HOKKAIDO UNIVERSITY

| | |
|---|---|
| Title | 強震動外乱を受けるRC建物の全体系挙動に対する非線形モデル化手法 ： 幾何学的非線形効果をも包含した定式化 |
| Author(s) | 滝沢, 春男 |
| Citation | 北海道大學工學部研究報告, 92, 1-13 |
| Issue Date | 1979-01-31 |
| Doc URL | https://hdl.handle.net/2115/41546 |
| Type | departmental bulletin paper |
| File Information | 92_1-14.pdf |

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第92号（昭和54年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 92 (1979)

# 強震動外乱を受けるＲＣ建物の全体系挙動に対する非線形モデル化手法

## ――幾何学的非線形効果をも包含した定式化――

滝沢春男*

（昭和53年7月10日受理）

# An Overall Modelling of Fully Nonlinear R/C Buildings under Extreme Earthquakes

Haruo TAKIZAWA

(Received July 10, 1978)

**Abstract**

For describing the overall structural behaviour of planar R/C buildings, a self-contained set of fully nonlinear and dynamic formulations is presented in a mathematically consistent way. Limited degrees of freedom in system deformation, associated with a bare-minimum reduction of constituent restoring force elements, feature the model developed; without going into specific structural details, this modelling of a gross nature is primarily intended to cover a certain class of buildings by incorporating the relevant common properties of a particular interest. In addition to permitting to adequately reflect the inelastic and hysteretic characteristics, the current formulation accounts for the effects of nonlinear geometry in the deformed configuration, and can be used, with a practical sufficiency, for the purposes of clarifying significant features in the serious damage and ultimate failure sustained under the combined action of intense ground motion and gravity. The discussions also include the quantitative identification of the role of basic system parameters in this regard, and the related characterization of the destructive capabilities of excitation. In particular, the influence of failure concentration at a comparatively soft and vulnerable portion of structure is emphasized by comparison with other typical instances of overall failure.

## 1. 序　　論

強震地動の作用下に於いて損傷・倒壊事象が生起する動力学機構の実態を適切に記述し得る実用的手法の確立は，近年の構造工学が直面して来た基本問題の一つであり，各種構造要素の損壊領域での塑性・履歴挙動に関する実験データの体系的蓄積により補強された非線形構造解析技術の高度化は，地震工学的知見の増大等にも支えられ，旧来の〈地震応答解析〉の枠組を超えて著しい。特に，その耐震性能の確保が他種の構造形式と比較して相対的に容易ではなく，中規模

* 工学部建築構造学第一講座

程度の地震に際しても崩壊の危険性が高いRC造低層建物に対しては，1968十勝沖地震・1971 San Fernando地震等の震災経験に於ける現行・構造設計基準の重大な欠陥露呈を契機として，被害予測手法に関する研究が急速に進展し，多大の成果が得られているが[1]，他方，現実の構造物が示す遙かに複雑な挙動の本質的部分の把握に問題を限定しても，現状では未解明要素が尠なくない。

構造物の保有能力を外乱の諸特性との関わりで数量化する取り組みには，大別して2種の方向が考えられる。一つは特定の状況設定下での精細な解析を指向し，構成部材レベルでの規定因子に直接基づいて対象系の損壊挙動を明らかにするもので，個別的な構造詳細に即した震害・耐震性能の定量的理解に結び付く。RC造骨組に対して既に展開されたこの系統に属する解析法の最大の特徴は，応力-歪性状，或いは，断面性状に立脚する慣用の立場の放棄であり，部材特性の実状との対応性を十分に確保しようとする欲求に由来して，(単純な載荷条件下での)部材実験結果に直接依拠する原則に従う[2]。これに基づく解析法の体系化は，平面架構を対象としては，一応達成されており[3][4]，そこで必要不可欠な各部材要素の非線形モデル化手法(架構中に組み込まれた状態でのより複雑な多自由度載荷に対する特性への変換)についても種々の提案が為されているが[5][6]，立体架構問題への統一的拡張は未だ報告されてなく(柱材の材軸直交面内・2次元載荷に関するモデル化[7]はこの種の試みの一部と見做し得る)，今後の重要な基本課題である。一方，他の取り組み姿勢はこの逆方向に沿い，その成果を構造設計一般へ還元する事を企図して，対象を特殊に限定せずに個々の特性を捨象した或る構造物の群を採り挙げ，総体としての強震応答性状を導出する立場をとる。現論文の視点は後者にあり，この目的で採用すべきRC造平面架構の全体系挙動に対する非線形定式化を整合的に提示する。

本稿では先づ，塑性履歴挙動を集約的に反映する(材料的)非線形系の設定に関し，層を単位(復元力)要素とする慣用の剪断モデル概念に固有な欠陥の再確認を行ない，これに代わり得る全体系の簡略モデルを塑性変形機構に着目する事により定義して，以下に展開される議論の出発点とする。RC架構に於ける典型は，梁崩壊の卓越に伴なう損壊の全体的な進行と，柔で弱な部分に著しく局限されたそれとであり，余剰自由度を最大限に除去したこの置換操作に基づき，それぞれの損壊形式に応じ定式化される〈等価〉系に対して，幾何学的非線形効果を精確に包含した動的支配方程式を導く。幾何学的非線形性の考慮により現れる最主要項が，重力・上下動の倒壊現象への関与(いわゆる重力効果)を表わし，大変形に随伴して置換系に生じる不安定化作用を説明する。小変形で甚しく損傷する剛構造物であり，しかも，幾何学的非線形効果を認め得る変形領域に達する以前に，固有の復元力機能が顕著に劣化する事が稀でないRC架構に対しては，その強震応答解析に際して，圧縮軸力の転倒作用を算入しない立場が従来採られて来たが，十分な靱性の確保につれてこの効果の意義は高まり，倒壊が生起する終局状態を全面的に支配する因子となり得る。本論では引き続き，前記の典型的な損壊形式のそれぞれに於ける主要因子を抽出してその役割を明確にし，更に，強震動の基本性状に関連付けて動的倒壊限界の数値化を図る試みに言及する。又，そこで標準とされる全体損壊の場合と対比した局部的損壊効果の特定にも議論の重点をおく。

## 2. 復元力要素の配置構成

塑性変形の進展を大局的に記述する為の慣用法では，適当な手順[8]に拠り，各層毎に構成要素の塑性・履歴特性を層剪断力と層間変形との復元力対応関係に集約し，全体系をこれら層要素の直列結合とする原則に従う。これが構造物のいわゆる剪断モデル化であり，元来の対象であった

弾性域を超え，塑性応答計算に迄も無批判的に適用され続けて来たが，この復元力要素・配置方式の妥当性に関する根本的な疑問は，以前から一部で指摘されている。図１は，部材性状に直接依拠した精算解析[3]結果との比較により，この問題を具体的に検討した例[9]を再録したもので，同図左部は単純で基本的な６種の架構（$C_1$・Ｄは$A_1$・Ｂの梁をそれぞれ wall-girder 化，ＦはＥの壁を除去）につき，終局時・不安定機構を概略的に示す。即ち，Ａは２-DOF，Ｂ・Ｅは１-DOF モードの典型的な例であって，Ｃ・Ｄ・Ｆではそれらに３-DOF 型が混在するが，剛性・強度の両面からＣ・Ｄでは３-DOF 部，Ｆでは１-DOF 部，がより支配的となる。部材制御による応答の評価結果と層制御によるそれら（剪断置換法は３種で１・２が略算，３が精算）[3]とを同図右部で対比すると，柱降伏型が卓越して３-DOF 機構に近いＣ・Ｄ例で良好な一致が得られているのに反して，他例ではいづれの剪断モデル化も部材制御結果との本質的な相違を呈し，その分布形状と全く調和しない事実が明瞭である。Ｂ・Ｅ・Ｆでは全層，Ａでは１・２層，の塑性変形は降伏機構から諒解し得る相互に密接な従属関係にあり，剪断系置換がこの事情を顧慮せず，各層間変形に独立性を付与している必然的な結果が後者に他ならない。補言すると，極度に単純化してその経緯を明快に説明し得る[3]剪断系応答の特徴は，「弱い」層に於ける塑性変形の集中的な進展（特に下部要素が弱い場合にこの傾向は顕著）であって，層間連成降伏に対しては有効に定義し得ない降伏「層」剪断力の分布に応じ，特定層のみで過度の応答変形を評価する結果（Ｂ例２層・剪断置換-１がその典型）を招くわけである。よって，剪断モデル化で使用される復元力要素の設定方式を再考し，その程度に簡略な置換法により上記の欠陥を是正する必要が生じる。この解決策としては他の提案[10]もなされているが，塑性変形機構に従う拘束条件を予め降伏連成部分に課し，単一の復元力要素を構成させる操作は甚だ明快である。これを〈等価〉モデル化と名付け，前出の例に対して実行すると，同図に示す如く，この極めて単純な置換（系自由度が減少）により部材制御応答との対応性は格段に良好となる。（崩壊モード混在型のより適切な取り扱いは直列系の並列連結である。）こゝで，降伏機構は外力の作用形態に依存して一義的では当然あり得ないが，高次振動モードの励起が著しく微弱な短周期系に対するその特定は十分に可能であって，それに即応して復元力要素が配置

