



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	円環座標によるヘルムホルツ方程式の解析解の数値計算コードと数表
Author(s)	関, 正治; 加地, 郁夫; 本間, 利久
Citation	北海道大學工學部研究報告, 88, 23-40
Issue Date	1978-08-10
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41484
Type	departmental bulletin paper
File Information	88_23-40.pdf



円環座標によるヘルムホルツ方程式の 解析解の数値計算コードと数表

関 正 治* 加 地 郁 夫* 本 間 利 久**

(昭和 52 年 12 月 26 日受理)

A Program Code and Tables of Analytical Solutions of the Helmholtz Equation for Toroidal Coordinates

Masaharu SEKI*, Ikuo KAJI* and Toshihisa HONMA**

(Received December 26, 1977)

Abstract

The Helmholtz equation is solved in toroidal coordinates. The solutions are useful for the analyses of a toroidal plasma or other problems to be solved in the toroidal coordinates. The authors programmed a numerical calculating FORTRAN code for the solutions, using the representation by series in the Legendre functions. The solutions of the Helmholtz equation for the toroidal coordinates were computed by the FORTRAN code and tabulated.

1. 緒 言

円環座標¹⁾によって表わされたヘルムホルツ方程式の解析解は、変数分離によっては求めることができないが、無限連立の常微分方程式系に変形する手法²⁾によれば、求めることができる。ウェストン^{2,3)}は、この手法を開発してヘルムホルツ方程式を解き、円環波動関数を作り上げた。円環波動関数は、円環状湧源からの輻射の条件を満足し、円環外部の問題に対する解を表わす。

円環座標によるヘルムホルツ方程式の解析解は、円環状形態を取る工学的問題を取扱うときに便利であるにも係わらず、円環内部の問題に対する解は未だ求められていない上に、円環外部の解の数表さえも皆無である。そこで我々は、円環内部の解を導出し、内部解と外部解の FORTRAN による数値計算コードを開発して、電子計算機によって数値計算を行なった。

外部解は、ルジャンドル陪関数 $P_\nu^{\mu}(z)$ の二重級数であり、内部解は、外部解の $P_\nu^{\mu}(z)$ を $Q_\nu^{\mu}(z)$ で置換えた形をしている。これらの解は極めて複雑な無限級数で表わされる上に、 $P_\nu^{\mu}(z)$ 、 $Q_\nu^{\mu}(z)$ はガウスの超幾何級数によって与えられるので、計算は非常に繁雑である。

§3 に、円環座標によるヘルムホルツ方程式の解を、§4 に数値計算コード及び数表を、§5 に数値計算コードの使用法を示した。

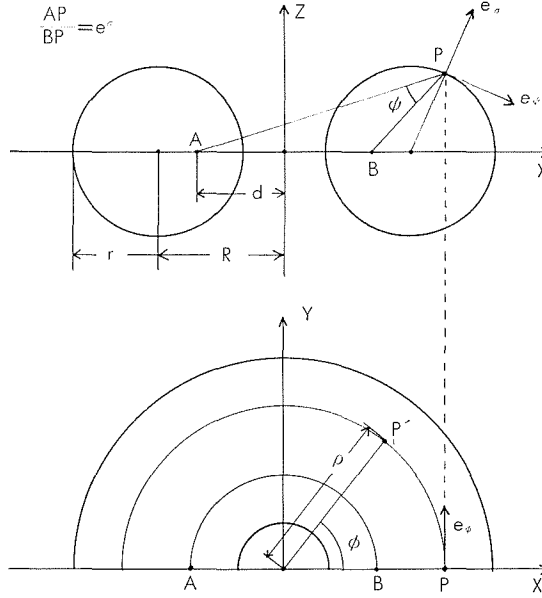
2. 円環座標とルジャンドル陪関数

空間の任意の点を、図 1 に示すような円環座標^{1,4)}によって表わす。 e_σ 、 e_ϕ 、 e_ρ は、それぞれ点 P における σ 、 ϕ 、 ρ 接線方向の単位ベクトルで右手直交系を作る様に取りられる。円環座標は直交曲線座標であるから、その計量テンソルは

$$h_1 = h_2 = d/g, \quad h_3 = d \sinh \sigma/g \quad (2.1)$$

* 電気工学科系統工学講座

** 情報工学専攻

図1 円環座標系 (σ, ψ, ϕ)

で与えられる。さらに主軸からの距離 $\rho = h_3$ が得られる。ここで $g = \cosh \sigma - \cos \psi$ である。A, B を固定点としたアポロニウスの円上で、 $d^2 = R^2 - r^2$ が成り立つから

$$\cosh \sigma = R/r, \quad \sinh \sigma = d/r \quad (2.2)$$

が得られる。 R/r をアスペクト比という。

ルジャンドル陪関数 $P_\nu^m(z)$, $Q_\nu^m(z)$ の特別な場合 $P_{n-1/2}^m(z)$, $Q_{n-1/2}^m(z)$ を円環関数^{1,4)}と言い、次式で表わされる。

$$P_{n-1/2}^m(z) = \frac{\Gamma(n+m+1/2)}{m! \Gamma(n-m+1/2)} \frac{(z+1)^{n-1/2}}{2^{n-1/2}} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{m/2} F\left(\frac{1}{2}-n, \frac{1}{2}+m-n, m+1; \frac{z-1}{z+1}\right) \quad (2.3)$$

$$P_{n-1/2}^m(z) = \frac{(-1)^m}{\pi^{3/2} (2z)^{1/2}} \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{m/2} \left[-\frac{1}{(2z)^n} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{G_{n,r}^m(z)}{(r+n)!} \right. \\ \times \left\{ 2 \log(2z) - 2\Phi\left(2r+m+n+\frac{1}{2}\right) + \Phi(n+r+1) + \Phi(r+1) \right\} \\ \left. + (-2z)^n \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r (n-r-1)! G_{n,r}^m(z) \right] \quad (2.4)$$

$$Q_{n-1/2}^m(z) = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-m+1/2)} (z^2-1)^{-1/4} P_{m-1/2}^n(z') \quad (2.5)$$

ここで、 F はガウスの超幾何級数、 Γ はガンマ関数、 Φ はポリガンマ関数 $\Phi(z) = d(\log \Gamma(z))/dz$ であり、 $G_{n,r}^m(z) = \Gamma(2r+m+n+1/2)/[\Gamma(r)(2z)^{2r}]$, $z' = z/\sqrt{z^2-1}$, $z = \cosh \sigma$ である。 m, n, r は零又は整数である。(2.3) 式は $z=1$ のまわりの、(2.4) 式は $z=\infty$ のまわりの級数解である。(2.3)~(2.5) 式を組合せると広範囲の空間に渡って数値計算が可能となる。

