HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	結合炉における揺動の非可逆的循環 ： 非マルコフ・非平衡開放系への応用例
Author(s)	金野, 秀敏; 斎藤, 慶一; 北村, 正直
Citation	北海道大學工學部研究報告, 95, 117-128
Issue Date	1979-08-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41575
Type	departmental bulletin paper
File Information	95_117-128.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第95号（昭和54年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 95 (1979)

結合炉における揺動の非可逆的循環

——非マルコフ・非平衡開放系への応用例——

金野秀敏* 斎藤慶一** 北村正直*

（昭和54年3月31日受理）

Irreversible Circulation of Fluctuation in Coupled Nuclear Reactors

—Application to a Non-Markoffian system far from equilibrium—

Hidetoshi KONNO Keiichi SAITO Masanao KITAMURA

(Received March 31, 1979)

Abstract

A generalized Brownian motion theory is applied to the coupled core nuclear reactors, which is an example of the non-Markoffian system far from equilibrium. Then we calculate analytically the irreversible circulation of fluctuation between cores in the steady state.

Since neutron fluctuation in the coupled cores generally obeys non-Markoffian stochastic process, the definition of irreversible circulation cannot be directly applied. When the memory function takes the form of an exponential type, the Markoffianization procedure becomes possible by introducing new variables. We set up an equivalent Markoffian model and evaluate the irreversible circulation of fluctuation.

In the cource of model building associated with the introduction of additive variables, we discuss the fluctuation-dissipation theorem and the causality condition in relation to the orthogonality between the additive variables and the macrovariables interested. Furthermore, we treat a perturbational approach in order to clarify not only the relation of macroscopic circulation to the irreversible circulation of fluctuation but the irreversible properties of the model introduced.

Finally, the relations among the non-Markoffianity, the nonlinearity and the non-stationarity are shown schematically in connection with the coarse-graining procedures.

1. 序　　論

近年，統計力学の立場から非平衡開放系において発現する特質が，従来主として関わってきた熱平衡系のそれと対比された[1]。熱平衡近傍では，熱水力学的に共役な流れと力の間に線型の関係があり，そのまわりの揺動も線型なFokker-Plank方程式に従がい，確率分布は正規型になる[2]。一方，巨視的変数からなる非平衡開放系では，上記の関係は成立せず流れを定める方程式は一般に非線型となる。しかし，マスター方程式を系の巨視的な大きさΩの逆巾で展開して得

* 工業数理科学
** 放射線源工学（現在，筑波大学物質工学系）

られる揺動の従がう Fokker-Planck 方程式からも，揺動が十分小さい場合には再び正規分布が得られる[1),3)]。

富田ら[1)]は，さらに，非平衡系における揺動の正規性を熱平衡近傍における同様な性質と区別するため，熱平衡近傍の詳細均衡 (deteiled belance) からの外れに注目して，定常状態は，循環平衡 (cyclic balance) によって維持されると考え，揺動の非可逆的循環 (irreversible circulation of fluctuation) の定量化を提唱した。この量は，分布の大局的な非可逆的流れの情報を含んでおり，平衡からの外れの指標となるばかりでなく，系がこの“循環”を通じて不安定化するときには，その積極的意味が出てくることも示された[1)]。

原子炉雑音の分野でも，温度フィードバックを考慮した出力炉モデルを例にとり，揺動の非可逆的循環 (ICF) の定量化を用い，系の不安定性の分類が岸田らにより行なわれている[4)]。ここで，彼らはモデルを巧みにマルコフ過程に従がうとしているが，原子炉確率過程は一般に，非マルコフであると考えられる。

結合炉における中性子揺動も，非マルコフ確率過程に従がう事が知られており[5)]，マルコフ過程に基づいた富田らの理論はそのまま適用できない。非マルコフ系における ICF を評価する方法を見いだすために，まず，揺動の正規性と系の大きさ Ω による展開を用いた漸近評価 (asymptotic evaluation) について考察し，これを用いて得られる線型の Fokker-Planck 方程式に基づくアプローチと一般化された Brown 運動の理論に基づくランジュバン方程式によるアプローチとの関係について考察する。次に，記憶関数が指数関数型の時間遅れを有する場合，変数を増やす事により等価なマルコフ系を創出できる事を示し，結合炉における中性子揺動の非可逆的循環を解析的に評価した結果を示す。

