうでなければ適用可能なすべての $\neg \Box \Gamma, \Box \mathcal{A}, \neg \Box \Delta$ という形をした Sequence を S から除去し, $\neg \Box \Gamma, \mathcal{A}, \neg \Box \Delta$ が公理でなければ S に加えステップ 1 へ。

ステップ 4. ($\neg \Box$) が適用可能な S の要素がなければステップ 5 へ, そうでなければ適用可能なすべての $\Gamma, \neg \Box \mathcal{A}, \Delta$ という形をした Sequence を S から除去し $\Gamma, \neg \mathcal{A}, \Delta$ が公理でなければ S に加えステップ 1 へ。

ステップ 5. S が空であれば証明可能, S が空でなければ証明可能ではない。

この手続きが決定手続きになっていることは次の二点を示すことによって証明される,

- (i) 上の手続きは有限回のステップで停止する。
- (ii) 推論図式の適用の順序は証明可能性の判定に対する制限とはならない。

(i) については, ($\wedge$) が適用可能な Sequence には $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ という形の部分論理式は有限個し

が含まれていないので S の要素の数は有限である。また $(\Box), (\neg\Box)$ が適用されたとき 様相論理式の degree は必ず 1 だけ減少する。したがって上の手続きは有限回のステップで停止する。

(ii) については、例えば一つの注目している Sequence が $\Gamma, \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \neg\Box\mathfrak{A}, \Delta$ であったとすれば $(\wedge)$ と $(\neg\Box)$ の適用の順序に関わらず Sequence $\Gamma, \mathfrak{A}, \neg\Box\mathfrak{A}, \Delta$ と $\Gamma, \mathfrak{B}, \neg\Box\mathfrak{A}, \Delta$ が得られる。他の場合も同様のことが言える。 Q. E. D.

今後この定理で与えられた決定手続きを **DL-S4** と呼ぶことにする。次に **L-S4** と **DL-S4** を基礎にして、他の様相論理体系 $T, S5$ (付録参照)⁶⁾ と同等な公理系 **L-T**, **L-S5** とそれらの決定手続きについて考える。

T と同等な公理系 **L-T** と対応する決定手続き **DL-T** を得るには **L-S4** の $(\Box)$ と **DL-S4** のステップ 3 を

$$\frac{\neg\Gamma, \mathfrak{A}, \neg\Delta}{\neg\Box\Gamma, \Box\mathfrak{A}, \neg\Box\Delta}$$

で置き換えればよい。

$S5$ に対しては Cut Elimination Theorem が成立しないために単に **L-S4** の推論図式を他のもので置き換えるだけでは不十分である。しかしながら $S5$ の任意の論理式に対しこれと同値でたかだか degree 1 の論理式が存在する^{6),9)} ことと、 $S5$ の各推論図式に現われる論理式がすべてたかだか degree 1 のものに限るように制限された $S5$ では Cut Elimination Theorem が成立する¹⁾ ということから、 $S5$ を **L-S4** のように公理化することができ、対応する決定手続き **DL-S5** を与えることができる。そのためには **L-S4** の $(\Box)$ と **DL-S4** のステップ 3 を

$$\frac{\neg\Box\Gamma, \Box\Delta, \mathfrak{A}}{\neg\Box\Gamma, \Box\Delta, \Box\mathfrak{A}}$$

で置き換えればよい。

このようにしてできた体系についても今までの特徴づけ定理はすべて成り立つ。また Brower の様相命題論理体系 B では Cut Elimination Theorem が成立しない¹²⁾ ので我々のような公理化は与えることはできない。

今までの諸体系は論理記号として $\neg, \wedge, \Box$ だけに制限されていたが、 $\vee, \supset, \equiv, \rightarrow$ をも許した同等な体系を得るにはこれらの論理記号に関する推論図式を加えればよい。また決定手続きはこれらの論理記号に関する推論図式の適用可能性のステップを今までの決定手続きに加えることによって得られる。

4. 証 明 例

(i) $\vdash\Box\mathfrak{A}\rightarrow\Box\Diamond\Box\mathfrak{A}$ の **L-S4** における証明

$$\begin{array}{l} \frac{}{\neg\Box\mathfrak{A}, \Box\mathfrak{A}} \text{ (}\neg\Box\text{)} \\ \frac{}{\neg\Box\mathfrak{A}, \neg\Box\neg\Box\mathfrak{A}} \text{ (}\Box\text{)} \\ \frac{}{\neg\Box\mathfrak{A}, \Box\neg\Box\neg\Box\mathfrak{A}} \text{ (}\wedge\text{)} \\ \frac{}{\neg(\Box\mathfrak{A} \wedge \neg\Box\neg\Box\neg\Box\mathfrak{A})} \text{ (}\Box\text{)} \\ \hline \Box\neg(\Box\mathfrak{A} \wedge \neg\Box\neg\Box\neg\Box\mathfrak{A}) \end{array}$$

