



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	エネルギー原理によるSurface-Preservingモードの安定性解析
Author(s)	本間, 利久; 鬼頭, 正史; 加地, 郁夫
Citation	北海道大學工學部研究報告, 90, 121-127
Issue Date	1978-11-29
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41510
Type	departmental bulletin paper
File Information	90_121-128.pdf



エネルギー原理による Surface-Preserving モードの安定性解析

本間 利久* 鬼頭 正史** 加地 郁夫***

(昭和53年6月30日受理)

Stability Analysis of Surface-Preserving Modes by an Energy Principle

Toshihisa HONMA* Masafumi KITO** and Ikuo KAJI***

(Received June 30, 1978)

Abstract

A stability criterion for surface-preserving modes in closed-line systems in an axisymmetrical toroidal plasma is derived from an energy principle. The criterion is compared with a criterion for localized modes of plasma with closed-line field. There exists a discontinuity between those criteria. The stability criterion for the surface-preserving modes is represented by elliptic quadratic curves for toroidal plasmas.

1. 緒 言

最近の電子計算機による数値解法の発展にともない、軸対称トロイダルプラズマの固有モードの解析が行なわれているなかで、解析的な立場からも規準モード法を用いた surface-preserving モードと局所モード (Mercier モード) の解析が行なわれ、成長率が計算されている¹⁾。この解析によると、surface-preserving モードは、磁気面上の磁力線が閉じているプラズマで生じ、局所モードは、磁力線のシャワーのあるプラズマで生じるモードである。そのため、円柱プラズマの立場から、これらのモードを観察すると、前者は、line-preserving モード^{2,3)} (純交換形モード⁴⁾) に、後者は、Suydam モード^{2,5,6)}に対応していると推察される。さらに、磁力線のピッチの一定な円柱プラズマでは、純交換形モードと Suydam モードの安定条件は異なることが解析されているから^{4,7)}、軸対称トロイダルプラズマでも同様な安定条件の不一致性が認められると思われる。

一方、プラズマの安定性解析の手法であるエネルギー原理を用いた解析では、Mercier モードに対して解析されているが⁸⁾、surface-preserving モードに対するエネルギー原理による解析は、まだ、なされていない。そのため、本論文では、エネルギー原理の立場から、surface-preserving モードの安定条件を導出し、この安定条件と Mercier の安定条件とを比較することにより、軸対称トロイダルプラズマにおける安定条件の不一致性および安定領域を調べることを目的として

* 情報工学専攻情報システム工学講座

** 電子技術総合研究所

*** 電気工学科系統工学講座

* Division of Information Engineering, Graduate School of Engineering, Hokkaido University, Sapporo 060

** Electrotechnical Laboratory, Tanashi, Tokyo 188

*** Department of Electricity, Faculty of Engineering, Hokkaido University, Sapporo 060

いる。

以下、第2章においては、軸対称トロイダルプラズマのエネルギー原理を導出し、第3章で、エネルギー原理を用いた surface-preserving モードの解析を行い、安定条件をもとめる。第4章では、Mercier モードとの相互関係および安定領域について調べ、その結果を、第5章においてまとめる。

2. 基礎方程式

円柱座標 (R, ϕ, Z) で記述した平衡時の軸対称トロイダルプラズマの物理量は、 ϕ に依存しないため、ポロイダル磁束関数 $\psi(R, Z)$ は、

$$\frac{\partial \psi}{\partial Z} = RB_R, \quad \frac{\partial \psi}{\partial R} = -RB_Z$$

と定義される。ただし、磁束密度 $\mathbf{B} = (B_R, B_\phi, B_Z)$ 。つぎに、関係式

$$\nabla \psi \cdot \nabla \chi = 0$$

を満足する関数 $\chi(R, Z)$ は、 $\psi = \text{定数}$ (磁気面)、 $\phi = \text{定数}$ なる面に直交する $\chi = \text{定数}$ なる面を形成するので、この様にして構成される座標系を磁束座標と称すると、この座標の線元素は、

$$(ds)^2 = h_1^2(d\psi)^2 + h_2^2(d\chi)^2 + h_3^2(d\phi)^2 \quad (2-1)$$

となる。

ただし、

$$h_1 = \frac{1}{RB_\chi}, \quad h_2 = JB_\chi, \quad h_3 = R, \quad B_\chi = \sqrt{B_R^2 + B_Z^2}$$