μ, ν が整数のときのルジャンドル陪関数 $P_n^\mu(z)$, $Q_n^\mu(z)$ ¹⁾ は、次式で表わされる。

$$P_n^\mu(z) = \frac{(n+m)!}{m! (n-m)!} \left(\frac{z+1}{2} \right)^n \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{m/2} F\left(-n, m-n, m+1; \frac{z-1}{z+1}\right) \quad (2.6)$$

$$Q_n^\mu(z) = \frac{(-2)^m (m+n)! \pi^{1/2}}{\Gamma(n+3/2)} \frac{(z^2-1)^{m/2}}{(z+\sqrt{z^2-1})^{m+n+1}} F\left(m+\frac{1}{2}, m+n+1, n+\frac{3}{2}; \frac{1}{(z+\sqrt{z^2-1})^2}\right) \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
Q_n^m(z) = & \frac{1}{2} (-1)^m (m-1)! \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{m/2} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(-n)_r (n+1)_r}{r! (m+1)_r} \left(\frac{z-1}{2} \right)^r \\
& + \frac{1}{2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{(z^2-1)^{m/2}}{2^m m!} \sum_{r=0}^{n-m} \frac{(n+m+1)_r (n-m)_r}{r! (m+1)_r} \\
& \times \left[\log \frac{z+1}{z-1} + \phi(r+1) - \phi(n-m+1) \right] \left(\frac{1-z}{2} \right)^r \\
& + \frac{1}{2} \frac{(n+m)!}{(n-m)! m!} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{-m/2} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-n)_r (n+1)_r}{r! (m+1)_r} [\phi(r+m+1) - \phi(n+m+1)] \left(\frac{1-z}{2} \right)^r
\end{aligned} \tag{2.8}$$

(2.7) 式は $z=\infty$ のまわりの, (2.8) 式は $z=1$ のまわりの級数解である。(2.6)～(2.8) 式を組合せると, 広範囲の空間に渡って数値計算が可能となる。

一度に多くのルジャンドル関数の値を求めるとき, 次の漸化式⁵⁾を使うと計算時間が短縮される。

$$(\nu - \mu + 1)P_{\nu+1}^{\mu}(z) - (2\nu + 1)zP_{\nu}^{\mu}(z) + (\nu + \mu)P_{\nu-1}^{\mu}(z) = 0 \tag{2.9}$$

$$P_{\nu+2}^{\mu}(z) + 2(\mu + 1)z(z^2 - 1)^{-1/2}P_{\nu+1}^{\mu}(z) + (\mu - \nu)(\nu + \mu + 1)P_{\nu}^{\mu}(z) = 0 \tag{2.10}$$

また, $Q_n^{\mu}(z)$ に関しても同様な関係式が成り立つ。

3. 円環座標によるヘルムホルツ方程式の解析解

ヘルムホルツ方程式

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0 \tag{3.1}$$

を, 円環座標に変換すれば

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(h_3 \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(h_3 \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right) + \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \right] + k^2 \Psi = 0 \tag{3.2}$$

となる。(3.2) 式を円環状湧源からの輻射の条件のもとで解けば, 円環波動関数が得られる³⁾。これは $P_{\nu}^{\mu}(z)$ の二重級数で表わされ, 円環外部の問題に対する解を表わす。円環内部の問題に対する解は, 外部解の $P_{\nu}^{\mu}(z)$ を $Q_{\nu}^{\mu}(z)$ で置換えた形をしている。

$\omega_{\nu}^{\mu}(z) = P_{\nu}^{\mu}(z)$ あるいは $Q_{\nu}^{\mu}(z)$ と置くと, ヘルムホルツ方程式 (3.2) の解は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
\Psi_{eN}^m(\omega) &= e^{im\phi} S_N^M(\omega) \\
\Psi_{oN}^m(\omega) &= e^{im\phi} T_N^M(\omega) \\
\text{但し, } \omega &\equiv \omega_{\nu}^{\mu}(z) \\
M &= |m|; 0, 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \right\} \tag{3.3}$$

ここで, S_N^M は

$$S_N^M(\omega) = \frac{\Gamma(N+M+1)\pi^{1/2}(-1)^M(kd)^N}{\Gamma(N-M+1)2^{(M+N)/2+1}g^{(M+N)/2}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(kd)^{2p}(-1)^p K_p^1}{2^p g^p} \tag{3.4}$$

によって与えられ, ϕ に関して偶関数である。ただし,

$$K_p^1 = \frac{1}{p! \Gamma(N+3/2+p)} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{M-N}{2} \right)_t \left(\frac{N+M+1}{2} \right)_t (z^2-1)^{t/2}}{t! g^t} \omega_{p+(N+M)/2}^{-M-t}(z) \tag{3.5}$$

である。 N は, $M+2l$ 又は $-M-2l-1$ であり, l は正整数か又は零である。 T_N^M は ϕ についての奇関数であり,

$$T_N^M(\omega) = \frac{\Gamma(N+M+1)\pi^{1/2}(-1)^M \sin \phi(kd)^N}{\Gamma(N-M+1)2^{(N+M+3)/2}g^{(M+N+1)/2}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(kd)^{2p}(-1)^p K_p^2}{2^p g^p} \tag{3.6}$$

によって与えられる。ただし、

$$K_p^2 = \frac{1}{p! \Gamma(N+3/2+p)} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{M-N+1}{2}\right)_t \left(\frac{M+N}{2}+1\right)_t (z^2-1)^{t/2}}{t! g^t} \omega_{p+(M+N-1)/2}^{-M-t}(z) \quad (3.7)$$

である。 N は、 $M+2l+1$ 又は $-M-2l-2$ であり、 l は正整数か又は零である。

円環波動関数 $S_N^M(P)$, $T_N^M(P)$ は、次の様に積分形でも表現できる³⁾。

$$S_N^M(P) = \frac{\Gamma(N+M+1)(-2)^{-M} \pi^{-1/2}}{\Gamma(N-M+1)\Gamma(1/2+M)} \int_0^\pi F\left(\frac{M-N}{2}, \frac{N+M+1}{2}, \frac{1}{2}+M; Z\right) j_N(X) Z^{M/2} (\sin t)^M dt \quad (3.8)$$

$$T_N^M(P) = \frac{\Gamma(N+M+1)(-2)^{-M} \sin \phi (z^2-1)^{-1/2}}{\Gamma(N-M+1)\pi^{1/2}\Gamma(M+1/2)} \int_0^\pi F\left(\frac{M-N+1}{2}, \frac{M+N}{2}+1, \frac{1}{2}+M; Z\right) j_N(X) Z^{(M+1)/2} (\sin t)^{M-1} dt \quad (3.9)$$

ここで、 $j_N(X)$ は球ベッセル関数であり、

$$X = kd 2^{1/2} \left[\frac{z + \sqrt{z^2-1} \cos t}{z - \cos \phi} \right]^{1/2} \quad (3.10)$$

$$Z = \frac{(z^2-1)(\sin t)^2}{2(z - \cos \phi)[z + \sqrt{z^2-1} \cos t]} \quad (3.11)$$

である。

4. 数 値 計 算

ヘルムホルツ方程式の解 (3.3) 式は、 $\omega_v^u = P_v^u$ のとき円環外部の解を、 $\omega_v^u = Q_v^u$ のとき円環内部の解を表わす。従って $\Psi_{vN}^m(\omega)$ あるいは $\Psi_{oN}^m(\omega)$ は外部解と内部解を合せて四種類の解を持つが、二種類を選んで独立解として採用すればよい。これらの四種類の解は、 $S_N^M(\omega)$, $T_N^M(\omega)$ によって表わされる。

$S_N^M(\omega)$, $T_N^M(\omega)$ の値は、ルジャンドルの陪関数 $P_v^u(z)$, $Q_v^u(z)$ を (3.5), (3.7) 式に代入し、さらにその式を (3.4), (3.6) 式に代入することによって計算される。円環関数 $P_{n-1/2}^m(z)$, $Q_{n-1/2}^m(z)$ の計算に当っては、 $z \geq 4.0$ のとき、 $P_{n-1/2}^m(z)$ に (2.4) 式が $Q_{n-1/2}^m(z)$ に (2.3), (2.5) 式が適用され、 $z < 4.0$ のとき、 $P_{n-1/2}^m(z)$ に (2.3) 式が $Q_{n-1/2}^m(z)$ に (2.4), (2.5) 式が適用される。 $P_{n-1/2}^m(z)$ は (2.6) 式より計算される。 $Q_n^m(z)$ の計算に当っては、 $z \geq 1.2$ の場合は (2.7)