第2章では，時空粗視化の漸近評価法と揺動の正規性について考察し，また，Fokker-Planck 法とランジュバン法の関係を述べる。さらに，揺動の非可逆的循環とパワースペクトル密度 (PSD) との関係も述べる。2.3節では，非マルコフランジュバン方程式と揺動散逸定理 (F-D 定理) の関係について考察する。第3章では，結合炉の2点非マルコフモデルと，それと等価な4点マルコフモデルの対応関係について吟味し，ICF を示す。第4章では中性子揺動の非可逆的循環と，中性子の巨視的循環との関係について吟味する。また，2点マルコフモデルと4点マルコフモデルの ICF の比較を行なう。第5章では，まとめと結言を述べる。

2. 時空粗視化の漸近評価と揺動の非可逆的循環

2.1 時空粗視化とランジュバン方程式

非平衡状態における統計・確率論的揺動の従がう Fokker-Planck 方程式は，マスター方程式を体系の巨視的大きさ Ω の逆巾で展開する漸近評価を通して得られる事は既に述べた。(マスター方程式は，既に非可逆な方程式であり，遷移確率 ($W(\boldsymbol{X}, \Delta\boldsymbol{X})$) は系の熱水力学的な状態によって決まる確率 (jumping probability) と関係し系の巨視的大きさに依存する。) その結果，スケールされた揺動の確率密度 $p(\xi, t)$ (ここで，$\boldsymbol{X}=\Omega\boldsymbol{y}+\Omega^{1/2}\xi$) は次の方程式に従がう[1)]。

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}p(\xi,t) &= -\frac{\partial}{\partial\xi}\boldsymbol{J}(\xi,t) \\ \boldsymbol{J}(\xi,t) &= \boldsymbol{K}(t)\,\xi P(\xi,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\boldsymbol{D}(t)\,P(\xi,t)\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

上式の $\boldsymbol{K}(t)$ は regression matrix, $\boldsymbol{D}(t)$ は diffusion matrix であり，systematic part $\boldsymbol{y}(t)$ の関数である。また，(1) 式は一般に非定常な状態をも記述する。

確率流 $\boldsymbol{J}(\hat{\xi}, t)$ は，確率分布の伸縮をあらわす流れ $\boldsymbol{J}_s \equiv -(\dot{\sigma}/2)\,\partial p/\partial \hat{\xi}$ (対称行列) と，確率の循環をあらわす流れ $\boldsymbol{J}_a \equiv \alpha \partial p/\partial \hat{\xi}$ (反対称行列) の部分からなる。ただし，$\dot{\sigma}$ 及び α は次式で与えられる量である。

$$\dot{\sigma} = \boldsymbol{K}\sigma + \sigma \boldsymbol{K}^T + 2\boldsymbol{D} \tag{2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\sigma \boldsymbol{K}^T - \boldsymbol{K}\sigma) \tag{3}$$

熱平衡近傍を特徴づける詳細均衡とは，定常状態に対し $\boldsymbol{J}=0$ を要求する事である。非平衡状態においても，定常状態では(2)式で $\dot{\sigma}=0$ となることから $\boldsymbol{J}_s=0$ となることがわかる。一方，非平衡，多自由度系では一般に定常状態においても確率の循環 $\boldsymbol{J}_a$ は消える必然性はない。富田は，上記 Fokker-Planck 方程式から(3)式で表わされる ICF を導入したが，相互作用の繰り込みと漸近評価は，一般化された Brown 運動の理論[6] で用いられている射影演算子による変数逓減とそれに続く時空粗視化のスケーリング (scaling)[7] によっても実行される。両アプローチは“擬線型近似” (quasi-linear noise approximation) の範囲で一致することが確かめられる。