J はヤコビアン、 B_χ はポロイダル磁束密度である。

また、平衡プラズマの軸対称性から、 $P = P(\psi)$, $I = I(\psi) \triangleq RB_\phi$ となるから、平衡方程式は、

$$P' + \frac{1}{J}(JB_\chi^2)' + II' \frac{1}{R^2} = 0 \quad (2-2)$$

となる。ここで、プライムは、 ψ に関する微分を示し、トロイダル磁束密度 B_ϕ 、プラズマ圧力 P 、 $B_\chi = B_\chi(\psi, \chi)$, $R = R(\psi, \chi)$, $J = J(\psi, \chi)$ である。

この平衡方程式 (2-2) のもとで、境界の固定したプラズマの安定性をエネルギー原理⁹⁾

$$\delta W = \frac{1}{2} \int d\tau \{ |\mathbf{Q} + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\xi})(\mathbf{j} \times \mathbf{n})|^2 + \gamma P |\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}|^2 - 2 |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\xi}|^2 (\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n} \} \quad (2-3)$$

を用いて解析する。ただし、磁気面に垂直な単位ベクトル $\mathbf{n}$ 、導体壁上で $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$ を満足する摂動ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ 、電流密度 $\mathbf{j}$ 、比熱比 γ 、 $\mathbf{Q} \triangleq \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B})$ とする。摂動ベクトルの ϕ に関するフーリエ展開

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_k \boldsymbol{\xi}_k(\psi, \chi) e^{ik\phi} \quad (2-4)$$

を、モード数 k に対してエネルギー原理 (2-3) 式に適用すると、

$$\begin{aligned} \delta W = \pi \int d\psi d\chi J \left[\frac{1}{R^2 B_\chi^2} |F \boldsymbol{\xi}|^2 + B^2 |D(J \boldsymbol{\xi}) - 2 \frac{\kappa_n}{R B_\chi} \boldsymbol{\xi} + \frac{R B_\phi}{B^2} G \eta|^2 + \frac{R^2 B_\chi^2}{B^2} |F \eta + \right. \\ \left. 2 \frac{B_\phi}{R^2 B_\chi} (\kappa_p - \kappa_t) \boldsymbol{\xi}|^2 + \gamma P |D(J \boldsymbol{\xi}) + G \left(\frac{R B_\phi}{B^2} \eta \right) + F \left(\frac{R B_\chi}{B^2} \zeta \right)|^2 + \frac{2}{R B_\chi} \{ P' \kappa_p + \frac{II'}{R^2} (\kappa_p - \kappa_t) \} |\boldsymbol{\xi}|^2 \right] \end{aligned} \quad (2-5)$$

を得る。ここで、 $\boldsymbol{\xi} = R B_\chi \boldsymbol{\xi}_\phi$ 、 $\eta = (B_\phi \boldsymbol{\xi}_\chi - B_\chi \boldsymbol{\xi}_\phi) / R B_\chi$ 、 $\zeta = (B_\chi \boldsymbol{\xi}_\chi + B_\phi \boldsymbol{\xi}_\phi) / R B_\chi$ 、 $B^2 = B_\chi^2 + B_\phi^2$ 、演算子 D, F, G は、

$$D = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad F = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \chi} + ik \frac{B_\phi}{R}, \quad G = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \chi} - ik \frac{B_z^2}{RB_\phi}$$

と定義し、ポロイダル曲率 κ_p 、トロイダル曲率 κ_t 、法線曲率 κ_n は、

$$\kappa_p = \frac{R}{J} (JB_z)', \quad \kappa_t = B_z R', \quad \kappa_n = \frac{1}{B^2} (B_z^2 \kappa_p + B_\phi^2 \kappa_t)$$

ととまる。また、摂動ベクトルの添字 k は、省略している。さらに、エネルギー積分 (2-5) 式は、Goedbloed¹⁰⁾ の (23) 式の X, Y, Z を $J\xi, iRB_\phi\eta/B^2, iRB_z\zeta/B^2$ で書き変えたものに等しい。次節で、エネルギー積分 (2-5) 式から、surface-preserving 不安定性の安定条件を調べる。