表 1 $S_N^M(\omega)$

ϕ (度)	$S_N^M(P); M=2, kd=5, z=2.5$				$S_N^M(Q); M=2, kd=5, z=2.5$			
	$N=M+2l$		$N=-M-2l-1$		$N=M+2l$		$N=-M-2l-1$	
	$l=0$	$l=4$	$l=0$	$l=4$	$l=0$	$l=4$	$l=0$	$l=4$
0	-6.274E-3	7.634E-3	-2.007E-2	9.552E+1	8.054E-2	6.786E-3	-1.292E-2	3.251E+2
30	-1.121E-2	-3.106E-2	-2.520E-2	-1.381E+2	6.863E-2	2.970E-3	1.619E-3	-1.216E+3
60	-1.046E-2	-5.488E-2	-5.048E-2	4.023E+2	4.688E-2	4.259E-4	4.151E-2	-3.993E+3
90	2.008E-2	-7.775E-3	-7.716E-2	-1.006E+3	3.063E-2	5.110E-5	9.367E-2	-3.226E+3
120	5.979E-2	5.232E-2	-8.040E-2	-2.382E+3	2.156E-2	9.251E-6	1.419E-1	7.231E+2
150	8.519E-2	6.709E-2	-7.171E-2	6.729E+3	1.726E-2	3.186E-6	1.747E-1	4.222E+3
180	9.318E-2	6.809E-2	-6.706E-2	1.507E+4	1.600E-2	2.226E-6	1.863E-1	5.452E+3

表2 $T_N^M(\omega)$

ϕ (度)	$T_N^M(P); M=2, kd=5, z=2.5$				$T_N^M(Q); M=2, kd=5, z=2.5$			
	$N=M+2l+1$		$N=-M-2l-2$		$N=M+2l+1$		$N=-M-2l-2$	
	$l=0$	$l=4$	$l=0$	$l=4$	$l=0$	$l=4$	$l=0$	$l=4$
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
30	1.108E-1	-4.197E-3	2.970E-2	4.696E+2	7.716E-2	4.473E-4	-3.828E-1	1.604E+3
60	2.287E-1	3.946E-6	1.068E-2	-1.706E+3	7.419E-2	8.998E-5	-7.081E-1	1.175E+3
90	2.932E-1	-5.014E-3	-7.157E-2	4.305E+3	4.457E-2	9.845E-6	-8.274E-1	-2.609E+3
120	2.490E-1	2.187E-4	-1.288E-1	5.708E+3	2.258E-2	1.269E-6	-6.970E-1	-4.345E+3
150	1.354E-1	1.193E-3	-9.668E-2	-3.902E+4	9.283E-3	2.226E-7	-3.895E-1	-2.679E+3
180	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

式が、 $z < 1.2$ の場合は (2.8) 式が適用される。また、一度に多数の $P_n^d(z)$, $Q_n^d(z)$ が必要であるから、漸化式 (2.10) が使われる。

$S_N^M(\omega)$, $T_N^M(\omega)$ の計算コードを、図2に示す。その計算コードによる数値計算例は、表1, 2に示されている。級数の打ち切誤差は全て 10^{-6} 程度である。計算コードの正否は、円環波動関数の積分表示式 (3.8), (3.9) を使って確かめることができる。

5. 数値計算プログラム・コードの使用法

本節では、§2, §3を参照しながら数値計算コードの使用法を説明する。

(a) DOUBLE PRECISION FUNCTION HMZSPQ (*WFIX, Z, PSI, P, Q, MAX, L, I, K*)

(3.4) 式の $S_N^M(\omega)$ を計算するプログラムである。 $WFIX=kd$, $Z=z$, $PSI=\phi$ であり、 P, Q はルジャンドル関数である。これらの実数型引数は全て倍精度であり、 P, Q は最低 MAX 個ずつのデメンションを取る必要がある。 $MAX=M+l+1$, $L=l$ である。 $I=1$ のとき $N=M+2l$, $I=-1$ のとき $N=-M-2l-1$ の $S_N^M(\omega)$ が計算され、 $K=1$ のとき $S_N^M(P)$, $K=2$ のとき $S_N^M(Q)$ が計算される。

(b) DOUBLE PRECISION FUNCTION HMZTPQ (*WFIX, Z, PSI, P, Q, MAX, L, I, K*)

(3.6) 式の $T_N^M(\omega)$ を計算するプログラムである。 $WFIX=kd$, $Z=z$, $PSI=\phi$ であり、 P, Q はルジャンドル関数である。これらの実数型引数は全て倍精度であり、 P, Q は最低 MAX 個ずつのデメンションを取る必要がある。 $MAX=M+l+1$, $L=l$ である。 $I=1$ のとき $N=M+2l+1$, $I=-1$ のとき $N=-M-2l-2$ の $T_N^M(\omega)$ が計算され、 $K=1$ のとき $T_N^M(P)$, $K=2$ のとき $T_N^M(Q)$ が計算される。

(c) SUBROUTINE TORUSI (*Z, M, NJ, P0, Q0, P, Q, L*)

(2.9) 式を用いて、固定した m, z に対して $n=0, 1, 2, \dots, n_j$ の $P_n^m(z)$, $Q_n^m(z)$ を倍精度で同時に求めるプログラムである。 $Z=z$, $M=m$, $NJ=n_j$, $P0=P_0^m(z)$, $Q0=Q_0^m(z)$, $P(1)=P_1^m(z)$, $Q(1)=Q_1^m(z)$, $P(2)=P_2^m(z)$, $Q(2)=Q_2^m(z)$, $\dots$, $P(NJ)=P_{n_j}^m(z)$, $Q(NJ)=Q_{n_j}^m(z)$ である。上に述べた実数型引数は全て倍精度であり、 P, Q は最低 NJ 個ずつデメンションを取る必要がある。 $L=1$ のとき $P_n^m(z)$, $L=2$ のとき $Q_n^m(z)$, $L=3$ のとき $P_n^m(z)$ と $Q_{n_j}^m(z)$ が計算される。なお、 m の値が負であっても計算可能である。

(d) SUBROUTINE TORUSJ (*Z, MI, N, P0, Q0, P, Q, I, L*)

(2.10) 式を用いて、固定した n, z に対して $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, m_j$ の $P_n^m(z), Q_n^m(z)$ を倍精度で同時に求めるプログラムである。 $Z=z, N=n, MJ=|m_j|, P0=P_n^0(z), Q0=Q_n^0(z), P(1)=P_n^{\pm 1}(z), Q(1)=Q_n^{\pm 1}(z), P(2)=P_n^{\pm 2}(z), Q(2)=Q_n^{\pm 2}(z), \dots, P(MJ)=P_n^{m_j}(z), Q(MJ)=Q_n^{m_j}(z)$ である。上に述べた実数型引数は全て倍精度であり、 P, Q は最低 MJ 個ずつデイメンションを取る必要がある。 $I=1$ のとき m の値は正、 $I=-1$ のときは負である。 $L=1$ のとき $P_n^m(z), L=2$ のとき $Q_n^m(z), L=3$ のとき $P_n^m(z)$ と $Q_n^m(z)$ が計算される。