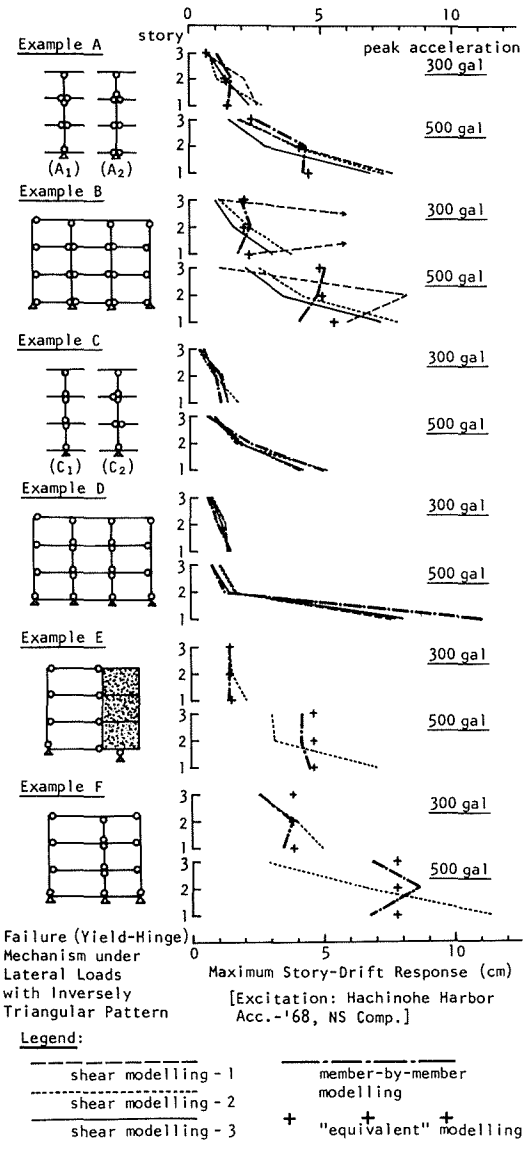


図１　単純なＲＣ骨組の強震応答評価例

された〈等価〉モデルの有効性を期待し得る。

## 3. 等価一自由度系の定式化と幾何学的非線形効果

本章での議論対象を，梁崩壊の卓越に伴ない損壊が全体的に進行する構造物〔図2-(a)がその例〕とし，これに対する等価系方程式の誘導に際して，図2-(b)に示す変形機構の簡略化を図る。即ち，前章で導入した等価系概念に従う1-DOF置換操作は同図右部・拘束架構の付帯と同等である点に注意し，又，有限変形に随伴する幾何学的錯綜を故意に回避する目的で，各材の変形能を節点位置での回転バネに帰属せしめ，中間部を剛とする。以下はこの種の系に対して厳密な整合性を有する非線形定式化の結果であり，まづ，図2-(c)・表1-(1)を参照すると，同表(2)が等価1-DOF系の釣合条件を一般に与え，従って，作用力が慣性力及び重力の場合(3)に限定しては(4)がその支配方程式となる。こゝで，この表示をより取り扱い易い形式に変換するには，変形・力・高さに関する換算量及び付随した2種の無次元係数を(5)の定義に拠り導入

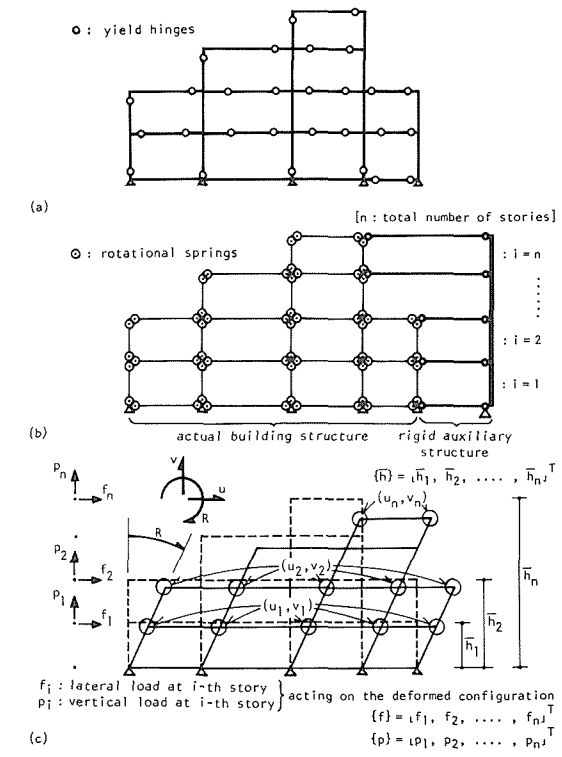


図2 等価一自由度系置換

表1 等価一自由度系の定式化

(1) $\{u\} = {}_t\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}^T$ : horizontal story-displacement vector (relative to the support)
$\{v\} = {}_t\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}^T$ : vertical story-displacement vector (relative to the support)
$\{u\} = \sin R\,\{\bar{h}\}$, $\{v\} = (-1 + \cos R)\{\bar{h}\}$ [R : translational angle]
$\mathfrak{M}$: generalized force associated with R in the incremental strain-energy relation, $dE = \mathfrak{M}\,dR$, of the total system

(2) $\cos R\ {}_t\{f\}\{\bar{h}\} - \sin R\ {}_t\{p\}\{\bar{h}\} = \mathfrak{M}$

(3) $\{f\} = -[m]\{(\ddot{u}) + \ddot{u}_0\{e\}\} = -[m]\{\overline{\cos R\,\ddot{R} - \sin R\,\dot{R}^2}\{\bar{h}\} + \ddot{u}_0\{e\}\}$
$\{p\} = -[m]\{(\ddot{v}) + \overline{g + \ddot{v}_0}\{e\}\} = -[m]\{\overline{-\sin R\,\ddot{R} - \cos R\,\dot{R}^2}\{\bar{h}\} + \overline{g + \ddot{v}_0}\{e\}\}$
where $[m]$ : story-inertia matrix of structure, $\{e\} = {}_t\{1, 1, \ldots, 1\}^T$;
$\ddot{u}_0$, $\ddot{v}_0$ : horizontal and vertical accelerations at the support of structure,
g : gravity constant

(4) ${}_t\{\bar{h}\}[m]\{\bar{h}\}\ddot{R} + {}_t\{\bar{h}\}[m]\{e\}(\ddot{u}_0\cos R - \overline{g + \ddot{v}_0}\sin R) + \mathfrak{M} = 0$

(5) $\Delta = \dfrac{{}_t\{\bar{h}\}[m]\{\bar{h}\}}{{}_t\{\bar{h}\}[m]\{e\}}R = HR$ : equivalent lateral drift (along the circular arc)

$A = \dfrac{\mathfrak{M}}{{}_t\{\bar{h}\}[m]\{e\}} = \dfrac{\mathfrak{M}/H}{(B/B')(\Sigma W/g)}$ : equivalent force (in terms of acceleration) associated with $\Delta$ ($\Sigma W$ : total weight of structure)