定常マルコフ過程の場合，揺動の時間発展は次の様なランジュバン方程式で記述される；

$$\frac{d}{dt}\hat{\xi}(t) = \boldsymbol{K}\cdot\hat{\xi}(t) + \boldsymbol{F}(t), \tag{4}$$

$$\langle \boldsymbol{F}(t)\rangle = 0, \qquad \langle \boldsymbol{F}(t)\,\boldsymbol{F}^T(0)\rangle = \boldsymbol{D}\delta(t) \qquad \text{[揺動散逸定理]} \tag{5 a}$$

$$\boldsymbol{K}\langle \hat{\xi}\hat{\xi}^T\rangle + \langle \hat{\xi}\hat{\xi}^T\rangle \boldsymbol{K}^T + 2\boldsymbol{D} = 0, \tag{5 b}$$

$$\langle \boldsymbol{F}(t)\,\hat{\xi}^T(0)\rangle = 0 \qquad (t>0) \qquad \text{[因果律]} \tag{5 c}$$

以下，定常安定な系に話を限定し，ランジュバン法に基づいて計算を進める。ランジュバン法は一般化された Schottky 公式等を用い diffusion matrix $\boldsymbol{D}$ を直接評価できる場合，多変数になったときにも計算の簡素化にとって有益であろう。定常な線型マルコフ系において一般化された Schottky 公式を用い定式化されている $\boldsymbol{D}$ の評価法[8]，あるいは Fokker-Planck モーメントを用いた $\boldsymbol{D}$ の評価法[9] が上記，遷移確率 $W(\boldsymbol{X}, \Delta\boldsymbol{X})$ に関する擬線型近似に対応する。

後の章で，具体例としてとりあげられる原子炉に上記のアプローチを用いるが，原子炉内では中性子分枝過程が存在するために厳密には正規性は保存されない事，また，非正規な温度揺ぎが観測されたことがある事が知られている[10]。しかし，揺動の時間発展方程式では，上に述べた時空粗視化の漸近評価によって正規性が保持されている事に注意する必要がある。すなわち，非線型効果を平均的な流れに繰り込んだうえで揺動分布の正規性が得られているわけである。これが，揺動分布が正規で循環流れが定義され得る物理的な理由である。

2.2 揺動の非可逆的循環 (ICF) とパワースペクトル密度 (PSD)

揺動の非可逆的循環 (ICF) は，(3)式の α で定量化されている。ICF はランジュバン方程式(4)からは自動的に導入されないが，定義式(3)より，(4)式すなわち揺動の前向きの時間発展方程式と後ろ向きの方程式 $\dot{\hat{\xi}}(t) = \hat{\xi}(t)\cdot\boldsymbol{K}^T + \boldsymbol{F}(t)$ との運動係数の差の程度を表わす。すなわち，regression の経路が，それを時間反転した progression の経路と，どれだけずれているかという大きさを与える[11]。

さて，系の揺動の時間発展に関する情報は PSD を通じて観測されるので，この PSD と ICF の関係について述べよう。まず，揺動の時間発展方程式(4)で因果律(5 c)を用いれば，相関関数 $\boldsymbol{C}(t) = \langle \hat{\xi}(t)\,\hat{\xi}_T(0)\rangle$ の従がう方程式が得られる；

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{C}(t)=\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{C}(t), \tag{6}$$

PSD ; $\boldsymbol{P}(\omega)$, はこれの解 $\boldsymbol{C}(t)$ の Fourier-Laplace 変換 $\boldsymbol{C}[i\omega]$ を用いて次の様に表現される ;

$$\boldsymbol{P}(\omega)=\boldsymbol{C}[i\omega]+\boldsymbol{C}^{T}[-i\omega] \tag{7}$$

系の揺動分布の広がりを表現する分散 σ は，この PSD を用い，次式で与えられる :

$$\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Re\,\boldsymbol{P}(\omega)\,d\omega=\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}(+0)+\boldsymbol{C}^{T}(+0)) \tag{8}$$