(e) SUBROUTINE TORUS1 (**Z, M, NJ, P0, Q0, P, Q, L**)

(2.9) 式を用いて、固定した m, z に対して $n=0, 1, 2, \dots, n_j$ の $P_{n-1/2}^m, Q_{n-1/2}^m$ を倍精度で同時に求めるプログラムである。 $Z=z, M=m, NJ=n_j, P0=P_{n-1/2}^m(z), Q0=Q_{n-1/2}^m(z), P(1)=P_{n-1/2}^m(z), Q(1)=Q_{n-1/2}^m(z), P(2)=P_{n-1/2}^m(z), Q(2)=Q_{n-1/2}^m(z), \dots, P(NJ)=P_{n_j-1/2}^m(z), Q(NJ)=Q_{n_j-1/2}^m(z)$ である。上に述べた実数型引数は全て倍精度であり、 P, Q は少なくとも NJ 個ずつデイメンションを取る必要がある。 $L=1$ のとき $P_{n-1/2}^m(z), L=2$ のとき $Q_{n-1/2}^m(z), L=3$ のとき $P_{n-1/2}^m(z)$ と $Q_{n-1/2}^m(z)$ が計算される。なお、 m の値が負であっても計算可能である。

(f) SUBROUTINE TORUS2 (**Z, MJ, N, P0, Q0, P, Q, I, L**)

(2.10) 式を用いて、固定した n, z に対して $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, m_j$ の $P_{n-1/2}^m(z), Q_{n-1/2}^m(z)$ を倍精度で同時に求めるプログラムである。 $Z=z, N=n, MJ=|m_j|, P0=P_{n-1/2}^0(z), Q0=Q_{n-1/2}^0(z), P(1)=P_{n-1/2}^{\pm 1}(z), Q(1)=Q_{n-1/2}^{\pm 1}(z), P(2)=P_{n-1/2}^{\pm 2}(z), Q(2)=Q_{n-1/2}^{\pm 2}(z), \dots, P(MJ)=P_{n-1/2}^{m_j}(z), Q(MJ)=Q_{n-1/2}^{m_j}(z)$ である。上に述べた実数型引数は全て倍精度であり、 P, Q は少なくとも MJ 個ずつデイメンションを取る必要がある。 $I=1$ のとき m の値は正、 $I=-1$ のときは負である。 $L=1$ のとき $P_{n-1/2}^m(z), L=2$ のとき $Q_{n-1/2}^m(z), L=3$ のとき $P_{n-1/2}^m(z)$ と $Q_{n-1/2}^m(z)$ が計算される。

(g) DOUBLE PRECISION FUNCTION PINTG (**Z, MP, N**)

DOUBLE PRECISION FUNCTION QINTG (**Z, MQ, N**)

DOUBLE PRECISION FUNCTION PHALF (**Z, MP, N**)

DOUBLE PRECISION FUNCTION QHALF (**Z, MQ, N**)

上から順に、 $P_n^m(z), Q_n^m(z), P_{n-1/2}^m(z), Q_{n-1/2}^m(z)$ を計算するプログラムである。PINTG (Z, MP, N)= $P_n^m(z)$, QINTG (Z, MQ, N)= $Q_n^m(z)$, PHALF (Z, MP, N)= $P_{n-1/2}^m(z)$, QHALF (Z, MQ, N)= $Q_{n-1/2}^m(z)$, $Z=z, MP=MQ=m, N=n$ である。なお n の値は正でなければならないが、 m の値は負であっても計算できる。

(h) GFCTI (N, M, J) は、 $J=1$ で $\Gamma(n+m+1)/\Gamma(n-m+1)$ を、 $J=2$ で $\Gamma(n+m+1)$ を、 $J=3$ で $\Gamma(n+m+1)/\Gamma(n+1)$ を求めるプログラムである。GMFCT (Z, N, L, J) は、 $J=1, Z \approx 1.0$ で $z! \Gamma(n+l+1/2)/l! \Gamma(n-l+1/2)$ を、 $J=1, Z=1.0$ で $\Gamma(n+l+1/2)/\Gamma(n-l+1/2)$ を、 $J=2$ で $\Gamma(n-l+1/2)/\sqrt{\pi}$ を求めるプログラムである。DEGAM はポリガンマ関数を、GAUSS はガウスの超幾何級数を計算するプログラムである⁴⁾。GFCT は、 $z \geq 4$ の $P_{n-1/2}^m(z)$ を計算するときに使われる⁴⁾。

6. 結 言

本報告の数値計算コードは、Force-Free 磁場によるプラズマ平衡の解析に利用され、成功をおさめている。さらに安定性の問題に適用することも可能である。今後のプラズマ工学の発展に伴

って、ますます利用価値が増大するであろう。

最後に、利用計算機は北大大型計算機センター FACOM 230-75 であり、お世話を受けた計算機センターの方々に厚くお礼申し上げます。なお、この研究は昭和52年度文部省科学研究費の補助を受けて行なわれたことを付記して謝意を表します。

文 献

- 1) E. W. Hobson: *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics* (Chelsea Publishing Company, New York, 2nd Reprint, 1965) Chap. 5, 10.
- 2) V. H. Weston: Quart. Appl. Math. **15** (1957) 420.
- 3) V. H. Weston: Quart. Appl. Math. **16** (1958) 237.
- 4) 関 正治, 鬼頭正史, 加地郁夫, 本間利久: 北海道大学工学部研究報告 第82号 (昭和51年) 23頁.
- 5) 森口繁一, 宇田銈久, 一松 信: 数学公式 III (岩波書店, 1960) 126頁.

図2 数値計算コード

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION HMZSPQ(WFIX,Z,PSI,P,Q,MAX,L,I,K)
DOUBLE PRECISION P0,Q0,P,Q,PINTG,QINTG,PHALF,QHALF
DOUBLE PRECISION WFIX,Z,PSI,S,XN,ZN,T,D,VA,VB
DOUBLE PRECISION A,A0,A1,B,B0,B1,SUMK,SUMFQ,GFCTI,GMFCT
DIMENSION P(MAX),Q(MAX)
MAX=M+L+1
C      K=1 ; SP(M,N)
C      K=2 ; SQ(M,N)
C      I=1 ; N=M+2*L
C      I=-1 ; N=-M-2*L-1
S=Z-DCOS(PSI)
XN=-WFIX**2/(S*2.0D+00)
ZN=DSQRT(Z**2-1.0D+00)/S
B0=B1=1.0D+00
SUMFQ=0.0
M=MAX-L-1
A=DFLOAT(L)
B=DFLOAT(M+L)+0.5D+00
DO 20 IP=1,50
LP=IP-1
IF(I.EQ.1) GO TO 10
NP=LP-M-2*L
NNP=ABS(LP-L)
IF(K.EQ.2) GO TO 100
IF(MAX.GT.1) GO TO 101
P0=PHALF(Z,0,NNP)
P(1)=PHALF(Z,-1,NNP)
GO TO 11
100 CONTINUE
IF(MAX.GT.1) GO TO 101
Q0=QHALF(Z,0,NNP)
Q(1)=QHALF(Z,-1,NNP)
GO TO 11
101 CONTINUE
CALL TORUS2(Z,MAX,NNP,P0,Q0,P,Q,-1,K)
GO TO 11
10 CONTINUE
NP=LP+M+2*L+1
NNP=LP+M+L
IF(K.EQ.2) GO TO 200
IF(MAX.GT.1) GO TO 201
P0=PINTG(Z,0,NNP)
P(1)=PINTG(Z,-1,NNP)
GO TO 11
200 CONTINUE
IF(MAX.GT.1) GO TO 201
Q0=QINTG(Z,0,NNP)
Q(1)=QINTG(Z,-1,NNP)
GO TO 11

```

