



|                  |   |
|------------------|---|
| Title            | アダプティブアンテナアレイシステムにおけるカルマンフィルタの応用  |
| Author(s)        | 木村, 一洋; Kimura, Kazuhiro; 伊藤, 精彦 他  |
| Citation         | 北海道大學工学部研究報告, 88, 51-57   |
| Issue Date       | 1978-08-10  |
| Doc URL          | <a href="https://hdl.handle.net/2115/41488">https://hdl.handle.net/2115/41488</a> |
| Type             | departmental bulletin paper   |
| File Information | 88_51-58.pdf  |



## アダプティブ アンテナ アレイ システムに おけるカルマン フィルタの応用

木村 一洋\* 伊藤 精彦\* 松本 正\*

(昭和 52 年 12 月 28 日受理)

### Application of Kalman Filter Theory to Adaptive Array Antenna Systems

Kazuhiro KIMURA, Kiyohiko ITOH and Tadashi MATSUMOTO

(Received December 28, 1977)

#### Abstract

Godard's algorithm, which is derived from an application of Kalman filter theory, is the expanded form of the classical LMS algorithm. Several important advantages are obtained by the algorithm: 1) the weight vector is adapted in the near direction of the optimal one; 2) the misadjustment of the weight vector does not occur because of the arithmetic decrease of the step size. Especially the first property is attractive, when the conditional number of  $R$  (input correlation matrix) is greater than unity.

This paper shows the relation between Godard's algorithm and LMS algorithm, and the results of computer simulation.

#### 1. 序 論

電波環境が汚染されつつある現在、アダプティブ アレイ アンテナ システムに急速に関心が集まりつつある。アダプティブ アレイ アンテナ システムの特徴は、実時間で電波環境に適應できる能力を有していることであり、この点が従来のアンテナ システムと大きく異なる。つまり、所望信号と妨害電波が同時にアレイ アンテナに入射する場合に、妨害電波の到来方向にアダプティブ コントロール回路によって、短時間の内にヌル点を作り、DU 比を改善する。

電波環境に適應するのに要する時間 (学習時間) は、アダプティブ システムの生命とも言われるくらいに重要な要素であり、学習時間の短縮を目ざして多くのアルゴリズムが考え出されてきているが、本文では、古典的アルゴリズム (LMS アルゴリズム) と Godard のアルゴリズムを比較し、Godard アルゴリズムの性質を述べ、コンピュータ シミュレーションにより、両者の違いが学習曲線としてどのように表わされるかを示す。

#### 2. 平均二乗誤差関数

Fig. 1 はアダプティブ アレイ アンテナ システムのタップ付き遅延線路 (Tapped Delay Line, TDL) を用いた一般的構成図であり、各重み  $\omega_i$  は、あるアルゴリズムに基づいて逐次最適な重みへと調整されていく。第  $k$  番目の iteration でのフィルタ出力  $y_k$  は重み  $\omega_i$  とそれに対応す

\* 電子工学科

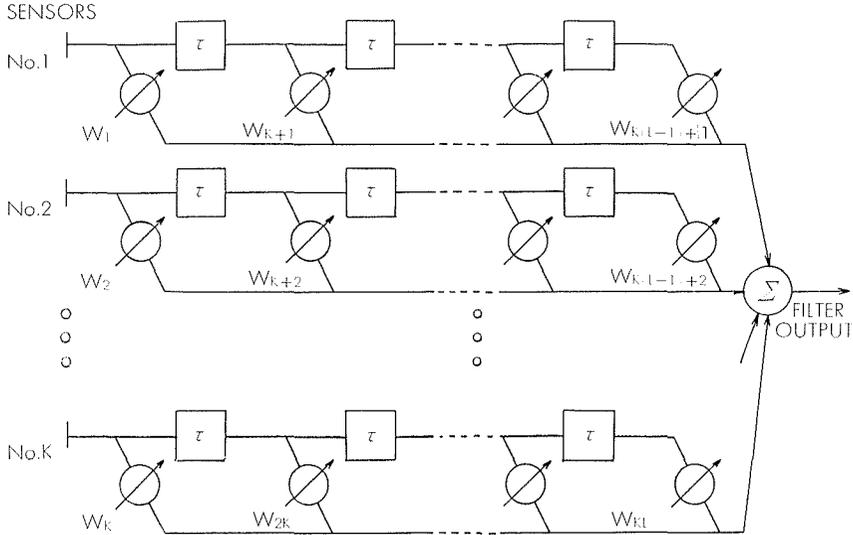


Fig. 1 General form of tapped-delay-line array-processing filter

る入力信号  $x_i$  との積の和で与えられ、

$$y_k = \sum_{i=1}^{KL} \omega_{k,i} x_{k,i} \quad (1.1)$$

となる。

またベクトル形式を用いて、

$$y_k = \underline{W}_k^T \underline{X}_k = \underline{X}_k^T \underline{W}_k \quad (1.2)$$