$H = \bar{h}_n/\beta$ : equivalent total height of structure

$\beta = \dfrac{{}_t\{\bar{h}\}[m]\{e\}}{{}_t\{\bar{h}\}[m]\{\bar{h}\}}\bar{h}_n$, $\beta' = \dfrac{{}_t\{e\}[m]\{e\}}{{}_t\{\bar{h}\}[m]\{e\}}\bar{h}_n$ : modification factors, depending upon the relative distribution of story-mass and story-height (The former is equivalent to the fundamental participation function at top story.)
[$\beta = 3n/(2n+1) = 1.0 \sim 1.5$ and $\beta' = 2n/(n+1) = 1.0 \sim 2.0$, for a uniform distribution of story-mass and interstory-height]

(6) $\ddot{\Delta} + A = -\ddot{u}_0\cos(\Delta/H) + (g + \ddot{v}_0)\sin(\Delta/H)$

(7) $\delta_i = h_i R = \beta\Delta/(\bar{h}_n/h_i)$ [$\simeq \beta(\Delta/n)$] : story-drift along the circular arc
($h_i = \bar{h}_i - \bar{h}_{i-1}$ : interstory height at i-th story)

(8) A/g : shear coefficients at all the stories, for a uniform distribution of lateral-force coefficients
$(\beta/\beta')(A/g)$ : base shear coefficient, for the distribution of lateral-force coefficients according to the specified mode of story-drifts

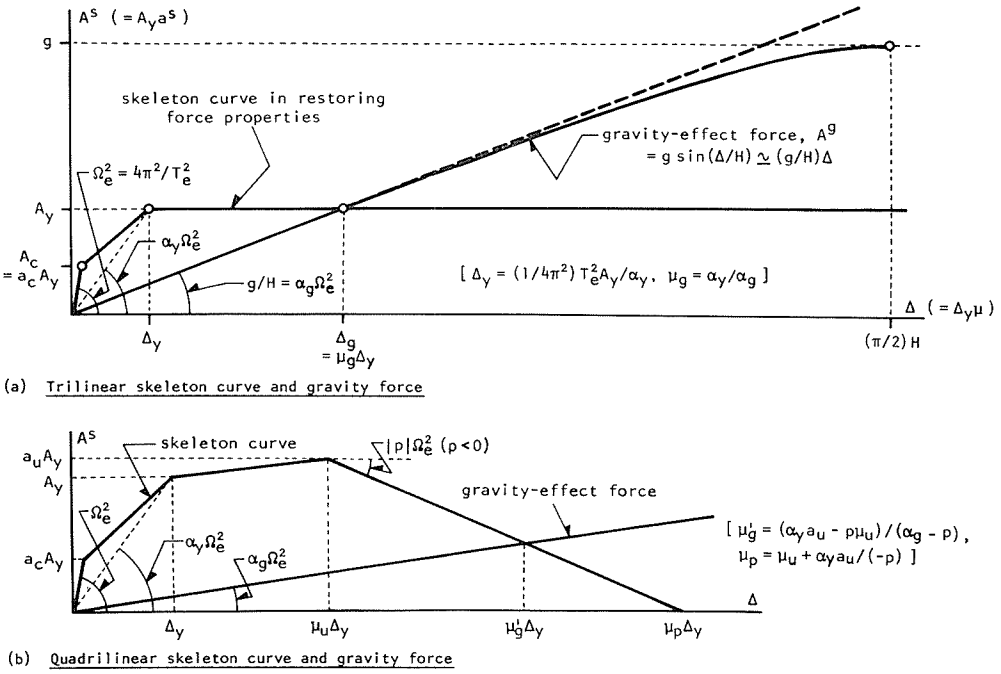


図３　静的復元力関係に於ける skeleton curve と重力効果

すればよく，初等的な１－DOF 系の幾何学的非線形性を含む記述[11]に一致した表式(6)が得られる。換算変形・換算力のそれぞれを層間変形・層剪断力係数に結び付ける関係は(7)・(8)であり，構造物の実体量との対応を明示する等価一自由度系の確定が塑性応答スペクトル[12)13)]に意義を付与する点にも留意すべきである。

上式でのΔ～Ａ（Ｒ～𝔐）関係は，等価置換操作に固有な変形モード規定の過程で，全体系の動的復元力性状を集約的に反映し，その静的評価は剪断モデル化の場合に準じればよい。図３はΔの履歴に依存する静的復元力（$A^s$）に関しその skeleton curve を，幾何学的非線形項のうち不安定化要因となる重力効果（$A^g$;同図での大きさは誇張）と対比させ，靱性部が存在する曲げ（曲げ剪断）破壊型につき例示したもので，最低限考慮すべき他の特徴は繰返載荷に於ける loop 形状が有する degrading 性[8)]である。同図-(a)を採ると，Δ～Ａ関係の規定因子を表２-(1)が指定し，よって(2)に従い時刻因子外で支配方程式の無次元化（鉛直地動は除外）を図ると，(3)に列挙する相互に独立な因子群の抽出に到る。幾何学的非線形性に由来するのがそこでの右端２因子であり，重力効果を表わす最低次項のみをとゞめる場合（$A_y/g \ll 1$ の条件下で許容され，初等的なＰ-Δ効果に対応）には，後者をこの群から省き得て，より簡明となる。重力の不安定効果を構造物自体

表２　等価一自由度系の構成因子

(1) $T_e$ (= 2π/Ω_e : elastic period), $A_y$ (: yield capacity), $a_c$ (= $A_c/A_y$, $A_c$ : crack capacity), $\alpha_y$ (: secant stiffness reduction factor at yield point), $\zeta_e$ (: viscous damping factor)

(2) $\mu(t) = \Delta(t)/\Delta_y$ [$\Delta_y$ : equivalent yield drift], $a(t) = A(t)/A_y$ } on the restoring force diagram

$\alpha_g = (g/H)/\Omega_e^2$ [g/H : initial gradient in $A^g = g \sin(\Delta/H)$]

$e(t) = \ddot{u}_0(t)/A_{max}$ [$A_{max}$ : peak acceleration of $\ddot{u}_0(t)$]
$I = A_{max}/A_y$ [: relative strength of excitation]

(3) $\mu = \mu(t;\ T_e,\ \zeta_e,\ a_c,\ \alpha_y,\ I,\ e(t),\ \alpha_g,\ A_y/g)$

(4) $T_e = (2\pi/\sqrt{g})\sqrt{h}\sqrt{\alpha_g}\sqrt{n/\beta}$ [$h = \bar{h}_n/n$ : average interstory height]
$= 3.89\sqrt{\alpha_g}\sqrt{n/\beta}$ [for h = 375 cm]

$K_1/\Sigma W = (\beta/\beta')/(h_1 \alpha_g)$ [$K_1$ : elastic stiffness at base story]
$= 2.67\,(\beta/\beta')/(\alpha_g \times 10^3)$ [for $h_1$ = 375 cm]

$R_y$ (= $\Delta_y/H$) = $(\alpha_g/\alpha_y)(A_y/g)$ [: yield translational angle]

(5) $\mu_g = \Delta_g/\Delta_y = \alpha_y/\alpha_g$ [$\Delta_g$ : static stability limit]

(6) $A^g/A_y = \sin(\Delta/H)/(A_y/g) \simeq (\Delta/H)/(A_y/g) = \mu/\mu_g$

(7) $\alpha_g = (\beta/\beta')\, h_1^{-1}/(K_1/\Sigma W)$
$= (2.0 \sim 2.7) \times 10^{-3}/(K_1/\Sigma W)$ [for $h_1$ = 375 cm, $\beta/\beta'$ = 1.0～0.75]
$= (9.0 \sim 0.7) \times 10^{-3}$ [for $K_1/\Sigma W$ = 0.3～3.0]

(8) $\alpha_g = \begin{cases} 6\times10^{-3} & \text{["soft"; } \mu_g = 33.3,\ K_1/\Sigma W = 0.444\,(\beta/\beta'),\ T_e = 0.301\sqrt{n/\beta}\text{]} \\ 1\times10^{-3} & \text{["stiff"; } \mu_g = 200,\ K_1/\Sigma W = 2.67\,(\beta/\beta'),\ T_e = 0.129\sqrt{n/\beta}\text{]} \end{cases}$
$a_c = 0.5$, $\alpha_y = 0.2$; $A_y/g = 0.25$ (merely for mathematical specificity)