3. Surface-Preserving 不安定性の安定条件

磁気面上の磁力線が閉じているプラズマを考察するため、関数

$$\Phi(\phi, \chi) = \exp \left[-ik \int_0^\chi q(\phi, \chi) d\chi \right] \quad (3-1)$$

を定義する。ここで、 $q \triangleq JI/R^2$ 、条件 $k \int_0^1 q(\phi, \chi) d\chi = 2\pi m$ の満足する m に対し、関数 $\Phi(\phi, \chi)$ は、 χ に関する周期性をもつ。

エネルギー積分 (2-5) 式は、

$$\delta W = \pi \int d\phi d\chi F \left(\phi, \chi, \xi, \frac{\partial \xi}{\partial \phi}, \frac{\partial \xi}{\partial \chi}, \xi^*, \frac{\partial \xi^*}{\partial \phi}, \frac{\partial \xi^*}{\partial \chi} \right) \quad (3-2)$$

と表わすことができるので、エネルギー積分 (3-2) 式の ξ^*, η^*, ζ^* に関するオイラー方程式は、

$$F_{\xi^*} - \frac{\partial}{\partial \phi} F_{\xi_\phi^*} - \frac{\partial}{\partial \chi} F_{\xi_\chi^*} = 0 \quad (3-3 \text{ a})$$

$$F_{\eta^*} - \frac{\partial}{\partial \chi} F_{\eta_\chi^*} = 0 \quad (3-3 \text{ b})$$

$$F_{\zeta^*} - \frac{\partial}{\partial \chi} F_{\zeta_\chi^*} = 0 \quad (3-3 \text{ c})$$

となる。ここで、 $*$ は複素共役を示し、 $F_{\xi^*} \triangleq \frac{\partial F}{\partial \xi^*}$, $F_{\xi_\phi^*} \triangleq \frac{\partial F}{\partial (\partial \xi^* / \partial \phi)}$, $F_{\xi_\chi^*} \triangleq \frac{\partial F}{\partial (\partial \xi^* / \partial \chi)}$ 、および F_{η^*} , $F_{\eta_\chi^*}$, F_{ζ^*} , $F_{\zeta_\chi^*}$ に対しても同様である。さらに、 $F_{\eta_\phi^*} = F_{\zeta_\phi^*} = 0$ の条件を用いている。

(3-2) 式の δW の停留値を評価するオイラー方程式 (3-3) の解をもとめるため、微小パラメータ ε を導入して摂動 ξ を

$$\xi = (\xi, \eta, \zeta) = \Phi(\phi, \chi) \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (\xi_i(\phi, \chi), \eta_i(\phi, \chi), \zeta_i(\phi, \chi)) \quad (3-4)$$

と展開する。以下の議論において、摂動の ϕ に関する微分のオーダーは、 $o(\varepsilon^{-1})$ と仮定する¹⁾。

(3-4) 式をエネルギー積分 (2-5) に代入し、 ε のべき数の等しい項に整理すると、

$$\begin{aligned} \delta W = \pi \int d\phi d\chi J & \left[\frac{1}{R^2 B_z^2} \left| \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i \right|^2 + B^2 \left| \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \xi_0}{\partial \phi} + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i B_i \right|^2 + \frac{R^2 B_z^2}{B^2} \left| \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i C_i \right|^2 \right. \\ & \left. + \gamma P \left| \frac{1 \partial \xi_0}{\varepsilon \partial \phi} + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i D_i \right|^2 + \frac{2}{RB_z} \left\{ P' \kappa_p + \frac{II'}{R^2} (\kappa_p - \kappa_t) \right\} \left| \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \xi_i \right|^2 \right] \triangleq \sum_{i=-2}^{\infty} \varepsilon^i W_i \end{aligned} \quad (3-5)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_i}{\partial \chi}, \quad B_i = X_i - \frac{2\kappa_n}{RB_z} \xi_i + \frac{I}{JB^2} \frac{\partial \eta_i}{\partial \chi}, \quad C_i = \frac{1}{J} \frac{\partial \eta_i}{\partial \chi} + 2 \frac{B_\phi}{R^2 B_z} (\kappa_p - \kappa_t) \xi_i, \\ D_i &= X_i + \frac{1}{J} \frac{\partial Y_i}{\partial \chi}, \quad X_i = \xi_i \frac{\partial}{\partial \phi} (\ln J \Phi) + \frac{\partial \xi_{i+1}}{\partial \phi} - ik \eta_i, \quad Y_i = \frac{1}{B^2} (I \eta_i + RB_z \zeta_i) \end{aligned}$$