(ii) $\vdash \text{Sometime At (End)} \wedge \text{Always (At (End)} \supset \mathfrak{A}) \supset \text{Sometime (At (End)} \wedge \mathfrak{A})$

Always と Sometime をそれぞれ、 $\Box$ と $\Diamond$ のように interdefinable な様相概念とすれば上の論

理式の **L-S4** の証明図は次のようになる。

$\neg \text{At}(\text{End}), \neg \wp, \text{At}(\text{End})$	$\neg \text{At}(\text{End}), \neg \wp, \wp$	
$\neg \text{At}(\text{End}), \text{At}(\text{End}), \text{At}(\text{End}) \wedge \wp$	$\neg \text{At}(\text{End}), \neg \wp, \text{At}(\text{End}) \wedge \wp$	($\wedge$)
$\neg \text{At}(\text{End}), \text{At}(\text{End}) \wedge \neg \wp, \text{At}(\text{End}) \wedge \wp$		($\wedge$)
$\neg \text{At}(\text{End}), \neg \text{Always} \neg (\text{At}(\text{End}) \wedge \neg \wp), \text{At}(\text{End}) \wedge \wp$		($\neg \square$)
$\neg \text{At}(\text{End}), \neg \text{Always} \neg (\text{At}(\text{End}) \wedge \neg \wp), \neg \text{Always} \neg (\text{At}(\text{End}) \wedge \wp)$		($\neg \square$)
$\text{Always} \neg \text{At}(\text{End}), \neg \text{Always} \neg (\text{At}(\text{End}) \wedge \neg \wp), \neg \text{Always} \neg (\text{At}(\text{End}) \wedge \wp)$		($\square$)
$\neg (\neg \text{Always} \neg \text{At}(\text{End}) \wedge \text{Always} \neg (\text{At}(\text{End}) \wedge \neg \wp) \wedge \text{Always} \neg (\text{At}(\text{End}) \wedge \wp))$		($\neg \wedge$)

この論理式は停止性についての表明である $\text{Sometime At}(\text{End})$ と弱正当性についての表明である $\text{Always} (\text{At}(\text{End}) \supset \wp)$ が成り立つならば強正当性についての表明 $\text{Always} (\text{At}(\text{End}) \wedge \wp)$ が成立することを意味している¹³⁾。

5. あ と が き

これまで様相命題論理について述べてきたが、様相命題論理は一階述語論理に比べて個体変数を全く含んでいないために表現能力が極めて制限されているように思われるが、Kripke モデルの W を状態の集合と考えることにより様相論理式の中に陽に表わすことなくある意味の個体概念を表現することができる。そしてこのことは AI, MTC などにおいて対象の表現を簡単化できる可能性を暗示している。

定理5で与えた証明可能性決定手続きは、証明の過程でモデル (W, R, V) を必要とする様相論理のための Cancellation アルゴリズム¹⁰⁾や Tableau システム¹¹⁾、関係 R の代りに述語を導入することによって様相論理式を一階述語論理の言語に翻訳し 導出原理で証明する Morgan の方法¹⁴⁾に比べて次の点ですぐれていることがわかる、

- 1) 計算機での自動証明のプログラムが簡単である。
 - 2) 証明が簡単で証明の過程を理解するのが容易である。
 - 3) 複雑な論理式に対しても証明の複雑さはそれほど増加しない。
- 1) については、すでに一階述語論理に対して類似のシステムが実現しているが¹⁵⁾ 少しいの変更で **DL-T**, **-S4**, **-S5** の決定手続きとすることができる。人工知能に関する諸問題、アルゴリズムの諸性質について議論するとき 2), 3) は重要な要素となってくる。

さらに本論文で取られた様相命題論理の公理化の方法は様相述語論理や他の様相概念を含む非古典論理の公理化を行なうさいにも有益であるばかりでなく公理化されたそれらの論理が上記の性質をもつことも期待される。

謝 辞

日頃御討論頂いている情報システム工学講座宮本衛市助教授、桃内佳雄助手に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) J. McCarthy and P. J. Hays: Some philosophical problems from the standpoint of artificial intelligence, Machine Intelligence 4 (1969).