(9) $a_u = 1.05$, $\mu_u = 3.0$, $p = -0.01$; thus, $\mu_p = 24.0$, $\mu'_g = \begin{cases} 15.0 & \text{("soft")} \\ 21.8 & \text{("stiff")} \end{cases}$

(10) $\{a_u + (-p)\mu_u/\alpha_y\}/\sqrt{1 + (-p)/\alpha_g} = \begin{cases} 0.73 & \text{("soft")} \\ 0.36 & \text{("stiff")} \end{cases}$

の復元機能と対置すべく導入されたこの無次元量 $\alpha_g$ は，系特性を表わす基礎的指標としての別解釈が可能であり，同表(4)には弾性周期（層数との相関性）・相対剛性（全体系の剛重比に相当[14]）・降伏点変形能（降伏耐力との連関）の規定に関わるその重要な役割を示す。又，(5)は重力の転倒作用の特定に有用な従属指標（静的安定限界の塑性率表示）を定義し，(6)の関係に拠る有効復元能力の減小度の把握を容易にする。

## 4. 全体損壊と入力強度

重力効果指標 $\alpha_g$ の数値評価は，前出の関係に従い，系の相対剛性（$K_1/\Sigma W$）[14]に基づくのが便利であり，表2-(7)に掲げる如く，その典型的値域を確定できる。本章では，これに架構の柔剛を代表する2種の値を択び，又，$a_c \cdot \alpha_y$ をそれぞれの標準値を固定して〔同表-(8)〕，等価1-DOF構造物の損傷・倒壊条件を入力地動との関わりで数値化した例を提示する。既載の方程式規準化に拠れば，この際の相対強度Ⅰと最大応答$\mu_{max}$とが，弾性周期$T_e$・層数n（$\beta$を含む）・重力効果

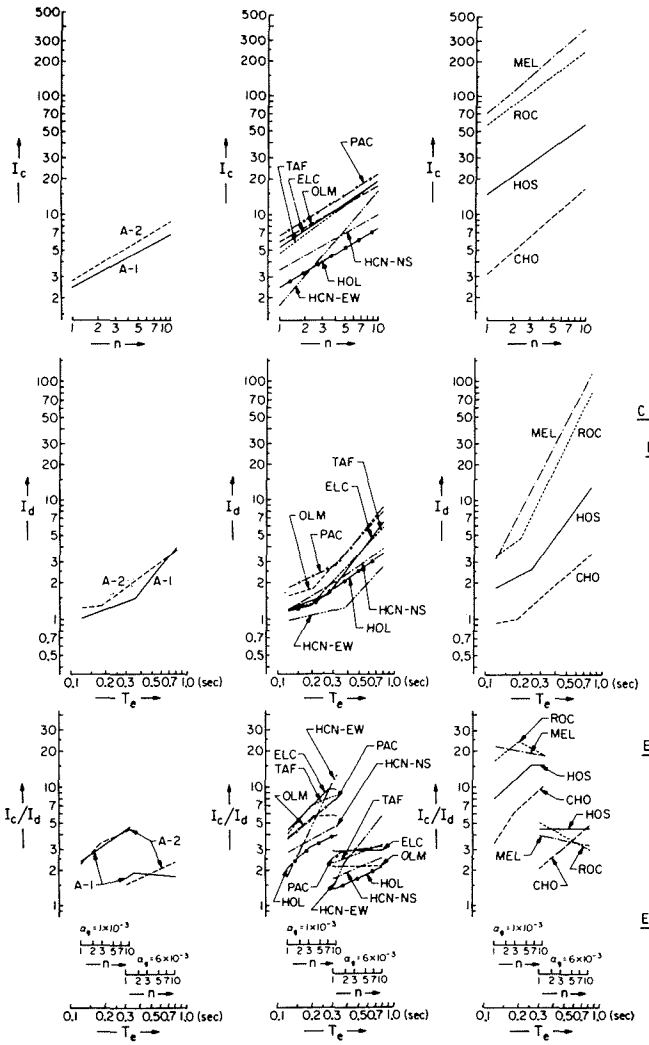


図4 倒壊相対強度（$I_c$）・損傷相対強度（$I_d$）・余剰安全度（$I_c/I_d$）の単純化表示

指標$\alpha_g$の内の２因子，及び，入力の単位最大振幅・時刻歴形状を介して対応する点に留意し，〈損傷〉を$\mu_{max}=3$の応答レベルで認定して損傷・相対強度$I_d$を評価，又，変形が更に増大して不安定化を招き，終局的な転倒（〈倒壊〉）が生起する下限の相対強度を$I_c$と表わす。ここで，〈損傷〉段階を超えて〈倒壊〉に到る迄の〈余剰安全度〉に相当する量を与えるのが，両者・相対強度の比$I_c/I_d$となる。これらの具体的な算出結果で特徴的な傾向は，異なる$\alpha_g$に対する$I_d \cdot I_c$がそれぞれ$T_e \cdot n$に関して示す重合性であり[15]，前者が単純な事実（変形依存の重力効果を〈損傷〉レベルでは十分に無視し得る）の現れに過ぎないのに対し，〈倒壊〉領域に於ける弾性指標$T_e$の意義喪失を暗示すると解釈すべき特性が後者である。即ち，倒壊という極限状態を規定する重要因子は，既往の指摘[11]に調和して，降伏強度$A_y$と重力の転倒作用を定める等価総高$H=(n/\beta)h$とに限られ，故に本論の問題設定に於ける$I_c$を支配する本質的因子は$n/\beta$のみと読み替え得る事になる。

耐震工学的見地から重要な強震動をその継続時間に基づき３分類し[15][16]，それらに対する$I_c \cdot I_d \cdot I_c/I_d$の評価結果に関して，上記の一般性質を利用した単純化を図り，総括的に比較したのが図４である。個々の外乱の破壊能に於ける顕著な相違（同一最大振幅下で対比）をこの図は強調し，殊に，弾性応答からの推測より遙かに甚しい低能力と大きな余剰安全度とが，衝撃型地動を明確に特徴付ける。この種の観点から強震動性状をより適切に特定する為には，強度指標としての信頼性が著しく低い$A_{max}$を除外して〈損傷・倒壊加速度〉を定義するのが妥当であり，地動特性の初等的尺度（特に，近年注目されている〈全エネルギー〉[17]）との相関性等を定量的に吟味した論述の詳細を他稿が含む[18]。ところで，ＲＣ構造物に対して理想的な靱性を期待する事は難しく，模式化して前出・図３-(b)に示したように，復元力機能の劣化が通性である。構造詳細に即したその度合の数値的把握は必ずしも容易ではないが，試みに表２-(9)の値を採用して倒壊強度を評価すると，安定限界の著しい低下（重力効果が有する意義の相対的稀薄化）から予期し得るように倒壊は大幅に促進され，完全靱性に対しより高い値をとった〈剛〉構造物の余剰安全度は〈柔〉のそれに同程度となる結果が得られる。その検討例[15]に於ける倒壊強度の低下率は同表-(10)に大略一致したが，いづれにしても，靱性劣化の度合を変動因子に加えて，$I_c$をより詳細に特定する必要がある。