一方, (3-4) 式をオイラー方程式 (3-3) に代入し, ξ_i, η_i, ζ_i なる展開係数を決定する方程式系を調べる。最初に, (3-3 b) と (3-3 c) 式から, 零次のオーダーの方程式

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial \eta \partial \chi} = 0 \quad (3-6)$$

から, (3-6) 式を満足する解として

$$\xi_0 = 0 \quad (3-7)$$

を考えると, (3-5) 式の展開項 W_{-2} と W_{-1} は,

$$W_{-2} = \pi \int d\phi d\chi J(\gamma P + B^2) \left[\frac{\partial \xi_0}{\partial \phi} \right]^2 = 0,$$

$$W_{-1} = \pi \int d\phi d\chi J(\gamma P + B^2) \left[\frac{\partial \xi_0}{\partial \phi} (B_0^* + D_0^*) + c.c. \right] = 0$$

となる。さらに, 摂動 (3-7) 式のもとで, (3-3) 式の零次のオーダーの方程式

$$B^2 \frac{\partial B_0}{\partial \phi} + \gamma P \frac{\partial D_0}{\partial \phi} = 0, \quad I \frac{\partial B_0}{\partial \chi} + \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{R^2 B_z^2}{B^2} C_0 \right) + ik J(B_0 + D_0) = 0, \quad \frac{\partial D_0}{\partial \chi} = 0 \quad (3-8)$$

から, 解

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial \chi} = 0, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial \phi} - ik \eta_0 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{I}{B^2} \eta_0 + \frac{R B_z}{B^2} \zeta_0 \right) = 0 \quad (3-9)$$

が導出される。このとき, (3-7) 式と (3-9) 式から, $B_0 = C_0 = D_0 = 0$ となり, (3-5) 式の展開項 W_0 と W_1 もまた

$$W_0 = \pi \int d\phi d\chi J \left[B^2 |B_0|^2 + \frac{R^2 B_z^2}{B^2} |C_0|^2 + \gamma P |D_0|^2 \right] = 0$$

$$W_1 = \pi \int d\phi d\chi J \left[B^2 (B_0 B_1^*) + \frac{R^2 B_z^2}{B^2} C_0 C_1^* + \gamma P D_0 D_1^* + c.c. \right] = 0$$

となる。

つづいて, (3-7) 式と (3-9) 式の摂動のもとで一次のオーダーの解析を行うと, (3-3 a) 式から, 一次のオーダーの方程式

$$B^2 \frac{\partial B_1}{\partial \phi} + \gamma P \frac{\partial D_1}{\partial \phi} = 0 \quad (3-10)$$

が得られ, 解

$$X_1 = -\frac{1}{\gamma P + B^2} \left(-\frac{2\kappa_n}{R B_z} B^2 \xi_1 + \gamma P \frac{\partial Y_1}{\partial \chi} \right), \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial \chi} = 0 \quad (3-11)$$

がもとまる。さらに, (3-3b) 式から得られた一次のオーダーの方程式 $\partial D_1 / \partial \chi = 0$ に, (3-11) を代入すると,

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \left\{ \gamma P B^2 \left(\frac{1}{J} \frac{\partial Y_1}{\partial \chi} + \frac{2\kappa_n}{R B_z} \xi_1 \right) \right\} = 0 \quad (3-12)$$

を得る。(3-12) 式を χ について積分すると

$$\frac{1}{J} \frac{\partial Y_1}{\partial \chi} + \frac{2\kappa_n}{R B_z} \xi_1 = \frac{\gamma P + B^2}{\gamma P B^2} f(\phi) \quad (3-13)$$