- 2) V. R. Pratt: Semantical considerations on Floyd-Hoare logic, 17th Ann. IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (1976).
- 3) M. Sato: A study of Kripke-type models for some modal logics by Gentzen's sequential method, RIMS-206, Kyoto University (1976).
- 4) 沢村 一, 前田 隆: 様相論理の証明手続きについて, 電子通信学会情報部門全国大会講演論文集 (1977).
- 5) T. M. V. Janssen and P. van Emde Boas: The expressive power of intensional logic in the semantics of programming languages, Lecture Notes in Computer Science, MFCS (1977).
- 6) 松本和夫: 数理論理学, 共立講座現代の数学 1, 共立出版 (1970).
- 7) 島内剛一: 証明のプログラミング, 数学第 15 巻 (1963).
- 8) 小野寛斯: クリプケ・モデルとは, 直観主義論理から様相論理へ上下, 数学セミナー (1976).
- 9) G. E. Hughes and M. J. Cresswell: An introduction to modal logic, Methuen and Co. Ltd. (1968).
- 10) D. Snyder: Modal logic and its applications, New York, Van Nostrand Reinhold (1971).
- 11) M. Fitting: Tableau method of proof for modal logics, Notre Dame Journal of Formal Logic 8 (1967).
- 12) 内田種臣: ブラウアーの命題様相体系 B にかんする幾つかの問題, 科学哲学 10, 日本科学哲学会編 (1977).
- 13) R. M. Burstall: Program Proving as hand simulation with a little induction, IFIP (1974).
- 14) C. G. Morgan: Methods for automated theorem proving in nonclassical logics, IEEE Transactions on Computers, 8 (1976).
- 15) 沢村 一, 前田 隆, 橋谷敏郎, 河口至商: 証明のプログラミングについて, 第 7 回計測・制御に関する北海道研究集会論文集 (1974).

付 録

Gentzen の命題論理体系 LK を拡大して得られる様相命題論理体系 $T, S4, S5^6)$

(i) 構造に関する推論図式

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Gamma \rightarrow \theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \theta} \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \theta}{\Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{D}} \\
 \frac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \theta} \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{D}}{\Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{D}} \\
 \frac{\mathcal{A}, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \Gamma \rightarrow \theta}{\mathcal{A}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \theta} \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \mathcal{A}}{\Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathcal{A}} \\
 \frac{\Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{D} \quad \mathfrak{D}, \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}}{\Gamma, \mathcal{A} \rightarrow \theta, \mathcal{A}} \text{ (Cut)}
 \end{array}$$

(ii) 論理記号に関する推論図式

$$\begin{array}{ll}
 (\neg\text{-右}) \frac{\mathfrak{U}, \Gamma \rightarrow \theta}{\Gamma \rightarrow \theta, \neg \mathfrak{U}} & (\neg\text{-左}) \frac{\Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{U}}{\neg \mathfrak{U}, \Gamma \rightarrow \theta} \\
 (\wedge\text{-右}) \frac{\Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{U} \quad \Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{U} \wedge \mathfrak{B}} & (\wedge\text{-左}) \frac{\mathfrak{U}, \Gamma \rightarrow \theta}{\mathfrak{U} \wedge \mathfrak{B}, \Gamma \rightarrow \theta} \\
 & (\wedge\text{-左}) \frac{\mathfrak{B}, \Gamma \rightarrow \theta}{\mathfrak{U} \wedge \mathfrak{B}, \Gamma \rightarrow \theta} \\
 (\vee\text{-右}) \frac{\Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{U}}{\Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{U} \vee \mathfrak{B}} & (\vee\text{-左}) \frac{\mathfrak{U}, \Gamma \rightarrow \theta \quad \mathfrak{B}, \Gamma \rightarrow \theta}{\mathfrak{U} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \rightarrow \theta} \\
 (\vee\text{-右}) \frac{\Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{U} \vee \mathfrak{B}} & \\
 (\supset\text{-右}) \frac{\mathfrak{U}, \Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{U} \supset \mathfrak{B}} & (\supset\text{-左}) \frac{\Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{U} \quad \mathfrak{B}, \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}}{\mathfrak{U} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \mathcal{A} \rightarrow \theta, \mathcal{A}}
 \end{array}$$

$$(\Box\text{-右}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}}{\Box \Gamma \rightarrow \Box \mathfrak{A}} \quad (T) \\ \frac{\Box \Gamma \rightarrow \mathfrak{A}}{\Box \Gamma \rightarrow \Box \mathfrak{A}} \quad (S4) \\ \frac{\Box \Gamma \rightarrow \Box \theta, \mathfrak{A}}{\Box \Gamma \rightarrow \Box \theta, \Box \mathfrak{A}} \quad (S5) \end{array} \right.$$

$$(\Diamond\text{-右}) \frac{\Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{A}}{\Gamma \rightarrow \theta, \Diamond \mathfrak{A}}$$

$$(\Box\text{-左}) \frac{\mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \theta}{\Box \mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \theta}$$

$$(\Diamond\text{-左}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathfrak{A} \rightarrow \theta}{\Diamond \mathfrak{A} \rightarrow \Diamond \theta} \quad (T) \\ \frac{\mathfrak{A} \rightarrow \Diamond \theta}{\Diamond \mathfrak{A} \rightarrow \Diamond \theta} \quad (S4) \\ \frac{\mathfrak{A}, \Diamond \Gamma \rightarrow \Diamond \theta}{\Diamond \mathfrak{A}, \Diamond \Gamma \rightarrow \Diamond \theta} \quad (S5) \end{array} \right.$$