## 5．　等価多自由度系の非線形定式化

次に，前章迄の対象と異なり，損壊が区分的に進展する場合の等価方程式を，幾何学的非線形効果をも含めて確定する。図６-(a)はこれに該当する架構の例示であり，まづ，多自由度不安定機構に於ける崩壊の層間従属性・独立性に応じて配置される〈層集合要素〉の結合体として，全体系の再構成を図る。この層集合要素の各々に対して，等価１－DOF 系の場合に準じる変形機構の簡略化〔同図-(b)参照〕を適用し，同図-(c)・表３-(1)の記載に拠ると，明快な表現形式を用いた同表-(2)が全体系の釣合条件式として結論的に得られる。こゝで，外力が慣性力・重力の形でのみ作用する(3)の場合には，系の慣性行列・慣性ベクトル（外乱項ベクトルの慣性変換表示）を(4)で定義して(5)式の関係が成立し，その過程で層集合要素毎に導入される２種の無次元係数$\beta_k \cdot \beta_k'$は，等価１－DOF 系の場合の$\beta \cdot \beta'$と直接に対応が付く。この外力表示を前出・(2)式に代入し，その意義を把え易い形式に結果を改変すると，最終的には甚だ見通しの良い表現(6)に到達して，これが等価多自由度系の動力学挙動を規定する基礎方程式を与える。層を単位要素とする慣用の剪断モデルは，当式で$\beta_k \equiv \beta_k' \equiv 1$となる特例に他ならないが，その初等的な多自由度系との間に単純な換算関係が一般に成立し得ない点で，等価１－DOF 系の場合と様相を異にし，又，この運動

方程式の右辺に付加された $\{Q_g\}$ は，(関連して現れる変形依存性行列〔X〕・〔Y〕の対角成分が恒等的に零である事から) 多自由度系に特有なもので，高次の幾何学的非線形項を表わす。前者に関して補言すると，平衡点からの変位を採用した通常の慣性表示に(4)を変換した結果が(7)であり，その際の慣性行列が対角化されずに三重対角行列となる事，及び，慣性ベクトルと慣性行

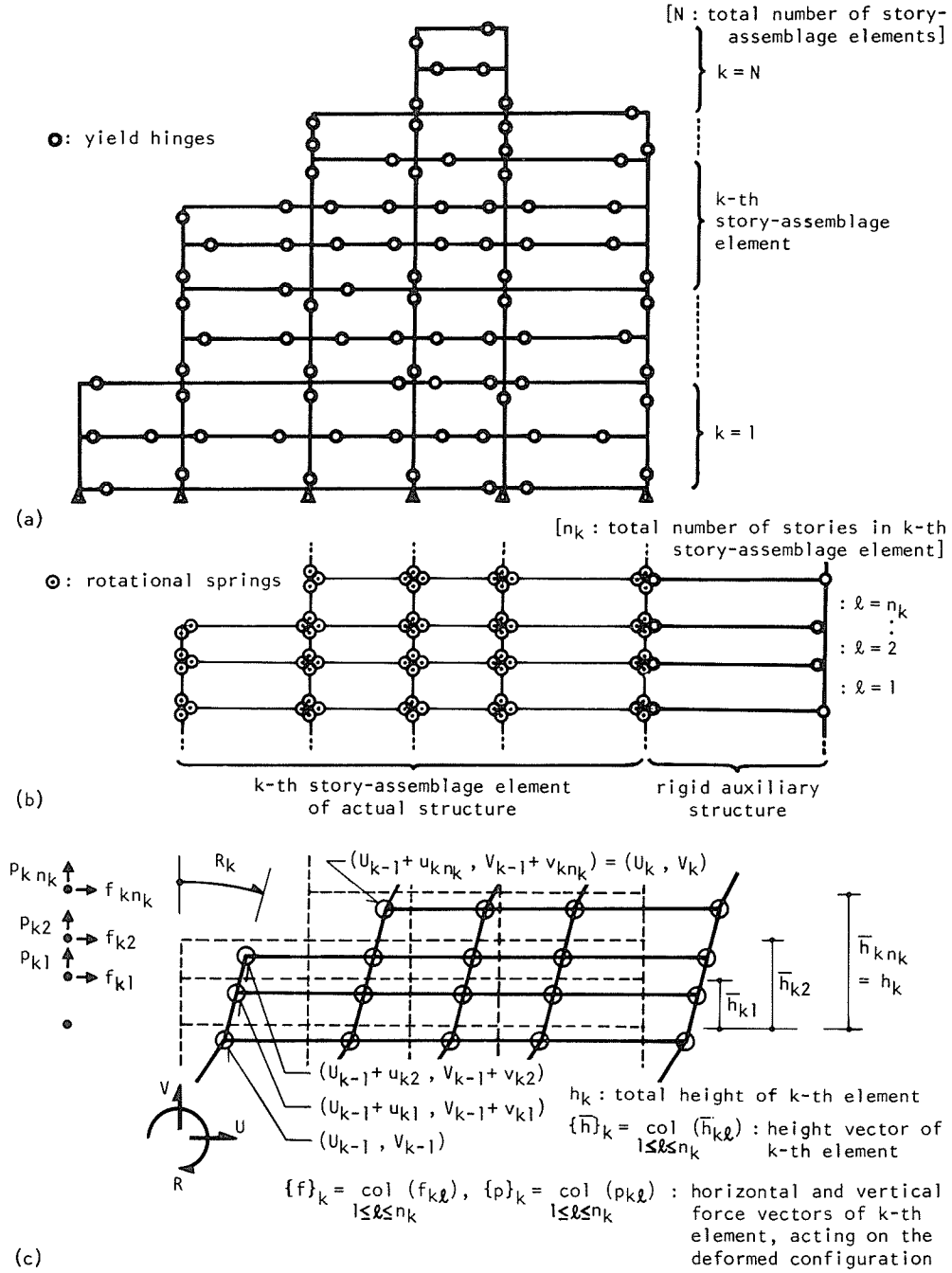


図5　等価多自由度系置換

列との相互関係が簡明でない，等が等価多自由度系方程式の一見錯綜した構成を特徴付ける基本的性格と言える。

他方，系の材料的非線形性は(6)式での $\{\delta\}$ ～ $\{Q\}$ 関係に反映されるが，層集合要素の相互間でこれが連成しない（両者の各成分が１対１に対応して，増分関係を指定する瞬間剛性が恒に対角行列となる）との原則に拠る故，変形モードの規定に従い，各々の層集合要素に於ける個別的な動的復元力性状の集約化を図ればよい。構造詳細に即したその具体的評価は，剪断モデル化に際しての層特性（或いは，等価１－DOF 系の全体特性）の構成手順に準じ，$\delta_k$～$Q_k$の静

**表３　等価多自由度系の定式化**

(1) $U_k$, $V_k$ : horizontal and vertical displacements at the top of k-th element, relative to the support of total structure

$\{u\}_k = \underset{1\le\ell\le n_k}{\mathrm{col}}\,(u_{k\ell})$, $\{v\}_k = \underset{1\le\ell\le n_k}{\mathrm{col}}\,(v_{k\ell})$ : horizontal and vertical displacement vectors of k-th element, relative to its base

$U_k = \sum_{\ell=1}^{k} h_\ell \sin R_\ell$, $V_k = \sum_{\ell=1}^{k} h_\ell\,(-1+\cos R_\ell)$; $\{u\}_k = \{\bar{h}\}_k \sin R_k$, $\{v\}_k = \{\bar{h}\}_k\,(-1+\cos R_k)$

[$R_k$ : translational angle of k-th element]

$Q_k$ : generalized force associated with $h_k R_k$ in the incremental strain-energy relation, $dE_k = h_k Q_k\, dR_k$, of k-th element

(2) $[\cos R]\{\underline{Q}\} - [\sin R]\{\underline{N}\} = \{Q\}$

where $\{\underline{Q}\} = \underset{1\le k\le N}{\mathrm{col}}\,\left(\frac{\iota\bar{h}_{Jk}\{f\}_k}{h_k}\right) + ([E]^T-[I])\underset{1\le k\le N}{\mathrm{col}}\,(\iota\bar{e}_{Jk}\{f\}_k)$

$\{\underline{N}\} = \underset{1\le k\le N}{\mathrm{col}}\,\left(\frac{\iota\bar{h}_{Jk}\{p\}_k}{h_k}\right) + ([E]^T-[I])\underset{1\le k\le N}{\mathrm{col}}\,(\iota\bar{e}_{Jk}\{p\}_k)$

$\{Q\} = \underset{1\le k\le N}{\mathrm{col}}\,(Q_k)$; $[\cos R] = \underset{1\le k\le N}{\mathrm{diag}}\,(\cos R_k)$, $[\sin R] = \underset{1\le k\le N}{\mathrm{diag}}\,(\sin R_k)$

