北海道大学工学部研究報告
第89号（昭和53年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University No. 89 (1978)

組合せ入力関数による最適制御（第1報）

―― システムとアルゴリズムの一般モデル ――

大内 東* 宮腰昭男** 加地郁夫***

（昭和53年3月31日受理）

Optimal Control by Combinatorial Input Functions

Azuma O-UCHI Akio MIYAKOSHI Ikuo KAJI

(Received March 31, 1978)

Let Σ be an arbitrary dynamical system, T a set of control times, $\tau=\{t_0, t_1, \cdots, t_N\}$ a finite set of control switching time, U_i a finite set of admissible control function available in a control time period of $T_i=(t_{i-1}, t_i]$.

The problem here is to obtain the sequences of control functions for the system Σ which minimizes the objective function subject in the presence of certain constraints. This problem is a sequential decision process with a finite decision set.

We give a general model for the system and algorithm.

1. まえがき

動的システムΣに対して制御時間集合T, T内の有限個の制御切り換え時刻集合$\tau=\{t_0, t_1, \cdots, t_N\}$, 時間区間$T_i=(t_{i-1}, t_i]$において使用可能な入力関数の有限集合$\mathfrak{U}_i$が与えられたとき，$t_0$から$t_N$までの評価関数を最小にする最適制御問題を考える。すなわち，各t_iにおいて$(t_i, t_{i+1}]$における制御入力関数を有限個の組の中から1つ選択し，考察期間Tにおける評価関数を最小にする入力関数列を決定する問題である。本報告はこの問題の一般モデルとアルゴリズムについて述べている。アルゴリズムはこの問題が有限決定集合からなる逐次決定過程であることに注目し，分枝限定法を適用している。本モデルはt_iにおける決定がt_0からt_{i-1}までの入力関数列の型に依存する場合も含み動的計画法の適用では効率の良いアルゴリズムは得られない。また，各t_iにおいて使用可能な入力関数を有限個に制限することによって，現実的なモデルとなっている。

2. 諸定義[1)]

動的システムを$\Sigma=\langle T, X, U, \Omega, \phi\rangle$と表わす。ただし，$T\subset \boldsymbol{R}$は制御時間集合，$X\subset \boldsymbol{R}^n$は状態集合，$U\subset \boldsymbol{R}^m$は入力値集合，$\Omega=\{\omega|T\to U\}$は許容入力関数の集合，$\varphi: T\times T\times X\times\Omega\to X$は状態遷移関数である。すなわち，時刻$t\in T$に状態$x(t)\in X$にあるシステムは許容入力関数$\omega\in\Omega$のもとで時刻$t'\geq t$にとる状態$x(t')$は，$x(t')=\varphi(t'; \mathrm{t}, x, \omega)\in X$と表わされる。

---

* 北海道大学工学部電気系統工学講座 助手
** 札幌大学経営学科 講師
*** 北海道大学工学部電気工学科系統工学講座 教授

Σ に対する制御情報を $\Gamma=\langle t, \omega_0, \mathfrak{U}, x_0, X_F, \pi, k_0\rangle$ と表わす。ただし，$\tau=\{t_0, \cdots, t_N\}$, $t_i\in T$, $i=0, \cdots, N$ は制御切り換え時刻の有限集合で t_0, t_N はそれぞれ制御開始時刻および制御終了時刻である。τ により T は N 分割される。すなわち，$\cup_{i=1}^{N} T_i=T$, $T_i\cap T_j=\phi$, $i\neq j$, $T_i=(t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \cdots, N$。一般に関数 f: $T\to U$ に対して，その定義域を T から $(t, t']$ に制限して得られる関数をセグメントと呼び，$f_{(t,t']}$: $(t, t']\cap T\to U$ で表わす。特に定義域を T_i に制限したセグメントを f_i: $T_i\cap T\to U$ と表わす。$\omega_0\in\Omega$ は時刻 t_0 までに使用していた入力関数である。