すなわち，分散 σ は $\boldsymbol{P}(\omega)$ の実数部分 $Re\,\boldsymbol{P}(\omega)$ の情報と関係している。一方，循環 α は次式で与えられる ;

$$\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\,Im\,\boldsymbol{P}(\omega)\,d\omega=\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{C}}^{T}(+0)-\dot{\boldsymbol{C}}(+0)) \tag{9}$$

PSD の虚数部分 $Im\boldsymbol{P}(\omega)$ と関係づけられている ICF は，揺動分布の広がりについての情報 σ を補充する物理量の 1 つである事も理解できる。

2.3 変数の逓減と非マルコフ系における揺動散逸定理 (F-D 定理)

前節までの議論は，非平衡開放系で定常マルコフ過程として粗視化される場合に成立する。しかし，3 章でとりあげられる結合炉では，中性子が一方の炉心から他方の炉心へ輸送されるのに有限の時間遅れを有するので，揺動の時間発展は非白色雑音源を有する非マルコフ・ランジュバン方程式になることが知られている[5]。また，非平衡系における相転移現象・輸送現象など[12]でも，揺動の非マルコフ性に関心が持たれてきている。さらに，近年，工学システムの電子計算機による制御に用いられ，成功を収めて以来他の多くの応用分野を見い出してきている AR[13] モデルあるいは ARMA モデル[14] も非マルコフ確率過程を記述する方程式とみなされる。AR モデルでは，揺動の時間発展方程式は記憶を有する形式になっているので，物理的には非白色雑音源に対応する F-D 定理が成立していてしかるべきであるが白色雑音源を有するようになっていることも知られている。AR モデルの揺動力に対応する残差の白色性は，時間幅 Δt を決め，これを単位として過去に何時点さかのぼるかを決める事と残差の最小自乗誤差を最小にする手続きが AIC[22] を用い実行された結果である。

ミクロ変数からなる熱平衡系では，ランジュバン方程式及び F-D 定理は，一般化された Brown 運動の理論に集約される射影演算子の方法により定式化される。一方，マクロ変数からなる非平衡開放系では，F-D 定理と非マルコフ性に関する種々の検討が待たれるわけである。

ここでは，マクロ変数からなる非マルコフ系をマルコフ系として取り扱う 1 つの方法を提案する。そのために，まず，変数の逓減と非マルコフ性に関する考察から始めよう。議論を簡単に行なうために，2 変数の場合について考え，次の様なランジュバン方程式を設定する。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}A_1(t)\\A_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}K_{11}&K_{12}\\K_{21}&K_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1(t)\\A_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}F_1(t)\\F_2(t)\end{pmatrix} \tag{10}$$

ここで，F-D 定理及び因果律が成り立つことを要請しよう。((5 a)～(5 c) 式参照) (10) 式で，一般に変数 A_1A_2 の直交性 ($\langle A_1A_2\rangle=0$) は前提されない事に注意されたい。(10) 式の第 2 式を第 1 式に縮約すれば，次の様な非マルコフ型のランジュバン方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt}A_1(t)=K_{11}A_1(t)+\int_0^t\Gamma(t-s)\,A_1(s)\,ds+R(t) \tag{11}$$

$$\Gamma(t)=Z(t)\,K_{21},\qquad Z(t)=K_{12}\exp(tK_{22}) \tag{12 a}$$

$$R(t) = R_1(t)+Z(t)\,A_2(0) \tag{12 b}$$

$$R_1(t) = F_1(t)+\int_0^t Z(t-s)\,F_2(s)\,ds \tag{12 c}$$

上式で$\langle A_2(0)\,A_1(0)\rangle \neq 0$のときには，$R(t)$に関しF-D定理と因果律を要請するアプローチは正しい答を与えない。これは，(12 b)式の$R(t)$の第2項に$Z(t)\,A_2(0)$があるため因果律を満足しないからである。すなわち，$Z(t)\,A_2(0)$は無視できない[15]。A_2をA_1に直交する変数A_2'に変換*してからA_2'を消去すれば，