$[I]$ : identity matrix (N by N)　　$[E] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ 1 & 1 & \cdot\ \cdot & 1 \end{bmatrix}$ (N by N)

$\{\bar{e}\}_k = \underset{1\le\ell\le n_k}{\mathrm{col}}\,(1)$

(3) $\{f\}_k = -[\bar{m}]_k\,(\overline{\ddot{u}_0 + \ddot{U}_{k-1}}\,\{\bar{e}\}_k + \{\ddot{u}\}_k)$, $\{p\}_k = -[\bar{m}]_k\,(\overline{g+\ddot{v}_0+\ddot{V}_{k-1}}\,\{\bar{e}\}_k + \{\ddot{v}\}_k)$

($[\bar{m}]_k$ : story-inertia matrix of k-th element)

(4) $[M] = [E]^T[m][E] - (\overline{[I]-[\beta']^{-1}}[m][E] + [E]^T[m]\overline{[I]-[\beta']^{-1}} - \overline{[I]-[\beta']^{-1}}[m])$

$-([I]-[\beta])^{-1}[\beta']^{-1}[m]$

$= (m_{ij})$;　　$m_{ij} = \frac{m_\ell}{\beta'_\ell} + \sum_{k=\ell+1}^{N} m_k - \left(1-\frac{1}{\beta_i}\right)\frac{m_i}{\beta'_i}\,\delta_{ij}$　　[$\ell = \max(i,j)$]

$\{\underline{M}\} = ([E]^T-[I]+[\beta']^{-1})[m]\{e\} = (\underline{m}_i)$;　　$\underline{m}_i = \frac{m_i}{\beta'_i} + \sum_{k=i+1}^{N} m_k$

where $[m] = \underset{1\le k\le N}{\mathrm{diag}}\,(m_k)$, $[\beta] = \underset{1\le k\le N}{\mathrm{diag}}\,(\beta_k)$, $[\beta'] = \underset{1\le k\le N}{\mathrm{diag}}\,(\beta'_k)$

$m_k = \iota\bar{e}_{Jk}[\bar{m}]_k\{\bar{e}\}_k$ : total inertia of k-th element

$\beta_k = \frac{\iota\bar{h}_{Jk}[\bar{m}]_k\{\bar{e}\}_k}{\iota\bar{h}_{Jk}[\bar{m}]_k\{\bar{h}\}_k}\,h_k$,　$\beta'_k = \frac{\iota\bar{e}_{Jk}[\bar{m}]_k\{\bar{e}\}_k}{\iota\bar{h}_{Jk}[\bar{m}]_k\{\bar{e}\}_k}\,h_k$

$\{e\} = \underset{1\le k\le N}{\mathrm{col}}\,(1)$, $\delta_{ij}$ : Kronecker's delta

(5) $\{\underline{Q}\} = -\{\underline{M}\}\,\ddot{u}_0 - [M][h]\overline{\{\sin R\}}$,　　$\{\underline{N}\} = -\{\underline{M}\}(g+\ddot{v}_0) - [M][h]\overline{\{\cos R\}}$

where $\{\sin R\} = \underset{1\le k\le N}{\mathrm{col}}\,(\sin R_k)$, $\{\cos R\} = \underset{1\le k\le N}{\mathrm{col}}\,(\cos R_k)$, $[h] = \underset{1\le k\le N}{\mathrm{diag}}\,(h_k)$

(6) $[M]\{\ddot{\delta}\} + \{Q\} = (-\ddot{u}_0[\cos R] + \overline{g+\ddot{v}_0}\,[\sin R])\{\underline{M}\} + \{Q_g\}$

where $\{\delta\} = [h]\{R\}$ : relative displacement vector [measured along the circular arc; $\{R\} = \underset{1\le k\le N}{\mathrm{col}}\,(R_k)$ ]

$\{Q_g\} = [X]\{\ddot{\delta}\} - [Y][h]^{-1}\{\dot{\delta}^2\}$

$[X] = [M] - [\cos R][M][\cos R] - [\sin R][M][\sin R]$

$= (x_{ij})$; $x_{ij} = m_{ij}(1-\cos\overline{R_i - R_j})$: symmetric and zero-diagonal

$[Y] = [\sin R][M][\cos R] - [\cos R][M][\sin R]$

$= (y_{ij})$; $y_{ij} = m_{ij}\sin(R_i - R_j)$: skew-symmetric

(7) $([E]^{-1})^T[M][E]^{-1} = (m'_{ij})$;　$m'_{ii} = m_i/(\beta_i\beta'_i) + \{1-1/\beta'_{i+1} - (1-1/\beta_{i+1})/\beta'_{i+1}\}m_{i+1}$

$m'_{i,i-1} = m'_{i-1,i} = (1-1/\beta_i)m_i/\beta'_i$　　[with $m_{N+1}=0$]

otherwise zero

$([E]^{-1})^T\{\underline{M}\} = (\underline{m}'_i)$;　$\underline{m}'_i = m_i/\beta'_i + (1-1/\beta'_{i+1})m_{i+1}$　[with $m_{N+1}=0$]

的履歴に関するskeleton curve形状を前出・図3の基本型に設定し得る。又，上記の高次項 $\{Q_g\}$ を無視するならば，随伴する幾何学的非線形性は各層集合要素毎に独立して現れる事を(6)式が明示しているから，重力効果についても同図の単純な読み替えが可能である。

## 6. 局部的損壊効果の導出

互いに独立な復元力要素の直列結合系の塑性応答は，相対的に弱で柔な要素の変形が他を圧倒して進行する既述の特性を有し，建物の最下層，又は，上層の付属部分がこの危険要素に該当する場合が多い。故に，局部損壊に於けるこの種の代表的形式に対しては，等価2-DOF系（危険要素を除外した部分を一括化）による近似的取り扱いが十分に有効であり，本章ではこれを議論の対象とする。表4-(1)はこの場合の等価方程式（前章で誘導）を示し，まづ，(2)の定義に基づき慣性の絶対量を消去すると(3)がこれに代わり，層集合要素の相互で連成しない$\delta_i$～$A_i$（i＝1，2）関係に重力効果も個別に随伴するので，それらの表示は前出・図3を踏襲し得る。こゝで，重力の不安定化作用の特定には，同表-(4)に掲げる指標を用いた弾性関係式(5)の導入が先行し，これを介した$\alpha_{gi}$（i＝1，2）の定義(6)は等価1-DOF系の場合の$\alpha_g$と直接に対応が付く。以上を総括して既載の表2-(3)に倣い，各要素の無次元応答変形（降伏変形で規準化した塑性率）を規定する諸因子を網羅した結果が(7)であり，殊に同項・b群の後半部が含む基礎指標 $\eta_{12}$・$\omega_{12}$・

**表4** 等価二自由度系の構成

(1) $$\begin{bmatrix} m_1/(\beta_1\beta_1') + m_2 & m_2/\beta_2' \\ m_2/\beta_2' & m_2/(\beta_2\beta_2') \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\delta}_1\\ \ddot{\delta}_2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}Q_1\\ Q_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}(m_1/\beta_1'+m_2)(-\ddot{u}_0\cos R_1 + \overline{g+\ddot{v}_0}\sin R_1)\\ (m_2/\beta_2')(-\ddot{u}_0\cos R_2 + \overline{g+\ddot{v}_0}\sin R_2)\end{Bmatrix} + (m_2/\beta_2')\{A_g\}$$

with $$\{A_g\} = \begin{Bmatrix}(1-\cos\overline{R_1-R_2})\ddot{\delta}_2 - \sin(R_1-R_2)\dot{\delta}_2^2/h_2\\ (1-\cos\overline{R_1-R_2})\ddot{\delta}_1 + \sin(R_1-R_2)\dot{\delta}_1^2/h_1\end{Bmatrix}$$

(2) $A_1 = \dfrac{Q_1}{m_1/\beta_1'+m_2}$, $A_2 = \dfrac{Q_2}{m_2/\beta_2'}$ : shear coefficients (in terms of acceleration) of the lower and upper story-assemblage elements

$m_2/m_1 = \eta_{12}\omega_{12}$; $\eta_{12} = n_2/n_1$ : ratio of number of stories in the upper versus lower elements