$\mathfrak{U}$ は T_i において使用可能な入力関数のセグメントの有限集合を $\mathfrak{U}_i=\{u_i|u$: $T_i\cap T\to U$, $u\in\Omega\}$ とするとき，$\mathfrak{U}=\mathfrak{U}_1\times\mathfrak{U}_2\times\cdots\times\mathfrak{U}_N$ である。$\mathfrak{U}_i$ の濃度を $|\mathfrak{U}_i|=n_i$ で表わす。$\mathfrak{U}_k, \mathfrak{U}_{k+1}, \cdots, \mathfrak{U}_l$ から順に1個ずつ要素をえらび，これを連接して得られるセグメントの系列を Δ_{kl} で表わす。$\Delta_{kl}=\{u_k u_{k+1}\cdots u_l|u_i\in\mathfrak{U}_i$, $i=k, \cdots, l\}$, $k, l=1, \cdots, N$。Δ_{kl} の長さ $|\Delta_{kl}|$ を $\delta\in\Delta_{kl}$ に含まれるセグメントの個数で定義する。$\delta\in\Delta_{kl}$ に対して $|\Delta_{kl}|<N$ のとき δ を部分政策，$|\Delta_{kl}|=N$ のとき単に政策という。特に Δ_{1j} を Δ_j, $\Delta_{(j+1)N}$ を $\bar{\Delta}_j$ と略記する。$\Delta=\cup_{i,j}\Delta_{ij}$ とおく (Fig. 1 参照)。

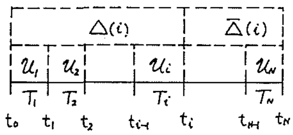

Fig. 1. Illustration for U_i, $\Delta(i)$ and $\bar{\Delta}(i)$.

$x_0\in X$ は t_0 における Σ の初期状態，$X_F\in X$ は t_N における Σ の最終状態の集合である。

π: $T\times X\times(X^T)\times\mathfrak{U}\to\boldsymbol{R}$ はコスト関数で (X^T) は関数 f: $T\to X$ の全体が作る集合である。$J(t', x(t'), \delta, t, x(t))\equiv\pi(t', x(t'), \phi_{(t,t']}(\cdot\,; t, x, \delta), \delta)$ とおくと J は Σ が $x(t)$ から $x(t')$ に遷移したときの制御コストである。以後簡単のため時刻 t_i における状態 $x(t_i)$ を x_i と略記する。最後に k_0 は Σ の初期コストとする。

Σ の最適制御問題 P を「Σ に対して Γ が与えられたとき，$u_i\in\mathfrak{U}_i$ の系列からなる政策 $\delta\in\Delta$ で，$\delta\in\Omega$ かつ $J(t_N, x_N, \delta, t_0, x_0)$ を最小にする δ を求める問題」と定義する。$t_i\in T$ において1つの $u_i\in\mathfrak{U}_i$ を選択することは1つの決定であり，$\mathfrak{U}_i$ が有限集合であるからこの問題は有限決定集合からなる N 段決定問題である。

3. 最適政を求めるアルゴリズム

問題 P は次のようにして解くことができる。「時刻 t_0 より始めて，各 t_i 毎に1つのセグメント $u_i\in\mathfrak{U}_i$ を選択し，これらを連接して得られる部分政策 $\delta'\in\Delta$ を構成し，$t_0\leqq t\leqq t_i$ に対して $\delta'(t)\in U$, $x(t)=\varphi(t\,; t_0, x, \delta')\in X$ を調べる。これらの条件を満す δ' のみを残し，$t=t_N$ で $x_N\in X_F$ となる政策 $\delta\in\Delta$ で，$J(t_N, x_N, \delta, t_0, x_0)$ を最小にする δ^* を見い出す。この手続きは有限回で終了する。」

上述の解法を効率よく行うために分枝限定法[2),3),4)] によりアルゴリズムを構成する。以下の記号を定義する。

$\Delta(x_i)=\{\delta\in\Delta|(\varphi(t_i\,; t_0, x, \delta)=x_i)\wedge(x(t)\in X, \delta(t)\in U, t_0\leqq t\leqq t_i)\}$ は時刻 t_i で x_i となる実行可能部分政策の集合，

$\Delta(i)=U_{x_i\in X}\Delta(x_i)$ は時刻 t_i までの実行可能部分政策の集合，

$\Delta(N)=U_{x_N\in X_F}\Delta(x_N)$ は実行可能政策の集合，

$\Delta^*=\{\delta^*\in\Delta(N)|J(t_N, x_N, \delta^*, t_0, x_0)\leqq J(t_N, x_N, \delta, t_0, x_0)$, ${}^{V}\delta\in\Delta(N)\}$ は最適政策の集合，

とする。以後 $J^*\equiv J(t_N, x_N, \delta^*, t_0, x_0)$, ${}^{V}\delta^*\in\Delta^*$ とおく。

分枝限定法は緩和と推測から構成される。すなわち，原問題の制約条件を緩和してより易しい問題（これを部分問題という）を考え，部分問題を逐次に解いて原問題の最適政策を推測し，