次の様な揺動散逸定理及び因果律；

$$\langle R(t)\,R(0)\rangle = K_{11}'\,\delta(t)+Z'(t)\,K_{21}', \qquad (t\geq 0) \tag{16}$$

$$\langle R(t)\,A_1(0)\rangle = 0, \quad [Z'(t) = \exp(t\,K_{22}')], \qquad (t>0) \tag{17}$$

を要請するアプローチは正しい答を与えることがわかる。この様に，変数をマクロとミクロに分離しミクロ変数を逓減することと，変数の直交性は深く結びついている。この様な考えは，射影演算子法では自動的に入るようになっている。同様の事情は，(10)式の形式解から$A_1(0)$を消去し第2式をtime-convolutionless型の縮約[16]を行なっても現われる。すなわち，次式の因果律の成り立たない縮約された方程式が得られる；

$$\frac{d}{ds}\,A_1(t) = \mathscr{K}(t)\cdot A_1(t)+\mathscr{F}(t) \tag{18}$$

$$\mathscr{F}(t) = \mathscr{F}_1(t)+\mathscr{F}_2(t)\cdot A_2(0) \tag{19 a}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_1(t) = F_1(t)+K_{12}\int_0^t ds\,\{&[U_{21}(s)-U_{21}(t)\,U_{11}^{-1}(t)\,U_{11}(s)]\,F_1(t-s)\\&+[U_{22}(s)-U_{21}(t)\,U_{11}^{-1}(t)\,U_{12}(s)]\,F_2(t-s)\}\end{aligned} \tag{19 b}$$

$$\mathscr{F}_2(t) = K_{12}(U_{22}(t)-U_{21}(t)\,U_{11}^{-1}(t)\,U_{12}(t)) \tag{19 c}$$

われわれは，上記の縮約の逆，すなわち，(11)の型の様な指数関数型・記憶関数を有する非マルコフ系は，(10)式の様なマルコフ系として揺動を記述することができることを知る。但し，マルコフとなったときには，ランダム力の中に押し込めてしまっていた変数はマクロ変数化されたわけであり，それに実体を与えたとき，もとの変数との直交性は再び失なわれている事に注意されたい。揺動散逸定理と揺動の非可逆的循環に関連して，2成分系では変数の直交化によって，circulationの大きさは変わらない事に注意をしておく。

3. 結合炉における揺動の非可逆的循環

3.1 零出力の非マルコフ・空間2点結合炉モデル

結合炉における揺動の従がう方程式は，各炉心の中性子密度のみに注目し他の効果が小さい

---

* (変数$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{F}$及び係数$\boldsymbol{K}$を次の様な

$$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix}A_1\\A_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_1\\A_2-A_1M\end{pmatrix}, \qquad M = \langle A_1A_2\rangle\langle A_1A_1\rangle^{-1} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{F}' = \begin{pmatrix}F_1\\F_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_1\\F_2-MF_1\end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{K}\to\boldsymbol{K}' = \begin{pmatrix}K_{11}+K_{12}M, & K_{12}\\K_{21}+K_{22}M-MK_{11}-MK_{12}M, & K_{22}-MK_{12}\end{pmatrix} \tag{15}$$

で置き換えた方程式の第2式を第1式に縮約する。)

ときには，次の様な非マルコフ・ランジュバン方程式で記述されることが知られている。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\delta n_1\\ \delta n_2\end{pmatrix} = -\int_0^t \boldsymbol{B}(t-s)\begin{pmatrix}\delta n_1(s)\\ \delta n_2(s)\end{pmatrix} ds + \boldsymbol{F}(t) \tag{20 a}$$