$\omega_{12} = (m_2/n_2)/(m_1/n_1)$ : ratio of average weight per story in the upper versus lower elements

(3) $$\begin{bmatrix} \gamma_{12}^{-1}\gamma_1 & 1 \\ 1 & \gamma_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\delta}_1\\ \ddot{\delta}_2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\gamma_{12}^{-1}A_1\\ A_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\gamma_{12}^{-1}(-\ddot{u}_0\cos R_1 + \overline{g+\ddot{v}_0}\sin R_1)\\ -\ddot{u}_0\cos R_2 + \overline{g+\ddot{v}_0}\sin R_2\end{Bmatrix} + \{A_g\}$$

where $$\gamma_{12} = \frac{m_2/\beta_2'}{m_1/\beta_1'+m_2} = \frac{\beta_1'\eta_{12}\omega_{12}}{\beta_2'(1+\beta_1'\eta_{12}\omega_{12})} \qquad [0 \le (\gamma_{12}, \gamma_1, \gamma_2) \le 1]$$

$$\gamma_1 = \frac{m_1/(\beta_1\beta_1') + m_2}{m_1/\beta_1'+m_2} = \frac{1+\beta_1\beta_1'\eta_{12}\omega_{12}}{\beta_1(1+\beta_1'\eta_{12}\omega_{12})}, \quad \gamma_2 = 1/\beta_2$$

(4) $T_e = 2\pi/\Omega_e$ : fundamental period of the elastic total system

$R_2/R_1 = \rho_{12}$ or $\delta_2/\delta_1 = u_{12}$ $[u_{12} = \rho_{12}\eta_{12}, \eta_{12} = h_2/h_1]$ : associated mode

(5) $$\begin{Bmatrix}A_1\\ A_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\Omega_1^2 & 0\\ 0 & \Omega_2^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}2\zeta_1\Omega_1 & 0\\ 0 & 2\zeta_2\Omega_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\delta}_1\\ \dot{\delta}_2\end{Bmatrix}$$ in the elastic situation

with $\Omega_1 = \omega_1\Omega_e$, $\Omega_2 = \omega_2\Omega_e$ $[\omega_1 = \sqrt{\gamma_1+\gamma_{12}u_{12}}, \omega_2 = \sqrt{\gamma_2+u_{12}^{-1}}]$

(6) $\alpha_{gi} = (g/h_i)/\Omega_i^2 = \alpha_{gi}(g/4\pi^2)(T_e/\sqrt{n})^2/h$ [i = 1 & 2]

where $\alpha_{g1} = (1+\eta_{12})/\omega_1^2$, $\alpha_{g2} = (1+\eta_{12}^{-1})/\omega_2^2$

$h = (h_1+h_2)/n$ : average interstory height, $n = n_1+n_2$ : total number of stories

(7) a. $T_e$, $\zeta_e$; $(T_e/\sqrt{n})^2/h$ : elastic and gravity-effect parameters of total system

b. $\beta_1$, $\beta_1'$, $\beta_2$, $\beta_2'$; $\eta_{12}\omega_{12}$, $\rho_{12}$, $\eta_{12}$ : dimensionless distribution parameters

c. $A_{y2}/A_{y1}$, $A_{max}/A_{y1}$ (or $A_{max}/A_{y2}$), e(t); $A_{y1}/g$ (or $A_{y2}/g$)

: dimensionless strength parameters (The last factor could be eliminated by applying the first-order approximation to the geometrically nonlinear terms.)

d. $a_{ci}$, $\alpha_{yi}$; $a_{ui}$, $\mu_{ui}$, $p_i$ [i = 1 & 2] : dimensionless parameters for the degrading trilinear and quadrilinear properties of restoring forces

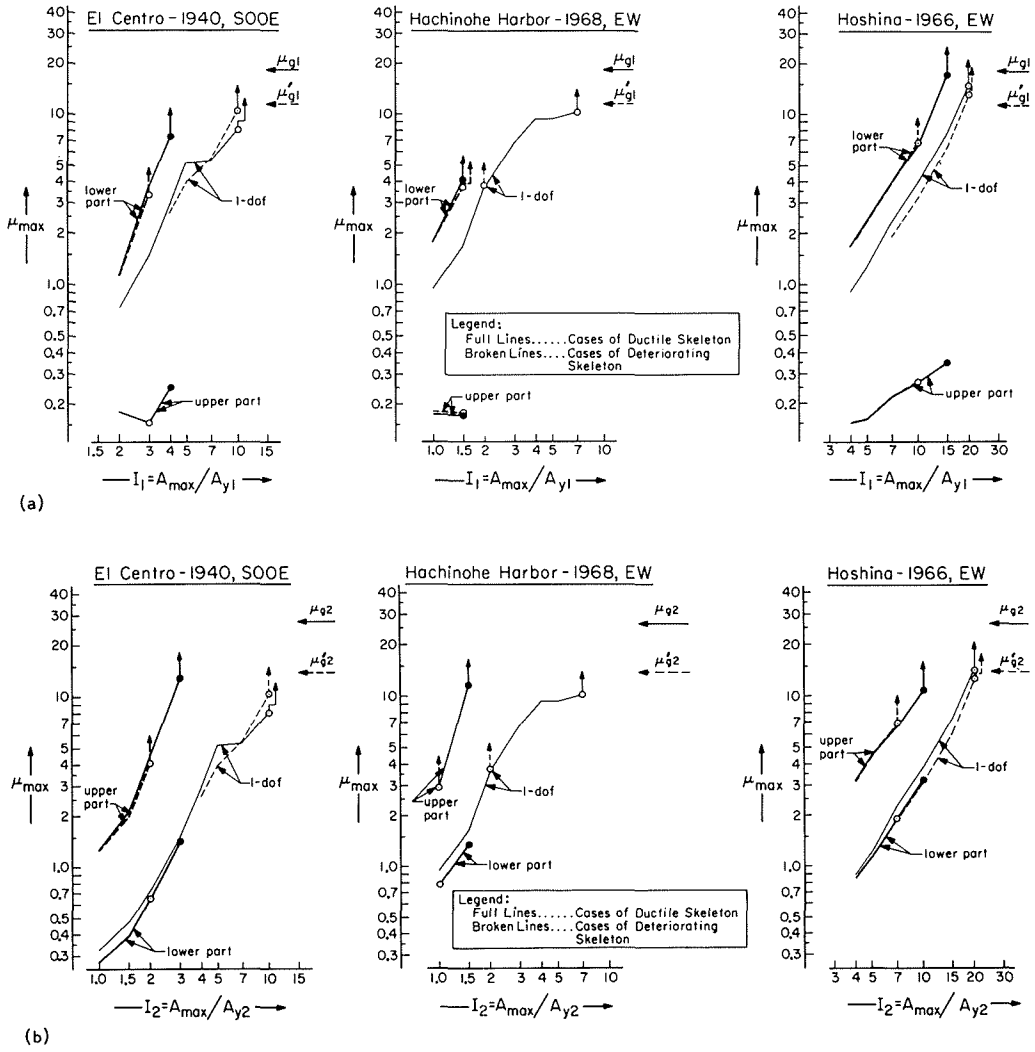


図6　局部的損壊効果の算出例〔(a)：Case 1，(b)：Case 2〕

ⓡ$_{12}$・ⓗ$_{12}$の選択は当問題の把握に役立つ。ところで，等価1－DOF系に対しては(6)式に於ける$@_{gi}$（i＝1，2）の位置を$\beta$が占め〔表2－(4)〕，この事実に着目すると，局部損壊での重力効果の大きさを全体損壊の場合との比較で明らかにできる。各指標の実用的な組み合わせに関して検討した結果[19]を引用すると，ⓡ$_{12}$・ⓦ$_{12}$が小（上部要素が相対的に剛），ⓝ$_{12}$〔≃ⓗ$_{12}$〕が大，の場合に高い値をとる$@_{g1}$の変動は4.5倍程度であり，一方，より低い値と小さい変動とで特徴付けられるのが$@_{g2}$となる。但し，ⓡ$_{12}$・ⓦ$_{12}$が大の限定領域では，重力効果が下部要素でより顕著となるこの通性から外れるが，いづれにしても$\max(@_{g1}/\beta, @_{g2}/\beta) \gtrsim 1.0$でその最大は2.5程度，即ち，損壊の局部化は重力効果の増大方向に繋がる，との解釈可能性が導出される。