```

201 CONTINUE
CALL TORUSJ(Z,MAX,NNP,P0,W0,P,W,-1,K)
11 CONTINUE
IF(K.EQ.2) GO TO 300
IF(M.EQ.0) SUMK=P0
IF(M.GT.0) SUMK=P(M)
GO TO 301
300 CONTINUE
IF(M.EQ.0) SUMK=W0
IF(M.GT.0) SUMK=Q(M)
301 CONTINUE
IF(L.EQ.0) GO TO 13
AU=1.0D+00
DO 12 IR=1,L
D=IR
VA=A+D-1.0D+00
VB=B+D-1.0D+00
A1=A0*VA*VB*ZN/D
IF(K.EQ.1) SUMK=SUMK+A1*P(M+IR)
IF(K.EQ.2) SUMK=SUMK+A1*Q(M+IR)
AU=A1
12 CONTINUE
13 CONTINUE
SUMK=SUMK/GMFCT(Z,NP,0,2)
D=LP
IF(LP.GT.0) B1=B0*XN/D
SUMK=SUMK*B1
SUMPQ=SUMPQ+SUMK
T=SUMK/SUMPQ
IF(DABS(T).LT.1.0D-8) GO TO 30
B0=B1
20 CONTINUE
WRITE(6,6000) T,1
6000 FORMAT(1H,'HMZSP DOES NOT CONVERGE',2X,E10.3,2X,I3)
30 CONTINUE
IF(I.EQ.1) GO TO 31
A1=DSQRT(2.0D+00*S)/WFIX
HMZSPQ=A1**2*(L+1)/(2.0D+00*WFIX**M)
GO TO 32
31 CONTINUE
A1=WFIX/(2.0D+00*S)
HMZSPQ=A1**2*(M+L)*WFIX**L/2.0D+00
32 CONTINUE
IF(M/2-1-NE.EQ.0) HMZSPQ=-HMZSPQ
HMZSPQ=HMZSPQ*SUMPQ*GFCTI(M+2*L,M,1)
RETURN
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION HMZTPQ(WFIX,Z,PSI,P,W,MAX,L,1,K)
DOUBLE PRECISION P0,Q0,P,Q,PINTG,QINTG,PHALF,QHALF
DOUBLE PRECISION WFIX,Z,PSI,S,XN,ZN,T,D,VA,VB
DOUBLE PRECISION A,A0,A1,B,B0,B1,SUMK,SUMPQ,GMFCTI,GMFCT
DIMENSION P(MAX),Q(MAX)
C MAX=M+L+1
C K=1 ; TP(M,N)
C K=2 ; TQ(M,N)
C I=1 ; N=M+2*L+1
C I=-1 ; N=-M-2*L-2
S=Z-DCOS(PSI)
XN=-WFIX**2/(S**2.0D+00)
ZN=DSQRT(Z**2-1.0D+00)/S
B0=B1=1.0D+00
SUMPQ=0.0
M=MAX-L-1
A=DFLOAT(L)
H=DFLOAT(M+L)+1.5D+00
DO 20 IP=1,50
LP=IP-1
IF(I.EQ.1) GO TO 10
NP=LP-M-2*L-1
NNP=IABS(LP-L-1)
IF(K.EQ.2) GO TO 100
IF(MAX.GT.1) GO TO 101
PU=PHALF(Z,0,NNP)

```

```

P(1)=PHALF(Z,-1,NNP)
GO TO 11
100 CONTINUE
IF (MAX.GT.1) GO TO 101
Q0=QHALF(Z,0,NNP)
Q(1)=QHALF(Z,-1,NNP)
GO TO 11
101 CONTINUE
CALL TORUS2(Z,MAX,NNP,P0,W0,P,W,-1,K)
GO TO 11
11 CONTINUE
NP=LP+M+2*L+2
NNP=LP+M+L
IF (K.EW.2) GO TO 200
IF (MAX.GT.1) GO TO 201
P0=PRINTG(Z,0,NNP)
P(1)=PRINTG(Z,-1,NNP)
GO TO 11
200 CONTINUE
IF (MAX.GT.1) GO TO 201
Q0=QINTG(Z,0,NNP)
Q(1)=QINTG(Z,-1,NNP)
GO TO 11
201 CONTINUE
CALL TORUSJ(Z,MAX,NNP,P0,W0,P,W,-1,K)
11 CONTINUE
IF (K.EW.2) GO TO 300
IF (M.EW.0) SUMK=P0
IF (M.GT.0) SUMK=P(M)
GO TO 301
300 CONTINUE
IF (M.EW.0) SUMK=Q0
IF (M.GT.0) SUMK=Q(M)
301 CONTINUE
IF (L.EW.0) GO TO 13
AU=1.0D+00
DO 12 IR=1,L
D=IR
VA=A+D-1.0D+00
VB=B+D-1.0D+00
A1=A0*VA*VB*Zn/D
IF (K.EW.1) SUMK=SUMK+A1*P(M+IR)
IF (K.EW.2) SUMK=SUMK+A1*Q(M+IR)
AU=A1
12 CONTINUE
13 CONTINUE
SUMK=SUMK/GMFCT(Z,NP,0,2)
D=LP
IF (LP.GT.0) B1=B0*ZN/D
SUMK=SUMK*B1
SUMPD=SUMPD+SUMK
T=SUMK/SUMPD
IF (DABS(T).LT.1.0D-8) GO TO 30
Q0=B1
20 CONTINUE
WRITE(6,6000) T,I
6000 FORMAT(1H,'HMZSP DOES NOT CONVERGE',2X,E10.3,2X,I3)
30 CONTINUE
IF (I.EW.1) GO TO 31
A1=DSORT(Z,0D+00*S)/WFIX
HMZTPW=A1**((2*L+1)/(2.0D+00*WFIX**((M+1)))
GO TO 32
31 CONTINUE
A1=WFIX/(Z,0D+00*S)
HMZTPW=A1**((M+1)*WFIX*L/2.0D+00)
32 CONTINUE
IF (M/2-INT(M/2).NE.0) HMZSPW=-HMZSPW
HMZTPW=HMZTPW*SUMPD*GMFCT((M+2*L+1,M,1)*DSIN(PSI)
RETURN
END