ここで，記憶関数 $\boldsymbol{B}(t)$ は中性子の減衰定数 a_i，結合係数 b_i，及び炉心 j から炉心 i へ時間 t で遷移する確率 $p_{ij}(t)$ を用いて表現される。

$$\boldsymbol{B}(t) = \begin{pmatrix}a_1\delta(t), & -b_1 p_{12}(t)\\ -b_2 p_{21}(t), & a_2\delta(t)\end{pmatrix} \tag{20 b}$$

但し，記憶をになっている関数 $p_{ij}(t)$ は次の様に規格化条件を満足するようにつくられる；

$$\int_0^\infty p_{ij}(t)\,dt = 1 \tag{20 c}$$

マルコフの場合には，遷移確率 $W(\boldsymbol{X}, \Delta\boldsymbol{X})$ を設定するか一般化された Schottky 公式を用うるかして，一般化された diffusion matrix $\boldsymbol{D}$ が評価でき Einstein relation $2\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}\sigma+\sigma\boldsymbol{B}^T$ を用いて σ を決定できる。しかし，一般の非マルコフの場合には情報の一部が失なわれて居るために雑音源の強度は周波数依存性を示し，F-D 定理より

$$\langle \boldsymbol{F}[i\omega]\,\boldsymbol{F}^T[-i\omega]\rangle = \boldsymbol{\Phi}(\omega) = \boldsymbol{B}[i\omega]\,\sigma + \sigma\boldsymbol{B}^T[-i\omega] \tag{21}$$

を要請しても，Schottky 公式を適用できないので分散 σ は厳密に決定できない。われわれは，失なわれた情報に中身を入れて σ を評価する必要がある。上記の様な結合炉の場合には，次節に示す方法で中身を入れることができる。

3.2 Exp(t/τ)−型記憶関数を有する結合炉

(a) 等価な 4 点マルコフモデルの設定

推移確率が指数関数型で表わされるとき，すなわち $p_{ij}(t)=\exp(-t/\tau_i)/\tau_i$ ならば，推移領域を導入して 4 点マルコフモデルで (20 a) 式の非マルコフ系を扱える (Fig. 1 参照)。推移領域における中性子数 z_i $(i=1,2)$ を付加して，揺動の従がう定常マルコフ・ランジュバン方程式は次のように与えられる[17]；

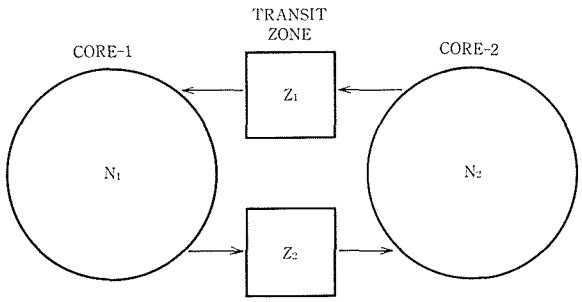


Fig. 1. Equivalent Markoffian Model for Non-Markoffian Coupled Core Having Exp−(t/τ)-type Memory Kernel.

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\xi}^\circ(t) = -\boldsymbol{B}^\circ\cdot\boldsymbol{\xi}^\circ(t) + \boldsymbol{F}^\circ(t) \tag{22 a}$$

但し，縦ベクトル $\boldsymbol{\xi}^\circ(t)=\mathrm{col}(\delta n_1, \delta z_1, \delta n_2, \delta z_2)$ 及び $\boldsymbol{F}^\circ(t)=\mathrm{col}(F_{n_1}, F_{z_1}, F_{n_2}, F_{z_2})$ であり，Boltzmann operator $\boldsymbol{B}^\circ$ は次のとうりである；

$$\boldsymbol{B}^\circ = \begin{pmatrix} a_1, & -\dfrac{1}{\tau_1}, & 0, & 0\\ 0, & \dfrac{1}{\tau_1}, & -b_2, & 0\\ 0, & 0, & a_2, & -\dfrac{1}{\tau_2}\\ -b_1, & 0, & 0, & \dfrac{1}{\tau_2}\end{pmatrix} \tag{22 b}$$