次に，地動と構造物との相対強度Ｉの面から，損傷・倒壊に関する局部的損壊効果を具体的に評価する目的で，表5-(1)に掲げる1-DOF系の特例を比較の基準とし，同表-(2)の2種(Case 1では最下層，Case 2では付属最上層，が弱で柔）を採り挙げる。これに(3)を併用すると，重力効果指

標は(4)の値をとって，特にCase 1での安定限界低下が著しく，又，降伏強度比として(5)を用いるが，その本質的役割は損壊部の指定にのみ限られる点に留意する。図6は両ケースに於けるI～$\mu_{max}$関係の算出結果を全体損壊の場合のそれと対示したもので，この種の比較に際して基本となる構造物強度の同一尺度化は，水平力係数の等分布に応じる剪断力係数が全層で$A_1/g(=A_2/g)$となる事実（等価1－DOF系ではこれがA/g）に依拠すればよい。これらの図化には予期以上の規則性を見出し得て，全体損壊を基準とした単純な補正係数の形式で，$I_c$，殊に$I_d$，に対する局部的損壊効果を定量化する試みに連なる。本例ではCase 1よりCase 2，$I_d$より$I_c$，でこの効果は甚しく，動的倒壊限界の低下は1.5倍程度以上，数倍にも及んでおり，当問題の重要性を端的に例証している。このように，同一強度を付与した構造物であっても，損壊形式の相違により，強震動外乱に対するその有効強度は大きく異なり得るわけで，機会を改め系統的な議論を展開する。

**表5** 局部損壊例・2種の設定

(1) $n=5$ ($\beta=1.36$) and $\alpha_g=6\times10^{-3}$
[$h=3.75$ m; accordingly, $T_e=0.58$ sec]

(2) for Case 1;
$n_1=1$ ($\beta_1=\beta_1^i=1.00$), $n_2=4$ ($\beta_2=1.33$, $\beta_2^i=1.60$)
$(w)_{12}=1.0$ (: uniform distribution of floor-mass)
$(r)_{12}=0.5$ (: softer base story)
for Case 2;
$n_1=4$ ($\beta_1=1.33$, $\beta_1^i=1.60$), $n_2=1$ ($\beta_2=\beta_2^i=1.00$)
$(w)_{12}=0.5$ (half floor-mass at top story)
$(r)_{12}=2.0$ (softer top story)

(3) $(h)_{12}=(n)_{12}$
$a_{ci}=0.5$, $\alpha_{yi}=0.2$ (for ductile and deteriorating skeletons); $a_{ui}=1.05$, $\mu_{ui}=3.0$, $p_i=-0.01$ (for deteriorating skeleton, in addition) [i=1 & 2]

(4) Case 1;
$\alpha_{g1}=11.0\times10^{-3}$, $\alpha_{g2}=4.4\times10^{-3}$
[$(\alpha)_{g1}=2.5$, $(\alpha)_{g2}=1.0$]
$\mu_{g1}=18.2$ (for ductile skeleton)
$\mu_{g1}^i=11.4$ (for deteriorating skeleton)
Case 2;
$\alpha_{g1}=6.3\times10^{-3}$, $\alpha_{g2}=7.3\times10^{-3}$
[$(\alpha)_{g1}=1.4$, $(\alpha)_{g2}=1.7$]
$\mu_{g2}=27.3$ (for ductile skeleton)
$\mu_{g2}^i=13.9$ (for deteriorating skeleton)

(5) $A_{y2}/A_{y1}=\begin{cases}2.0 & \text{for Case 1}\\ 1.0 & \text{for Case 2}\end{cases}$
N.B. $A_2/A_1=1:1$
[for a uniform distribution of lateral-force coefficients]
$A_2/A_1=\begin{cases}5:4 & \text{(Case 1)}\\ 12:7 & \text{(Case 2)}\end{cases}$
[for the distribution of lateral-force coefficients according to the elastic fundamental mode]
$A_{y1}/g=0.25$ (merely for mathematical specificity]

## 7. 結　　語

本稿では，著者の一連の研究を踏まえ，RC建物が強震動外乱の作用下に損傷・倒壊する全体系挙動を対象として，幾何学的非線形効果をも包含する定式化手法を提示した。そこでの特色は，復元力要素の配置構成に関する既成の方式を廃棄した〈等価系〉の設定であり，支配的因子の役割の明確化を図って，損傷・倒壊限界を外乱特性との関わりで数値化する試みにも言及した。なお，重力効果に占める上下動成分の意義は見掛け以下であって，その影響を十分に無視する事が出来[11)15)18)]，又，損壊現象の理解に重要な他の側面（捩れ・二軸変形）のうち，後者の論述は他稿[7)]にある。

## 引　用　文　献


1) Sozen, M. A., and H. Aoyama: *Structural and Geotechnical Mechanics,* (1977), Prentice-Hall, pp. 305-332.
2) Aoyama, H., and T. Sugano: *Recent Researches of Structural Mechanics,* (1968), Uno Shoten, pp. 15-30.
Umemura, H., and H. Aoyama: Proc. 4th Wld Conf. Earthq. Eng. (1969), **1**, pp. (B-2) 91-107.
3) 滝沢：コンクリート・ジャーナル，**11**（昭48），2，pp. 10-21.
Umemura, H., H. Aoyama, and H. Takizawa: Proc. 5th Wld Conf. Earthq. Eng. (1973), **2**, pp. 2201-2210.
Takizawa, H.: Int. J. Earthq. Engng Struct. Dyn., **4** (1975), 1, pp. 73-94.
4) Otani, S.: Struct. Res. Ser. No. 413, (1974), Civil Eng. Dept., Univ. Ill.
5) Takizawa, H.: Trans. Arch. Inst. Jap., (1976), **240**, pp. 51-62.
Takizawa, H.: Trans. Arch. Inst. Jap., (1976), **241**, pp. 65-77.
6) Otani, S.: J. Struct. Div., ASCE, **100** (1974), ST7, pp. 1433-1449.
7) Takizawa, H., and M. Yoshimura: Proc. 4th Jap. Earthq. Eng. Symp. (1975), pp. 919-926.
Takizawa, H., and H. Aoyama: Int. J. Earthq. Engng Struct. Dyn., **4** (1976), 6, pp. 523-552.

Takizawa, H.: Int. J. Earthq. Engng Struct. Dyn., **4** (1976), 6, pp. 609-616.
Takizawa, H.: Preprints 6th Wld Conf. Earthq. Eng. (1977), **3**, pp. 49-54.
8) 梅村(編)：鉄筋コンクリート建物の動的耐震設計法，（昭 48），技報堂.
9) 滝沢：建築学会講演梗概（昭 49），pp. 545-546.
10) Aoyama, H.: Proc. Rev. Mtg U.S.- Jap. Coop. Res. Program Earthq. Eng. (1975), pp. 291-309.
11) Jennings, P. C., and R. Husid: J. Eng. Mech. Div., ASCE, **94** (1968), EM5, pp. 1045-1065.
12) Murakami, M., and J. Penzien: Proc. Rev. Mtg. U. S.- Jap. Coop. Res. Program Earthq. Eng. (1975), pp. 247-273.
13) Shibata, A., and M. A. Sozen: J. Struct. Div., ASCE, **102** (1976), ST1, pp. 1-18.
14) 梅村・青山：季刊カラム，**30**（昭 44），pp. 75-81.
15) Takizawa, H., and P. C. Jennings: Preprints 6th Wld Conf. Earthq. Eng. (1977), **3**, pp. 79-84.
16) 滝沢：建築学会講演梗概（昭 51），pp. 453-454.
17) 滝沢：第 14 回自然災害科学総合シンポジウム（昭 52），pp. 359-362.
18) Takizawa, H., and P. C. Jennings: submitted for possible publication in Int. J. Earthq. Engng Struct. Dyn.
19) 滝沢：第 24 回構造工学シンポジウム（昭 53），pp. 17-24.