と書くこともできる。但し、 $T$  は転置を示し、 $\underline{W}_k$ 、 $\underline{X}_k$  は第  $k$  番目の iteration での重み、入力信号ベクトルであり、

$$\underline{W}_k = [\omega_{k,1}, \omega_{k,2}, \dots, \omega_{k,KL}]^T \quad (1.3)$$

$$\underline{X}_k = [x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,KL}]^T \quad (1.4)$$

である。入力信号ベクトル  $\underline{X}_k$  は、所望信号ベクトル  $\underline{S}_k$  と雑音ベクトル  $\underline{N}_k$  との和であり、

$$\underline{X}_k = \underline{S}_k + \underline{N}_k \quad (1.5)$$

と書ける。 $\underline{S}_k$ 、 $\underline{N}_k$  については、各々零平均ガウス性ランダム変数とし、過程はエルゴディックとする。また、 $\underline{S}_k$  と  $\underline{N}_k$  には相関はないとする。すなわち、

$$E[\underline{S}_k] = E[\underline{N}_k] = \underline{0} \quad (1.6)$$

$$E[\underline{S}_k \underline{N}_k^T] = \underline{0} \quad (1.7)$$

である。入力自己相関行列 (Toeplitz 行列)  $\underline{R}$ 、所望信号と入力信号との相関ベクトル  $\underline{P}$  を、

$$\underline{R} = E[\underline{X}_k \underline{X}_k^T] \quad (1.8)$$

$$\underline{P} = E[\underline{S}_k \underline{X}_k] \quad (1.9)$$

と定める。

所望信号  $s_k$  とフィルタ出力  $y_k$  との差の二乗平均は、

$$\xi_k = E[(y_k - s_k)^2] = E[s_k^2 - 2s_k \underline{W}_k^T \underline{X}_k + \underline{W}_k^T \underline{X}_k \underline{X}_k^T \underline{W}_k] \quad (1.10)$$

となるが、 $\xi$  を最小にする意味での最適重み  $\underline{W}_{opt}$  及び、その最小値  $\xi_{min}$  は、

$$\underline{W}_{opt} = \underline{R}^{-1} \underline{P} \quad (1.11)$$

$$\xi_{min} = E[s_k^2] - \underline{P}^T \underline{W}_{opt} \quad (1.12)$$

で与えられる<sup>1)</sup>。(1.10) は (1.11)、(1.12) を用いて、

$$\hat{\xi}_k = \hat{\xi}_{\min} + E[(P^T \underline{W}_{\text{opt}} - 2S_k \underline{X}_k^T \underline{W}_k + \underline{W}_k^T \underline{X}_k \underline{X}_k^T \underline{W}_k)] = \hat{\xi}_{\min} + E[(\underline{W}_k - \underline{W}_{\text{opt}})^T \underline{R} (\underline{W}_k - \underline{W}_{\text{opt}})] \quad (1.13)$$

となるが、ここで、誤差共分散行列  $\underline{Q}_k$  を

$$\underline{Q}_k = \frac{E[(\underline{W}_k - \underline{W}_{\text{opt}})(\underline{W}_k - \underline{W}_{\text{opt}})^T]}{\hat{\xi}_{\min}} \quad (1.14)$$

と定めると、(1.13) は、

$$\hat{\xi}_k = \hat{\xi}_{\min}(1 + \text{trace } \underline{Q}_k \underline{R}) \quad (1.15)$$

と書ける。但し、 $\underline{Q}_k$ 、 $\underline{R}$  は共に正定値行列 (positive-definite) と仮定する。