SUBROUTINE TORUS1(Z,M,NJ,P0,W0,P,W,L)
DIMENSION P(NJ),Q(NJ)

```

```

      DOUBLE PRECISION Z,P0,W0,P,W,PINTG,QINTG
      DOUBLE PRECISION A,B,C,AN,AM
      M1=ABS(M)
      GO TO (100,200,100),L
C      L=1 ; P
C      L=2 ; W
C      L=3 ; P AND W
100  CONTINUE
      A=PINTG(Z,M,0)
      PU=A
      DO 11 IN=1,NJ
      IF(M1.LF.IN) GO TO 12
      P(IN)=0.0
11  CONTINUE
      IF(IN.EQ.NJ) GO TO 13
12  CONTINUE
      IF(IN.GT.1) P(IN-1)=A=PINTG(Z,M,IN-1)
      P(IN)=B=PINTG(Z,M,IN)
      AM=M
      K=NJ-1
      DO 10 N=IN,K
      AN=N
      J=N+1
      C=(2.0D+00*AN+1.0D+00)*Z*B-(AN+AM)*A
      C=C/(AN-AM+1.0D+00)
      P(J)=C
      A=B
      B=C
10  CONTINUE
13  CONTINUE
      IF(L.EQ.1) RETURN
C
200  CONTINUE
      A=QINTG(Z,M,NJ)
      P=QINTG(Z,M,NJ-1)
      Q(NJ)=A
      Q(NJ-1)=B
      AM=M
      K=NJ-1
      DO 20 NN=1,K
      N=K-NN+1
      AN=N
      J=N-1
      C=0.0
      IF(M1.GE.N) GO TO 21
      C=(2.0D+00*AN+1.0D+00)*Z*B-(AN-AM+1.0D+00)*A
      C=C/(AN+AM)
21  CONTINUE
      QU=C
      IF(J.GT.0) Q(J)=C
      A=B
      B=C
20  CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE TORUSJ(Z,M1,N,P0,W0,P,W,I,L)
      DIMENSION P(M1),Q(M1)
      DOUBLE PRECISION Z,PC,W0,P,W,PINTG,QINTG
      DOUBLE PRECISION A,B,C,AN,AM,GFCTI
      GO TO (200,100,100),L
C      I=1 ; P(M,N),W(M,N)
C      I=-1 ; P(-M,N),Q(-M,N)
C      L=1 ; P
C      L=2 ; W
C      L=3 ; P AND W
100  CONTINUE
      A=QINTG(Z,0,N)
      B=QINTG(Z,1,N)
      QU=A
      Q(1)=B
      IF(I.EQ.-1) Q(1)=Q(1)/GFCTI(N,1,1)
      AN=N
      K=M1-1

```

```

      DO 10 M=1,K
      AM=M
      J=M+1
      C=0.0
      IF (J.LE.N) C=(AN-AM+1.0D+00)*(AN+AM)*A
      1  -2.0D+00*AM*Z*B/DSQRT(Z**2-1.0D+00)
      Q(J)=C
      IF (I.EQ.-1.AND.J.LE.N) Q(J)=Q(J)/GFCTI(N,J,1)
      A=B
      B=C
      10 CONTINUE
      IF (L.EQ.2) RETURN
C
      200 CONTINUE
      DO 21 IM=MI,1,-1
      IF (IM.LE.N) GO TO 22
      P(IM)=0.0
      21 CONTINUE
      22 CONTINUE
      IF (IM.LE.1) GO TO 25
      P(IM)=A=PINTG(Z,IM,N)
      P(IM-1)=B=PINTG(Z,IM-1,N)
      IF (I.EQ.1) GO TO 24
      P(IM)=P(IM)/GFCTI(N,IM,1)
      P(IM-1)=P(IM-1)/GFCTI(N,IM-1,1)
      24 CONTINUE
      AN=N
      MM=IM-1
      DO 20 M=MM,1,-1
      AM=M
      J=M+1
      C=A+2.0D+00*AM*Z*B/DSQRT(Z**2-1.0D+00)
      C=C/((AN-AM+1.0D+00)*(AN+AM))
      P(J)=C
      IF (J.GT.0.AND.I.EQ.-1) P(J)=P(J)/GFCTI(N,J,1)
      A=B
      B=C
      20 CONTINUE
      GO TO 23
      23 CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE TORUS1(Z,M,NJ,PO,W0,P,W,L)
      DIMENSION P(NJ),Q(NJ)
      DOUBLE PRECISION Z,PO,W0,P,W,PHALF,WHALF
      DOUBLE PRECISION A,B,C,AN,AM
      GO TO (100,200,100),L
C      L=1 ; P
C      L=2 ; Q
C      L=3 ; P AND Q
      100 CONTINUE
      A=PHALF(Z,M,0)
      B=PHALF(Z,M,1)
      PO=A
      P(1)=B
      AM=M
      K=NJ-1
      DO 10 N=1,K
      AN=N
      J=N+1
      C=2.0D+00*AN*Z*B-(AN+AM-0.5D+00)*A
      C=C/(AN-AM+0.5D+00)
      P(J)=C
      A=B
      B=C
      10 CONTINUE
      IF (L.EQ.1) RETURN
C

```

```

200 CONTINUE
  A=@HALF(Z,M,NJ)
  B=@HALF(Z,M,NJ-1)
  @ (NJ)=A
  @ (NJ-1)=B
  K=NJ-1
  AM=M
  DO 20 NN=1,K
    N=K-NN+1
    AN=N
    J=N-1
    C=2.0D+00*AN*Z*B-(AN-AM+0.5D+00)*A
    C=C/(AN+AM-0.5D+00)
    @U=C
    IF(J.GT.0) @ (J)=C
    A=B
    B=C
20 CONTINUE
  RETURN
  END

SUBROUTINE TORUS2(Z,M1,N,P0,@0,P,@,I,L)
  DIMENSION P(M1),@ (M1)
  DOUBLE PRECISION Z,P0,@0,P,@,PHALF,@HALF
  DOUBLE PRECISION A,B,C,AN,AM,GMFCT
  GO TO (200,100,100),L
C   I=1 ; P(M,N),@ (M,N)
C   I=-1 ; P(-M,N),@ (-M,N)
C   L=1 ; P
C   L=2 ; @
C   L=3 ; P AND @
100 CONTINUE
  A=@HALF(Z,0,N)
  B=@HALF(Z,1,N)
  @U=A
  @ (1)=B
  IF(I.E@.-1) @ (1)=@ (1)/GMFCT(1.0D+00,N,1,1)
  AN=N
  K=M|-1
  DO 10 M=1,K
    AM=M
    J=M+1
    C=(AN-AM+0.5D+00)*(AN+AM-0.5D+00)*A
1    -2.0D+00*AM*Z*B/D@SQRT(Z**2-1.0D+00)
    @ (J)=C
    IF(I.E@.-1) @ (J)=@ (J)/GMFCT(1.0D+00,N,J,1)
    A=B
    B=C
10 CONTINUE
  IF(L.E@.2) RETURN
C
200 CONTINUE
  P(M1)=A=PHALF(Z,M1,N)
  P(M1-1)=B=PHALF(Z,M1-1,N)
  IF(I.E@.1) GO TO 21
  P(M1)=P(M1)/GMFCT(1.0D+00,N,M1,1)
  P(M1-1)=P(M1-1)/GMFCT(1.0D+00,N,M1-1,1)
21 CONTINUE
  AN=N
  K=M1-1
  DO 20 MM=1,K
    M=K-MM+1
    AM=M
    J=M-1
    C=A+2.0D+00*AM*Z*B/D@SQRT(Z**2-1.0D+00)
    C=C/((AN-AM+0.5D+00)*(AN+AM-0.5D+00))
    @U=C
    IF(J.GT.0) P(J)=C
    IF(J.GT.0.AND.I.E@.-1) P(J)=P(J)/GMFCT(1.0D+00,N,J,1)
    A=B
    B=C
20 CONTINUE
  RETURN
  END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION PINTG(Z,MP,N)
DOUBLE PRECISION Z,Z2,A,B,C,GAUSS
DOUBLE PRECISION ZM,A1,A11,D1,D2,D3
PINTG=0.0
M=IABS(MP)
IF(N.LT.M) RETURN
A=1.0D+00
Z2=(Z-1.0D+00)/(Z+1.0D+00)
ZM=DSQRT(Z2)
IF(MP.LT.0) GO TO 11
K1=N-M+1
K2=N+M
IF(K1.GT.K2) GO TO 12
I1=0
DO 10 I=K1,K2
A1=1
I1=I1+1
A11=I1
IF(I1.GT.M) A11=ZM=1.0D+00
A=A*A1*M/A11
10 CONTINUE
GO TO 12
11 CONTINUE
DO 13 I=1,M
A11=1
A=A*ZM/A11
13 CONTINUE
12 CONTINUE
D1=(Z/2.0D+00+0.5D+00)**N
D2=A
A=-DFLOAT(N)
B=-DFLOAT(N-M)
C=DFLOAT(M+1)
D3=GAUSS(A,B,C,Z2)
PINTG=D1*D2*D3
14 CONTINUE
RETURN
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION WINTG(Z,M0,N)
DOUBLE PRECISION Z,ZN,AZ,A,B,C,VA,VB,VC,A0,A1
DOUBLE PRECISION D,D1,D2,D3,SUMA,SUMB,SUMC
DOUBLE PRECISION DEGAM,GFCT1,GMFCT,GAUSS
WINTG=0.0
M=IABS(M0)
IF(N.LT.M) RETURN
IF(Z.GE.1.2) GO TO 200
C
ZN=(Z+1.0D+00)/(Z-1.0D+00)
AZ=DLG(ZN)
D1=-0.5772156649
D2=AZ-DEGAM(N-M+1,1)
D3=DEGAM(N+M+1,1)
C
AZ=DSQRT(ZN)
AZ=AZ**M
ZN=0.5D+00*(Z-1.0D+00)
SUMA=0.0
IF(M.EQ.0) GO TO 12
K1=M-1
SUMA=A0=1.0D+00
IF(K1.EQ.0) GO TO 11
A=-N
K=N+1
C=-M+1
DO 10 I=1,K1
D=IR
VA=A+D-1.0D+00
VB=B+D-1.0D+00
VC=D*(C+D-1.0D+00)
VC=DABS(VC)
A1=A0*VA*VB*ZN/VC
SUMA=SUMA+A1
A0=A1

```