が得られるので, 積分定数 $f(\phi)$ は, (3-13) 式を χ についてもう一度積分することから,

$$f(\phi) = \frac{\oint d\chi J(2\kappa_n / R B_z)}{\oint d\chi J(\gamma P + B^2) / \gamma P B^2} \xi_1 \quad (3-14)$$

ともとまる。ただし, $\oint d\chi(\dots) = \int_0^1 d\chi(\dots)$ であり, ξ_1 は ϕ のみの関数である。

(3-11) 式と (3-13) 式の摂動に対し, (3-5) 式の展開項 W_2 はつぎようになる。

$$W_2 = \pi \int d\phi d\chi J \left[(\gamma P + B^2) \left| X_1 + \frac{1}{\gamma P + B^2} (B^2 Z_1 + \frac{\gamma P}{J} \frac{\partial Y_1}{\partial \chi})^2 \right|^2 + \frac{\gamma P B^2}{\gamma P + B^2} \left| \frac{1}{J} \frac{\partial Y_1}{\partial \chi} - Z_1 \right|^2 \right. \\ \left. + \frac{R^2 B_z^2}{B^2} \left| \frac{1}{J} \frac{\partial \eta_1}{\partial \chi} + \frac{2B_\phi}{R^2 B_z} (\kappa_p - \kappa_l) \xi_1 \right|^2 + \frac{2}{RB_z} \left\{ P' \kappa_p + \frac{II'}{R^2} (\kappa_p - \kappa_l) \right\} \left| \xi_1 \right|^2 \right] \triangleq \pi \int d\phi |\xi_1|^2 W(\phi) \quad (3-15)$$

ただし,

$$Z_1 = -\frac{2\kappa_n}{RB_z} \xi_1 + \frac{I}{JB^2} \frac{\partial \eta_1}{\partial \chi} \\ W(\phi) = \frac{1}{\oint d\chi J (\gamma P + B^2) / \gamma P B^2} \left\{ \left[\oint d\chi J (2\kappa_n / RB_z) \right]^2 + \oint d\chi J \frac{R^2 B_z^2}{B^2} \right. \\ \left. \times \left[2 \frac{B_\phi}{R^2 B_z} (\kappa_p - \kappa_l) \right]^2 \oint d\chi J \frac{\gamma P + B^2}{\gamma P B^2} \right\} + \oint d\chi J \left\{ P' \kappa_p + \frac{II'}{R^2} (\kappa_p - \kappa_l) \right\} \left(\frac{2}{RB_z} \right) \quad (3-16)$$

この結果, エネルギー積分 (3-5) 式は, $\delta W = \varepsilon^2 W_2 + o(\varepsilon^3)$ と表わされるので, W_2 の項が, δW において主要な項となる。そこで, W_2 の項の符号から, プラズマの安定性を調べると, その符号は, 磁気面 ϕ 上の $W(\phi)$ の符号のみに依存していることがわかる。その結果, 任意の ϕ の値に対して, $W(\phi)$ が正のとき, かつ, そのときにかぎり, W_2 は正となるため, surface-preserving 不安定性の安定条件は,

$$W(\phi) > 0 \quad (3-17)$$

となる。

安定条件 (3-17) 式は, Schwarz の不等式を用いて変形することができる。すなわち, (3-16) 式の第一項の分母を,

$$\oint d\chi J \frac{\gamma P + B^2}{\gamma P B^2} = \oint d\chi J \frac{\gamma P + B_z^2}{\gamma P B_z^2} - \oint d\chi J \frac{B_\phi^2}{B_z^2 B^2} \quad (3-18)$$

と書き換え, (3-18) 式の第二項に Schwarz の不等式を適用すると,

$$\oint d\chi J \frac{\gamma P + B^2}{\gamma P B^2} \leq \oint d\chi J \frac{\gamma P + B_z^2}{\gamma P B_z^2} - \frac{\left[\oint d\chi J B_\phi / RB_z \right]^2}{\oint d\chi J B^2 / R^2 B_z^2}$$

となる。さらに, Schwarz の不等式を (3-16) 式の分子にも同様に適用し, 計算すると, 安定条件 (3-17) 式は,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy > 0 \quad (3-19)$$