### 3. カルマン フィルタの応用-Godard のアルゴリズム導入

最適重みベクトル  $\underline{W}_{\text{opt},k}$  をシステムの状態変数と見なし、その遷移をカルマン フィルタ理論を応用して<sup>2,3)</sup>、

$$\underline{W}_{\text{opt},k} = \underline{\phi}(k, k-1) \underline{W}_{\text{opt},k-1} + \underline{N}_k \quad (3.1)$$

$$s_k = \underline{X}_k^T \underline{W}_{\text{opt},k} + n_k \quad (3.2)$$

とする。但し、 $\underline{\phi}(k, k-1)$  は状態遷移行列、 $\underline{N}_k$  は、零平均白色雑音ベクトル、 $n_k$  は、零平均白色雑音である。この関係は、電波環境が、アダプテーション中に変わることを示めているが、簡単化のために、電波環境は定常的であり、アダプテーション中には、最適重みベクトル  $\underline{W}_{\text{opt}}$  は変わらないと仮定する。そうすると (3.1) の最適重みベクトル  $\underline{W}_{\text{opt}}$  の生成過程は必要なくなり、(3.2) の測定過程の式のみで良いことになる。それで (3.2) を書き変え、

$$s_k = \underline{X}_k^T \underline{W}_{\text{opt}} + e_{k,\text{opt}} \quad (3.3)$$

とする。最適重みベクトル  $\underline{W}_{\text{opt}}$  においても誤差  $e_{k,\text{opt}}$  を生じる理由は、TDL が有限であるからである。 $s_k$  の推定値を第  $k-1$  回目の iteration の重みベクトル  $\underline{W}_{k-1}$  をもちいて、

$$\hat{s}_k = \underline{X}_k^T \underline{W}_{k-1} \quad (3.4)$$

とする。それで、第  $k$  番目の iteration で最適な重みベクトル  $\underline{W}_k$  を推定する式が、

$$\underline{W}_k = \underline{W}_{k-1} - \underline{K}_k (\hat{s}_k - s_k) \quad (3.5)$$

となる。但し、カルマン利得  $\underline{K}_k$  は、誤差共分散行列  $\underline{Q}_k$  のトレースを最小にするものであり、

$$\underline{K}_k = \frac{\underline{Q}_{k-1} \underline{X}_k}{\underline{X}_k^T \underline{Q}_{k-1} \underline{X}_k + 1} \quad (3.6)$$

$$\underline{Q}_k = \underline{Q}_{k-1} - \underline{K}_k \underline{X}_k^T \underline{Q}_{k-1} \quad (3.7)$$

となる (付録を参照)。

初期重みベクトル  $\underline{W}_0$  は便宜上

$$\underline{W}_0 = \underline{0} \quad (3.8)$$

とし、初期誤差共分散行列  $\underline{Q}_0$  に関しては、最適重みベクトル  $\underline{W}_{\text{opt}}$  が  $\pm L$  の簡囲に一樣に分布していると仮定すると、

$$\underline{Q}_0 = \frac{L^2}{3\hat{\xi}_{\min}} \underline{I} \quad (3.9)$$

となる。但し、 $\underline{I}$  は単位行列である。非対角項を零した理由は、初期推定において、各重みに相関がないと考えたからである。

カルマン利得  $\underline{K}_k$  については、(3.6) より

$$\underline{K}_k = (\underline{I} - \underline{K}_k \underline{X}_k^T) \underline{Q}_{k-1} \underline{X}_k \quad (3.10)$$

(3.7) より、

$$\underline{Q}_k \underline{K}_k = (I - \underline{K}_k \underline{X}_k^T) \underline{Q}_{k-1} \underline{X}_k \quad (3.11)$$

であるから, (3.10), (3.11) より

$$\underline{K}_k = \underline{Q}_k \underline{X}_k \quad (3.12)$$

であることがわかる。それゆえ, (3.7) は

$$\underline{Q}_k = \underline{Q}_{k-1} - \underline{Q}_k \underline{X}_k \underline{X}_k^T \underline{Q}_{k-1} \quad (3.13)$$

となり,

$$\underline{Q}_k = \left( \underline{Q}_0^{-1} + \sum_{i=1}^k \underline{X}_i \underline{X}_i^T \right)^{-1} \quad (3.14)$$

結局, iteration 回数  $k$  が大きくなると,  $\underline{Q}_k$  は近似的に

$$\underline{Q}_k \simeq \left( \sum_{i=1}^k \underline{X}_i \underline{X}_i^T \right)^{-1} \quad (3.15)$$

と表わすことができ,  $k\underline{Q}_k$  は,

$$k\underline{Q}_k \simeq \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \underline{X}_i \underline{X}_i^T \right)^{-1} \quad (3.16)$$