```

10 CONTINUE
11 CONTINUE
  IF (M/2-M.NE.0) SUMA=-SUMA
  SUMA=SUMA*A7*GFCTI(M,-1,2)
C
12 CONTINUE
  ZN=-ZN
  SUMB=D1+D2
  K1=N-M
  IF (K1.EE.0) GO TO 14
  A0=1.0D+00
  A=-N+M
  B=N+M+1
  C=M+1
  DO 13 IR=1,K1
    D=IR
    VA=A+D-1.0D+00
    VB=B+D-1.0D+00
    VC=D*(C+D-1.0D+00)
    A1=A0*VA*VB*ZN/VC
    SUMB=SUMB+A1*(DEGAM(IR+1,1)+D2)
    A0=A1
13 CONTINUE
14 CONTINUE
  B=DSQRT(Z**2-1.0D+00)
  SUMB=SUMB*(0.5D+00*B)**M
C
  SUMC=DEGAM(M+1,1)-D3
  K1=N-1
  IF (K1.LE.0) GO TO 16
  A0=1.0D+00
  A=-N
  B=N+1
  C=M+1
  DO 15 IR=1,K1
    D=IR
    VA=A+D-1.0D+00
    VB=B+D-1.0D+00
    VC=D*(C+D-1.0D+00)
    A1=A0*VA*VB*ZN/VC
    SUMC=SUMC+A1*(DFGAM(M+IR+1,1)-D3)
    A0=A1
15 CONTINUE
16 CONTINUE
  SUMC=SUMC/AZ
  D=GFCTI(N,M,1)/GFCTI(M,0,2)
  @INTG=SUMA+(SUMB+SUMC)*D
  IF (M.LE.0) @INTG=@INTG/GFCTI(N,M,1)
  @INTG=@INTG*0.5D+00
  RETURN
C
200 CONTINUE
  ZN=DSQRT(Z**2-1.0D+00)
  AZ=1.0D+00/(Z+ZN)
  ZN=(2.0D+00*ZN)**M*AZ**(N+M+1)
  D=GFCTI(N,M,2)/GMFCT(AZ,N,-1,2)
  D1=0.5D+00+DFLOAT(M)
  D2=DFLOAT(N+M+1)
  D3=1.5D+00+DFLOAT(M)
  AZ=AZ**2
  A=GAUSS(D1,D2,D3,AZ)
  @INTG=ZN*D*A
  IF (M/2-M.NE.0) @INTG=-@INTG
  IF (M.GT.0) @INTG=@INTG/GFCTI(N,M,1)
  RETURN
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION PHALT(Z,MP,N)
DOUBLE PRECISION Z,DEGAM,GFCT,GMFCT,GAUSS
DOUBLE PRECISION AZ,Z2,Z2Z,N,A,B,C
DOUBLE PRECISION D1,D2,D3,SUMA,SUMB
DOUBLE PRECISION PA1,PA
J=1
IF (Z.GE.4.0) GO TO 200

```

```

Z2=(Z-1.0D+00)/(Z+1.0D+00)
AZ=DSQRT(Z2)
M=IABS(MP)
IF(MP.GE.0) GO TO 31
A=1.0D+00
DO 30 I=1,M
A=A*AZ/DFLOAT(I)
30 CONTINUE
D2=A
GO TO 32
31 CONTINUE
D2=GMFCT(AZ,N,M,1)
32 CONTINUE
A=0.5D+00-DFLOAT(N)
B=0.5D+00+DFLOAT(M-N)
C=1.0D+00+DFLOAT(M)
D1=(Z/2.0D+00+0.5D+00)**(Z*N-1)
D1=DSQRT(D1)
D3=GAUSS(A,B,C,Z2)
PHALF=D1*D2*D3
RETURN
C
200 CONTINUE
PAI=3.1415926535897932
M=IABS(MP)
IF(MP.GE.0) GO TO 40
PAI=PAI*GMFCT(1.0D+00,N,M,1)
40 CONTINUE
AZ=2.0D+00*DLOG(2.0D+00*Z)
Z2=2.0D+00*Z
Z22N=Z2**N
D1=DEGAM(M+N,2)
D2=DEGAM(N+1,1)
D3=DEGAM(1,1)
SUMA=AZ-2.0D+00*D1+D2+D3
A=GFCT(Z,M+N,N,0,1)
SUMA=A*SUMA
DO 10 NR=1,50
J=2*NR+M+N
B=GFCT(7,J,N+NR,NR,1)
D1=DEGAM(J,2)
D2=DEGAM(N+NR+1,1)
D3=DEGAM(NR+1,1)
B=B*(AZ-2.0D+00*D1+D2+D3)
SUMA=SUMA+B
TA=B/SUMA
IF(DABS(TA).LT.1.0D-8) GO TO 11
10 CONTINUE
WRITE(6,6000) TA
6000 FORMAT(1H ,23HPHALF DOES NOT CONVERGE,2X,E10.3)
11 CONTINUE
SUMA=SUMA/Z22N
C
SUMB=0.0
IF(N.EQ.0) GO TO 50
SUMB=GFCT(Z,M-N,N-1,0,2)
IF(N.EQ.1) GO TO 50
N1=N-1
DO 20 NR=1,N1
J=2*NR+M-N
K=N-NR-1
A=-1.0D+00
IF(NR/Z*2.EQ.NR) A=1.0D+00
A=A*GFCT(Z,J,K,NR,2)
SUMB=SUMB+A
20 CONTINUE
50 CONTINUE
A=1.0D+00
IF(N/Z*2.NE.N) A=-1.0D+00
SUMB=A*Z22N*SUMB
A=-DSQRT(Z**2-1.0D+00)/Z
A=A*M/DSQRT(Z2)
PHALF=A*(SUMA+SUMB)/PAI

```