と与えられる。ただし,

$$x = \frac{1}{R^2} \left\langle \frac{\kappa_p}{RB_z} \right\rangle, \quad y = \left\langle \frac{\kappa_l - \kappa_p}{R^2 (RB_z)} \right\rangle, \quad a = R^4 \left\langle \frac{B^2}{R^2 B_z^2} \right\rangle, \quad b = I^2 \left\langle \frac{\gamma P + B_z^2}{\gamma P B_z^2} \right\rangle, \\ h = I^2 R^2 \left\langle \frac{1}{R^2 B_z^2} \right\rangle, \quad g = \frac{\Omega}{4} R^2 P', \quad f = -\frac{\Omega}{4} II', \\ \Omega = \left\langle \frac{B^2}{R^2 B_z^2} \right\rangle \left\langle \frac{\gamma P + B_z^2}{\gamma P B_z^2} \right\rangle - I^2 \left\langle \frac{1}{R^2 B_z^2} \right\rangle^2, \quad \langle \dots \rangle = \frac{\oint J d\chi (\dots)}{\oint J d\chi}$$

安定条件 (3-19) 式から, つぎのことが示される。

(1). 変数 $x, y, I, R, B_z^2, \gamma P$ を, 各々, $\lambda/r^2, \sigma/f, f, r, B_p^2, \rho a^2$ で置換すると, Pao により導出された安定条件に一致する⁴⁾。

(2). $B_\phi=0$ とすると, Spies によりもとめられた安定条件に一致する¹¹⁾。

$$\left\langle 2 \frac{(JB_z)'}{JB_z} \right\rangle \left\{ P' \left\langle \frac{\gamma P + B_z^2}{\gamma P B_z^2} \right\rangle + \left\langle 2 \frac{(JB_z)'}{JB_z} \right\rangle \right\} > 0$$

4. 安定条件の検討

4.1 Mercier の条件との関係

安定条件 (3-19) 式と Mercier により導出された安定条件との相互関係を調べる。Mercier の安定条件⁹⁾は,

$$P' \left\{ I^2 \left\langle \frac{1}{R^2 B_z^2} \right\rangle \left\langle \frac{\kappa_l - \kappa_p}{R^3 B_z} \right\rangle + \left\langle \frac{B^2}{R^2 B_z^2} \right\rangle \left\langle \frac{\kappa_p}{R B_z} \right\rangle \right\} + \frac{1}{8} \left\langle \frac{q'}{J} \right\rangle^2 > 0 \quad (4-1)$$

と表わされる。安定条件 (4-1) に, さらに, 磁力線の閉じている条件 ($\langle q'/J \rangle \rightarrow 0$) を適用すると,

$$g(hy + ax) > 0 \quad (4-2)$$

となり, (3-19) 式と (4-2) 式の安定条件は, 互いに異なることがわかる。すなわち, 最初から磁力線の閉じたプラズマを考察した場合と, 極限的に磁力線の閉じたものを考察したとき, 安定条件が一致しないことが示された。この様な現象は, すでに, 円形断面の円柱プラズマに対し指摘されている。そこで, 安定条件 (3-19) と (4-2) 式を円柱プラズマに適用した時, すでに知られている安定条件に一致するか否かを調べる。

まず最初に, $R=1$, $R'=0$, $\phi \rightarrow z$, $B_\phi \rightarrow B_z$ とすると, (3-19) 式と (4-2) 式は, 各々

$$\left\langle \frac{\kappa_p}{B_x} \right\rangle \left\{ (P' + B_z B_z') + \left\langle 2 \frac{\kappa_p}{B_x} \right\rangle \frac{\gamma P + B_z^2}{\langle (\gamma P + B_z^2) / B_z^2 \rangle} \right\} > 0 \quad (4-3)$$

$$\left\langle \frac{\kappa_p}{B_x} \right\rangle P' > 0 \quad (4-4)$$

となる。安定条件 (4-3) 式と (4-4) 式は, 非円形断面の円柱プラズマにおいても, 安定条件の一致しない構造がそのままのこされていることを示している。さらに, 円形断面の円柱プラズマを考えると, (4-3) 式と (4-4) 式は, 各々,

$$P' > - \frac{2B_z^2 \gamma P / r}{\gamma P + B_z^2} \quad (4-5)$$

$$P' > 0 \quad (4-6)$$

となる。ただし, プライムは, r に関する微分を示し, $\kappa_p = 1/r$ 。

安定条件 (4-5) 式と (4-6) 式は, 磁力線のピッチの一定なプラズマにおける安定条件の不一致性を示している。Goedbloed⁴⁾によると, (4-5) 式は純交換形モードの安定条件を, (4-6) 式は準交換形モードの安定条件を示している。このことから, 軸対称トロイダルプラズマにおいても, 円形断面の円柱プラズマにおける安定条件の不一致性の構造が, 安定条件 (3-19) と式 (4-2)-の形で組み込まれていると考えられる。