最適政策を含まないことが判明した政策の集合を捨てていくことにより最終的に原問題の最適政策を見い出す。

3.1 問題の緩和

$X, X_F, U, \mathfrak{U}$ の拡張集合 $\tilde{X}\supset X$, $\tilde{X}\supset\tilde{X}_F\supset X_F$, $\tilde{U}\supset U$, $\Omega\supset\tilde{\mathfrak{U}}\supset\mathfrak{U}$ を考える。これに伴い φ の定義域も自然に拡張し，φ: $T\times T\times\tilde{X}\times\Omega\to\tilde{X}$ として，これらの拡張集合の上で $\tilde{\Delta}_{kl}$, $\tilde{\Delta}$, $\tilde{\Delta}(x_i)$, $\tilde{\Delta}(i)$, $\tilde{\Delta}(N)$, $\tilde{\tilde{\Delta}}_i$ を前と同様に定義する。また新たに $X(i)$, $i=1, 2, \cdots, N-1$ を定義する。

$$X(i)=\left\{\tilde{\delta}\in\tilde{\tilde{\Delta}}_i|\varphi(t_N;\ t_i,\ x,\ \tilde{\delta})\in\tilde{X}_F\wedge\left(x(t)\in\tilde{X},\ \tilde{\delta}(t)\in\tilde{U},\ t_i<t\leqq t_N\right)\wedge(\delta'\tilde{\delta}\in\tilde{\Delta}(N),\ \delta'\in\Delta(i))\right\}$$

$X(i)$ は $\delta'\in\Delta(i)$ に $\tilde{\delta}$ を連接して得られる政策 $\delta'\tilde{\delta}$ が拡張集合の上で実行可能となる t_i 以後の部分政策の集合である。

$$\tilde{X}=\{\delta=\delta'\tilde{\delta}|\delta'\in\Delta(i),\ \tilde{\delta}\in X(i)\}$$

とする。

下限関数 l を l: $T\times\tilde{X}\times(\tilde{X}^T)\times\tilde{\mathfrak{U}}\to\boldsymbol{R}$ であり

$$L\Big(t',\ x(t'),\ \tilde{\delta},\ t,\ x(t)\Big)\equiv l\Big(t',\ x(t'),\ \varphi_{(t,t']}(\cdot\ ;\ t,\ x,\ \tilde{\delta}),\ \tilde{\delta}\Big),\ t, t'\in T$$

とおくとき

$$L\Big(t',\ x(t),\ \tilde{\delta},\ t,\ x(t)\Big)\leqq\pi\Big(t',\ x(t),\ \tilde{\delta},\ t,\ x(t)\Big),\ {}^{\forall}\tilde{\delta}\in\tilde{X}$$

を満す実数値関数とする。簡単のため下限値を $l(\delta)$ と略記することがある。

上限関数 h を h: $T\times X\times X^T\times\mathfrak{U}\to\boldsymbol{R}$ であり，

$$H\Big(t',\ x(t'),\ \delta,\ t,\ x(t)\Big)\equiv h\Big(t',\ x(t'),\ \varphi_{(t,t']}(\cdot\ ;\ t,\ x,\ \tilde{\delta}),\ \tilde{\delta}\Big)$$

とおくとき

$$H\Big(t',\ x(t'),\ \delta,\ t,\ x(t)\Big)\leqq\pi\Big(t',\ x(t'),\ \delta^*,\ t,\ x(t)\Big),\ {}^{\forall}\delta\in\Delta(N),\ \delta^*\in\Delta^*$$

を満す実数値関数とする。

通常は上限関数としてコスト関数を使用し，問題を解く過程で得られる実行可能政策をコスト関数に代入して決まる値を最適政策のコスト J^* の上限値として用いることが多い。この上限値を K とする。$K\leqq J^*$。

3.2 推　　測

部分政策 $\delta'\in\Delta(i)$ と $\tilde{\delta}\in X(i)$ を連接して得られる政策 $\delta=\delta'\tilde{\delta}$ を用いて，δ' が最適政策のセグメントとなり得るか否かを判定するのが推測である。

補助定理 1.　コストによる推測

$$L\Big(t_N,\ x_N,\ \delta,\ t_0,\ x_0\Big)>K,\ \delta=\delta'\tilde{\delta},$$
$$\times\delta'\in\Delta(i),\ {}^{\forall}\tilde{\delta}\in X(i)\qquad(1)$$

ならば $(\delta'\cdot)\notin\Delta^*$。

補助定理 2.　状態による推測

$$\varphi\Big(t_N,\ t_0,\ x,\ \delta\Big)\notin\tilde{\Delta}(N),\ \delta=\delta'\tilde{\delta},$$
$$\times\delta'\in\Delta(i),\ {}^{\forall}\tilde{\delta}\in X(i)$$

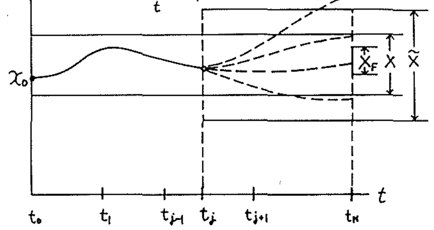

Fig. 2. An Example for fathom of state.