```
RETURN
END
```

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION QHALF(Z,MQ,N)
DOUBLE PRECISION Z,Z1,Z2,W
DOUBLE PRECISION A,F,G,GMFCT,PHALF
Z1=DSQRT(Z**2-1.0D+00)
Z2=DSQRT(2.0D+00*Z1)
W=Z/Z1
G=Z2*GMFCT(W,N,MQ,2)
M=IABS(MQ)
F=PHALF(W,N,M)
A=1.0D+00
IF(N/2-1-N.E.0) A=-1.0D+00
QHALF=3.1415926535897932*A*F/G
RETURN
END
```

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION GFCT1(N,M,J)
DOUBLE PRECISION A,A1
A=1.0D+00
GO TO (100,200,100),J
C J=1 ; GAMMA(N+M+1)/GAMMA(N-M+1)
C J=2 ; GAMMA(N+M+1)
C J=3 ; GAMMA(N+M+1)/GAMMA(N+1)
100 CONTINUE
K1=N-M+1
IF(J.EQ.3) K1=N+1
K2=N+M
IF(K1.LE.0.OR.M.LE.0) GO TO 12
DO 10 I=K1,K2
A1=1
A=A*A1
10 CONTINUE
12 CONTINUE
GFCT1=A
RETURN
C
200 CONTINUE
K1=N+M
IF(K1.EQ.0) GO TO 13
DO 11 I=1,K1
A1=1
A=A*A1
11 CONTINUE
13 CONTINUE
GFCT1=A
RETURN
END
```

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION GMFCT(Z,N,L,J)
DOUBLE PRECISION A,A1,A11,Z,ZL
A=1.0D+00
KK=N-L
GO TO (100,200),J
C J=1 ; Z**L * GAMMA(N+L+1/2)/L! GAMMA(N-L+1/2)
C J=2 ; GAMMA(N-L+1/2)/SQRT(PI)
C
100 CONTINUE
ZL=Z/4.0D+00
GMFCT=A
IF(KK.L1.0) GO TO 101
IF(L.EQ.0) RETURN
K1=2*(N-L)+1
K2=2*(N+L)-1
I1=0
DO 10 I=K1,K2,2
A1=1
I1=I+1
A11=I1
IF(I1.GT.L) A11=ZL=1.0D+00
```

```

      IF (DABS(Z-1.0D+00),LE,1.0D-6) AII=1.0D+00
      A=A*AI*ZL/AII
10  CONTINUE
      GMFCT=A
      RETURN
C
101 CONTINUE
      K1=2*(L-N)-1
      K2=2*(N+L)-1
      I1=0
      DO 11 I=1,K2,2
      AI=I
      I1=I1+1
      AII=11
      IF (I.LE,K1) AI=AI**2
      IF (I1.GT,L) AII=ZL=1.0D+00
      IF (DABS(Z-1.0D+00),LE,1.0D-6) AII=1.0D+00
      A=A*AI*ZL/AII
11  CONTINUE
      IF (KK/2*2-KK.NE,0) A=-A
      GMFCT=A
      RETURN
C
200 CONTINUE
      IF (KK.EQ,0) GO TO 21
      KU=KK
      IF (KK.LT,0) KK=-KK
      DO 20 I=1,KK
      AI=2*I-1
      A=A*AI/2.0D+00
20  CONTINUE
      IF (K0.LT,0.AND,K0/2*2-K0.EQ,0) A=1.0/A
      IF (K0.LT,0.AND,K0/2*2-K0.NE,0) A=-1.0/A
21  CONTINUE
      GMFCT=A
      RETURN
      END

      DOUBLE PRECISION FUNCTION GFCT(Z,M,N,NR,NJ)
      DOUBLE PRECISION Z,G,Z2,A1
      DOUBLE PRECISION A,B,C,H
C      NJ=1.,GAMA(M+0.5)/(FACT(R)*(2*Z)**(2R)*FACT(N))
C      NJ=2.AND H.GT,0.,GAMA(M+0.5)*FACT(N)/(FACT(R)*(2*Z)**(2R))
C      NJ=2.AND M.LT,0.GAMA(-M+0.5)*FACT(N)/(FACT(R)*(2*Z)**(2R))
      G=1.0D+00
      Z2=(2.0D+00*Z)**2
      L=IABS(M)
      J=L
      IF (NR.GE,L.AND,NR.GE,N) J=NR
      IF (N.GE,L.AND,N.GE,NR) J=N
      GFCT=1.0D+00
      IF (J.EQ,0) RETURN
      DO 10 I=1,J
      AI=I
      IF (I.LE,NR) A=1.0D+00/(AI*Z2)
      IF (I.GT,NR) A=1.0D+00
C
      IF (I.LE,N) B=AI
C
      IF (I.GT,N) B=1.0D+00
C
      H=2.0D+00*AI-1.0D+00
      IF (I.LE,L.AND,M.GT,0) C=0.5D+00*H
      IF (I.LE,L.AND,M.LT,0) C=-2.0D+00/H
      IF (I.GT,L) C=1.0D+00
C
      GO TO (1,2),NJ
1  CONTINUE
      G=A*C*G/B
      GO TO 10
2  CONTINUE
      G=A*C*G*B
10  CONTINUE
      GFCT=G
      RETURN

```

```

      DOUBLE PRECISION FUNCTION DEGAM(N,J)
      DOUBLE PRECISION AI
      GO TO (1,2),J
1     CONTINUE
      DEGAM=-0.5772156649
      IF (N.EQ.1) RETURN
      K=N-1
      DO 10 I=1,K
      AI=I
      DEGAM=DEGAM+1.0D+00/AI
10    CONTINUE
      RETURN
C
2     CONTINUE
      DEGAM=-1.963510026
      IF (N.EQ.0) RETURN
      DO 20 I=1,N
      AI=I
      DEGAM=DEGAM+2.0D+00/(2.0D+00*AI-1.0D+00)
20    CONTINUE
      RETURN
      END

      DOUBLE PRECISION FUNCTION GAUSS(A,B,C,Z)
      DOUBLE PRECISION A,B,C,Z
      DOUBLE PRECISION A0,A1,SUM,T
      DOUBLE PRECISION VA,VB,VC
      AU=1.0D+00
      SUM=AU
      DO 10 N=1,50
      D=N
      VA=A+D-1.0D+00
      VB=B+D-1.0D+00
      VC=D*(C+D-1.0D+00)
      A1=A0*VA*VB*Z/VC
      SUM=SUM+A1
      T=A1/SUM
      IF (DABS(T).LT.1.0D-8) GO TO 25
      AU=A1
10    CONTINUE
      WRITE(6,6000) T
6000  FORMAT(1H ,23HGAUSS DOES NOT CONVERGE,2X,E10.3)
25    CONTINUE
      GAUSS=SUM
      RETURN
      END

```