であることから, 入力自己相関行列  $\underline{R}$  の逆行列の近似行列であると考えられるが, (3.16) が, iteration 回数  $k$  に反比例する分散をもちながら  $R^{-1}$  に収束すると仮定すると<sup>4)</sup>,

$$\underline{Q}_k \underline{R} = \frac{1}{k} \left( 1 + \frac{r}{\sqrt{k}} \right) I \quad (3.17)$$

となり, 誤差の二乗平均  $\xi_k$  は, (1.15) より,

$$\xi_k = \xi_{\min} \left\{ 1 + \frac{1}{k} \left( 1 + \frac{r}{\sqrt{k}} \right) KL \right\} \quad (3.18)$$

となる。(3.17) より,

$$k\underline{Q}_k = \left( 1 + \frac{r}{\sqrt{k}} \right) \underline{R}^{-1} \quad (3.19)$$

であるから,

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \underline{X}_i \underline{X}_i^T = \left( 1 + \frac{r}{\sqrt{k}} \right)^{-1} \underline{R} \simeq \left( 1 - \frac{r}{\sqrt{k}} \right) \underline{R} \quad (3.20)$$

(3.20) より, 我々は,  $r$  の推定量として実際に利用できる量を用いて,

$$r^2 = \frac{\text{trace } \underline{R}}{KL} \quad (3.21)$$

と考えた。

#### 4. Godard アルゴリズムと LMS アルゴリズムの比較

Godard アルゴリズム<sup>2)</sup>は,

$$\underline{W}_k = \underline{W}_{k-1} - \frac{\underline{Q}_{k-1} \underline{X}_k \varepsilon_k}{\underline{X}_k^T \underline{Q}_{k-1} \underline{X}_k + 1} \quad (4.1)$$

と書けるが,  $k \geq 2$  に対して, (4.1) は,

$$\underline{W}_k = \underline{W}_{k-1} - \mu_k \underline{D}_k \underline{X}_k \varepsilon_k \quad (4.2)$$

と書ける。但し,  $\varepsilon_k$ ,  $\mu_k$ ,  $\underline{D}_k$  は,

$$\mu_k = \frac{1}{(k-1)(\underline{X}_k^T \underline{Q}_{k-1} \underline{X}_k + 1)} \quad (4.3)$$

$$\underline{D}_k = (k-1) \underline{Q}_{k-1} \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_k = \hat{s}_k - s_k \quad (4.5)$$

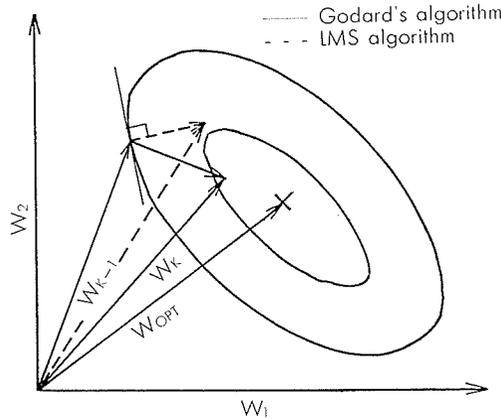


Fig. 2 Comparison between the two algorithms in process

である。(4.2) と LMS アルゴリズム

$$\underline{W}_k = \underline{W}_{k-1} - \mu \underline{X}_k \varepsilon_k$$

とを比較すると、Godard アルゴリズムで、 $\mu_k$ 、 $\underline{D}_k$  をそれぞれ定数  $\mu$ 、単位行列に置き変えると LMS アルゴリズムになり、このことから、Godard アルゴリズムは、LMS アルゴリズムを拡張したものであることが分かる。それで、 $\mu_k$ 、 $\underline{D}_k$  の性質は、3. で述べた通り、 $\underline{D}_k$  が急速に  $\underline{R}^{-1}$  に収束し、 $\mu_k$  が、 $k$  の逆数で減少するゆえに、LMS アルゴリズムでは重要な要素である misadjustment は、このアルゴリズムでは生じない。

Godard アルゴリズムの幾何学的意味は、Fig. 2 に示す様に、エラーサーフェイスの負の傾斜方向を  $\underline{D}_k$  で変向し、降下方向は近似的に最適重みベクトル  $\underline{W}_{opt}$  の方向となる。その理由は、エラーサーフェイスの負の傾斜方向は平均の意味で、

$$-\frac{1}{2} \nabla \varepsilon_k = \underline{P} - \underline{R} \underline{W}_k \quad (4.6)$$