4.2 安定領域

安定領域を調べるために, 安定条件における独立な変数を x と y とし, 他の変数をパラメータと考えると, 安定条件 (3-19) 式の左辺は, 有心二次曲線の式となる。そこで, 二次曲線の性質を決める判別式

$$A = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & 0 \end{vmatrix} \quad (4-7)$$

を調べると、(3-19) 式の定義から、判別式 D は、 $D=I^2R^4Q$ となり、さらに、これに Schwarz の不等式を適用すると、

$$D \geq I^2R^4 \left\langle \frac{\gamma P + B^2}{\gamma P B^2} \right\rangle \left\langle \frac{B^2}{R^2 B^2} \right\rangle > 0 \quad (4-8)$$

となる。その結果、 $D > 0$ から $D < 0$ が導びかれる。このことは、二次曲線が、 x と y に関して楕円曲線となることを示している。

そこで、安定条件 (3-19) 式を、標準形で表現するため、座標の原点を (x_1, y_1) に移動し、その移動点のまわりで θ の座標軸の回転を行う。すなわち、

$$x = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta + x_1, \quad y = \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta + y_1$$

ただし、 $\bar{x}, \bar{y}$ は新座標軸を示し、 $\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}$, $x_1 = \frac{1}{D}(hf - bg)$, $y_1 = \frac{1}{D}(hg - af)$ 。その結果、安定条件は、標準形

$$A\bar{x} + B\bar{y}^2 > -\frac{D}{A} \quad (4-9)$$

の形でもとまる。ここで、 $\frac{D}{A} = gx_1 + fy_1$, $A+B=a+b$, $AB=a-b$, $A > B$ 。安定領域は、楕円曲線 (4-9) 式の外側である。

一方、Mercier の安定条件 (4-2) 式は、 $g \leq 0$ のとき、

$$y \leq -\frac{a}{h}x \quad (4-10)$$

と表わされ、安定領域は、直線 $y = -(a/h)x$ で仕切られた半平面となる。

5. 結 言

エネルギー原理による安定性解析の結果、規準モード法によるものと同一の安定条件を、surface-preserving モードに対してもとめることができた。さらに、この安定条件を Mercier の条件と比較することにより、円柱プラズマにおける安定条件の不一致性と同様の構造が、軸対称トロイダルプラズマにも保持されていることが示された。また、安定・不安定性の境界は、surface-preserving モードに対して楕円曲線で、Mercier モードに対して直線与えられることがわかった。

参 考 文 献

- 1) Pao, Y. P.: Phys. of Fluids **18** (1975) 1192.
- 2) Grad, H.: Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **70** (1973) 3277.
- 3) Pao, Y. P.: Phys. of Fluids **17** (1974) 600.
- 4) Goedbloed, J. P.: Physica **53** (1971) 535.
- 5) Suydam, B. R.: *Proc. 2nd Int. Conf. Peaceful Uses of Atomic Energy* (United Nations, Geneva, 1958) Vol. **31**, p. 157.
- 6) Pao, Y. P.: Nucl. Fusion **14** (1974) 25.
- 7) Honma, T., M. Kito and I. Kaji: J. Phys. Soc. Japan **37** (1974) 1644.
- 8) Mercier, C.: Nucl. Fusion **1** (1960) 47.
- 9) Bernstein, I. B., E. A. Frieman, M. D. Kruskal and R. M. Kulsrud: Proc. Roy. Soc. **A244** (1958) 17.
- 10) Goedbloed, J. P.: Phys. of Fluids **18** (1975) 1258.
- 11) Spies, G. O.: Phys. of Fluids **19** (1976) 427.