ならば $(\delta'\cdot)\notin \Delta(N)$ (Fig. 2 参照)。

補助定理1は δ' に δ' を連接した政策 $\delta=\delta'\tilde{\delta}$ に対して (1) 式が成立すれば δ' が最適政策のセグメントにはなり得ないことを示す。また補助定理2はこの条件が成立すれば δ' が実行可能政策のセグメントにはならないことを示す。証明はいずれも $\tilde{\delta}$ がもとの集合を含む拡張集合の上で定義されていることから明らかである。

3.3 アルゴリズム

ステップ1. $\Delta(0)\leftarrow\omega_0$, $J^*\leftarrow\infty$, $\Delta^*\leftarrow\phi$ とセットする。

ステップ2. ω_0 に $\tilde{\delta}\in X(1)$ を連接して政策 $\delta=\omega_0\tilde{\delta}$ をつくる。推測により $\delta\in\tilde{X}$ を調べる。$\delta\in\tilde{X}$ なら下限値 $l(\delta)$ を計算して ω_0 と $LB(\omega_0)$ をリストへ記憶し，ステップ3へ。$\delta\notin\tilde{X}$ ならば実行可能政策はない。終了。

ステップ3. $\Delta\neq\phi$ ならばステップ4へ，$\Delta=\phi$ ならステップ7へ。

ステップ4. リストの中から最小の下限値を持つ δ' を取り出す。$\delta'\in\Delta(k)$ とする。取り明した δ' と $LB(\delta')$ はリストから消す。$J^*<LB(\delta')$ なら J^* が最小値であり，Δ^* が求める最適政策である。終了。$J^*\geqq LB(\delta')$ なら $D=\phi$ としてステップ5へ。

ステップ5. $\hat{\delta}\in\mathfrak{U}_{k+1}-D\neq\phi$ を1つえらび，$D\leftarrow\{\hat{\delta}\}\cup D$ とする。

ステップ5.1. δ' に $\hat{\delta}$ と $\tilde{\delta}\in X(k+1)$ を連接して政策 $\delta=\delta'\hat{\delta}\tilde{\delta}$ をつくる。推測により $\delta\in\tilde{X}$ を調べる。$\delta\in\tilde{X}$ ならば下限値 $l(\delta)$ を計算しステップ5.2へ，$\delta\notin\tilde{X}$ ならステップ5.3へ。

ステップ5.2. $k+1=N$ ならばステップ6を実行する。$k+1>N$ ならば $l(\delta)$ と J^* を比較して $J^*<l(\delta)$ なら $\delta\in\Delta(k+1)$ として δ と $LB(\delta)$ をリストへ記憶する。ステップ5.3へ。$J^*>l(\delta)$ なら δ や $LB(\delta)$ は記憶する必要がない。ステップ5.3へ。

ステップ5.3. $\mathfrak{U}_{k+1}-D\neq\phi$ ならステップ5へ。$\mathfrak{U}_{k+1}-D=\phi$ ならステップ3へ。

ステップ6. $l(\delta)>J^*$ ならステップ5へ，$l(\delta)<J^*$ なら $J^*=l(\delta)$, $\Delta^*=\Delta^*\cup\{\delta\}$ としてステップ5へ。

ステップ7. $J^*=\infty$ ならば問題は実行可能政策を持たない。$J^*<\infty$ ならば Δ^* が求める最適政策の集合である。終了。

補助定理1, 2と τ, $\mathfrak{U}$ が有限集合であることからアルゴリズムの有限性は明らかである。

定理

上述のアルゴリズムは有限回で終了する。

あとがき

本報告で与えたモデルとアルゴリズムの適用例として，原子炉の最適炉停止問題を解いた。この結果については機会を改めて報告したい。

終りに本研究に際し，御討議いただいたCORG研究会のメンバー，特に関口恭毅(北大経済学部経営学)，若林信夫(小樽商大管理科学)，久保洋(北大大型計算センター)の各助教授に感謝の意を表します。

参考文献

1) Kalman, R. E, *et al.*: Topics in Mathematical System Theory (1969), McGraw-Hill.
2) Lawler, E. L., Wood, D. E.: Opens. Res. **14** (1966), 1, p. 696.
3) Mitten, L. G.: Opens. Res. **18** (1970), 1 p. 24.
4) Morin, T. L., Marster, R. E.: Opens. Res. **24** (1976), 1, p. 611.