となるが、これに  $\underline{D}_k$  を掛けると、

$$-\underline{D}_k \frac{1}{2} \nabla \varepsilon_k \simeq \underline{R}^{-1} (\underline{P} - \underline{R} \underline{W}_k) = \underline{R}^{-1} \underline{P} - \underline{W}_k = \underline{W}_{opt} - \underline{W}_k \quad (4.7)$$

となり、降下方向が、最適重みベクトル  $\underline{W}_{opt}$  方向となることが分かる。

Fig. 2 は、重みベクトルが二次元の特別な場合の2つのアルゴリズムのプロセスを示したものであるが、破線部分が LMS アルゴリズムであり、 $\underline{W}_{k-1}$  でのエラーサーフェイスの負の傾斜方向に降下して、新しい重みベクトル  $\underline{W}_k$  を作るが、Godard アルゴリズムでは、 $\underline{W}_{opt}$  の方向を  $\underline{D}_k$  で推測することによって、降下方向が、 $\underline{W}_{opt}$  方向を向くようになるのが特徴である。

入力自己関行列  $\underline{R}$  の conditional number  $C$  が大きいほど、エラーサーフェイスは、円形からだ円形へと大きく歪むから、一般には、負の傾斜方向に降下するのみでは、重みベクトルの最適ベクトルを見だすまでに、かなりの iteration 回数を必要とすることになる。この点において、 $C$  が充分大きくても、Godard アルゴリズムは適当である。

## 5. シミュレーション

電波環境については、表1及び Fig. 3 のように定めた。 $f_0$  は規格化周波数である。

シミュレーションでは、アンテナの数は4個とし、各アンテナは isotropic とする。また、各 TDL の長さは4であり、遅延時間を  $1/f_0$  とし、アンテナ間隔  $L$  は  $\lambda_0$  (1 波長) とする。この

表1 電波環境の性質

|           | 所 望 信 号   | 雑 音 A      | 雑 音 B      | 白 色 雑 音 |
|-----------|-----------|------------|------------|---------|
| 帯 域       | $0.1 f_0$ | $0.1 f_0$  | $0.1 f_0$  |         |
| 中 心 周 波 数 | $0.3 f_0$ | $0.25 f_0$ | $0.35 f_0$ |         |
| 電 力 比     | 1.22      | 15.2       | 7.3        | 1.0     |
| 入 射 角 度   | $0^\circ$ | $70^\circ$ | $20^\circ$ |         |

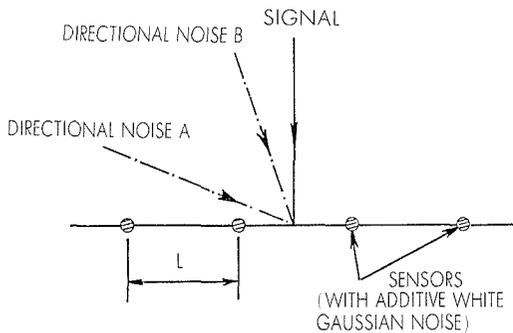


Fig. 3 Linear array and signal configuration

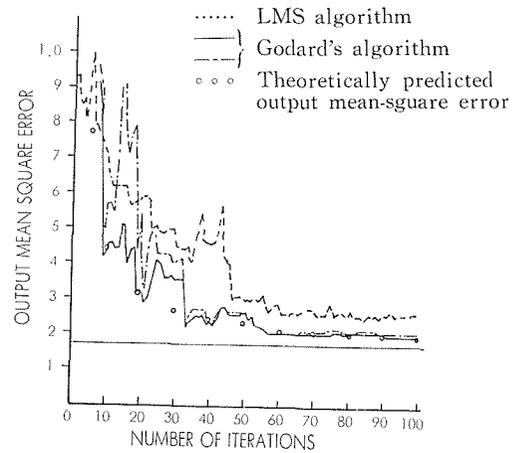


Fig. 4 Comparison by computer simulation of convergence properties

値は、所望信号の周波数成分が、 $0.5f_0$  以上にならないことを仮定していることから、理想的値である<sup>3,6)</sup>。

Fig. 4 はシミュレーションの結果であり、Godard アルゴリズムについては、 $\xi_{\min}$  の初期推定値として、 $0.76$  と  $0.76 \times 10^{-2}$  の 2 通り行ってみた。シミュレーションの結果より、初期推定値に対しては、厳密な値は必要ないことが確かめられた。

また、 $\xi_k$  の収束の目安として、 $2 \times KL$  iterations でおよそ  $\xi_{\min}$  の  $3dB$  に達することも確かめられた。

LMS アルゴリズムにおいては、ステップ サイズを misadjustment を考慮して、

$$\mu = \frac{2}{\text{trace } \underline{R}} \times 0.15$$

と定めた。結果は misadjustment が、 $0.18 \sim 0.20$  となった。

## 6. 結 語

Godard アルゴリズムは LMS アルゴリズムより収束性にすぐれている一面、重大な欠点もある。つまり、後者に比べて計算量が多く、ハード的に複雑になることである。それゆえに、実際に装置を作る立場から考えると、Godard アルゴリズムは応用しにくいかもしれない。そこで、収束性と装置の簡単化との両者の兼ね合いが問題になり、どのアルゴリズムを利用するかは、装置の使用目的と設計者の判断にゆだねられる。

なお、この研究の一部は、文部省科研 142028 で行われており、シミュレーションには、北大大型計算機を利用した。

## 付 録

## (3.6) の導入

$\underline{Q}_k$  のトレースを最小にするカルマン利得を求めるには、次の量を最小にすることと同じである。

$$A = E\{(\underline{W}_k - \underline{W}_{\text{opt}})^T(\underline{W}_k - \underline{W}_{\text{opt}})\} \quad (1)$$

$\underline{W}_k$  は、(3.5) で与えられるから、

$$\begin{aligned} A = & E\{\underline{W}_{k-1}^T \underline{W}_{k-1}\} + E\{\varepsilon_k^i K_k^T K_k\} + E\{\underline{W}_{\text{opt}}^T \underline{W}_{\text{opt}}\} \\ & - 2E\{\underline{W}_{k-1}^T K_k \varepsilon_k\} + 2E\{\varepsilon_k K_k^T \underline{W}_{\text{opt}}\} - 2E\{\underline{W}_{\text{opt}}^T \underline{W}_{k-1}\} \end{aligned} \quad (2)$$

となる。(2) を  $K_k$  で微分すると、

$$\frac{\partial A}{\partial K_k} = 2K_k E\{\varepsilon_k^i\} - 2E\{\varepsilon_k(\underline{W}_{k-1} - \underline{W}_{\text{opt}})\} \quad (3)$$

(3) の  $E\{\varepsilon_k^i\}$  については、

$$\begin{aligned} E\{\varepsilon_k^i\} &= E\{(\underline{W}_{k-1}^T \underline{X}_k - s_k)^2\} \\ &= E\{[\underline{X}_k^T(\underline{W}_{k-1} - \underline{W}_{\text{opt}}) - e_{k,\text{opt}}]^2\} = \xi_{\min}(1 + \underline{X}_k^T \underline{Q}_{k-1} \underline{X}_k) \end{aligned}$$

但し、 $e_{k,\text{opt}}$  は、入力信号を最適重みベクトル  $\underline{W}_{\text{opt}}$  でフィルタした時に生じる誤差であり、

$$s_k = \underline{X}_k^T \underline{W}_{\text{opt}} + e_{k,\text{opt}}$$

で定められる。(3) の第2項については、

$$E\{\varepsilon_k(\underline{W}_{k-1} - \underline{W}_{\text{opt}})\} = E\{(\underline{W}_{k-1} - \underline{W}_{\text{opt}})[\underline{X}_k^T(\underline{W}_{k-1} - \underline{W}_{\text{opt}}) - e_{k,\text{opt}}]\} = \xi_{\min} \underline{Q}_{k-1} \underline{X}_k$$

ゆえに、(3) の右辺を零とすることより、カルマン利得を求めると、(3.6) が求められる。

## 文 献

- 1) B. Widrow, P. E. Mantey, L. J. Griffiths, and B. B. Goode: Proc, IEEE, Vol. 55 (1967), 12, p. 2143-2159.
- 2) D. Godard: IBM J. Res. DEVELOP. 1974, 5, p. 267-274.
- 3) 有本 卓: カルマン フィルタ (昭52), 3章, 産業図書.
- 4) Richard D. Gitlin and Francis R. Magee, JR: IEEE Trans. on Communications, Vol. COM-25 (1977), 7, p. 666-672.
- 5) L. J. Griffiths: Proc, IEEE, Vol. 57 (1967), 10, p. 1696-1704.
- 6) O. L. Frost, III: Proc, IEEE, Vol. 60 (1972), 10, p. 926-935.