上式で，再び δz_1 及び δz_2 を消去すれば次式が得られる；

$$\frac{d}{dt}\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t) = -\int_0^t \boldsymbol{B}(t-s)\,\tilde{\boldsymbol{\xi}}(s)\,ds + \boldsymbol{F}_1(t) + \boldsymbol{F}_2(t) \tag{23 a}$$

$$\boldsymbol{F}_1(t) = \begin{pmatrix} F_{n_1}(t) \\ F_{n_2}(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} p_{12}(t-s), & 0 \\ 0, & p_{21}(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{z_1}(s) \\ F_{z_2}(s) \end{pmatrix} ds \tag{23 b}$$

$$\boldsymbol{F}_2(t) = \begin{pmatrix} p_{12}(t), & 0 \\ 0, & p_{21}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta z_1(0) \\ \delta z_2(0) \end{pmatrix} \tag{23 c}$$

(23 a) 式はもちろん (20 b) 式と同じ記憶関数を有する。しかし，2.3 節で議論したように，新たに付加した変数 $\delta z_j (j=1, 2)$ と $\delta n_i (i=1, 2)$ との直交性 $\langle \delta z_j \delta n_i \rangle = 0$ は a priori には要請されない (むしろ，$\langle \delta z_j \delta n_i \rangle \neq 0$ である)。すなわち，(23 a) 式の右辺最後の項 $\boldsymbol{F}_2(t)$ のために，2 変数に縮約して非マルコフにしたときには，通常の F-D 定理及び因果律は成り立たない。δz_j を δn_i に直交する変数 $\delta z'_j$ に変換してから，この $\delta z'_j$ を δn_i に縮約すれば，F-D 定理及び因果律は満足される様になるが記憶関数行列は (20 b) 式の様な単純なものではなくなる。

以下では，通常の F-D 定理及び因果律を要請する 4 変数マルコフモデル (22) 式に基づき計算をすすめる。因果律より，系の Green 関数 $\boldsymbol{G}(t)$ に関する方程式；$\dot{\boldsymbol{G}}(t) = -\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{G}(t)$ が得られ，その解の Fourier-Laplace 変換は次式で表現される：

$$\boldsymbol{G}[i\omega] = [i\omega + \boldsymbol{B}]^{-1}$$

この小論では，定常安定な場合に議論を限定する。安定型であるためには，系の固有値の実部がすべて負値をとれば良い。固有値は，上記 Green 関数の Laplace 変換 $\boldsymbol{G}[s]$ の逆行列式 $\det \boldsymbol{G}^{-1}[s] = 0$ すなわち，次の様な特性方程式；

$$s^4 + c_1 s^3 + c_2 s^2 + c_3 s + c_4 = 0 \tag{24 a}$$

$$c_1 = T_r\boldsymbol{B},\quad c_2 = [c_1^2 - T_r(\boldsymbol{B}^2)]/2,\quad c_3 = c_4 T_r \boldsymbol{B}^{-1},\quad c_4 = \det \boldsymbol{B} \tag{24 b}$$

の根であり，安定性の条件は次の様な Hurwitz の条件式で与えられる；

$$c_1 > 0,\quad c_2 > 0,\quad c_3 > 0 \text{ and } c_1 c_2 c_3 > c_1^2 c_4 + c_3^2 \tag{25}$$

われわれは，4 点結合炉モデルを (20 a) 式に対する等価なマルコフ系と呼んだが，Green 関数行列は 16 要素となり，非マルコフ 2 点モデルでは 4 要素である。当然の事ながら，両方のモデルで Green 関数の $N_i - N_j$ 要素は一致する。白色雑音源の強度を $\boldsymbol{D}$ とすれば PSD は $\boldsymbol{P}(\omega) = \boldsymbol{G}[i\omega]\, 2\boldsymbol{D}\, \boldsymbol{G}^T[-i\omega]$ と表されるが，Green 関数の増えた要素の影響が PSD にどの様に反映されるか吟味しよう。

雑音源は，零出力結合炉の場合，中性子の分枝過程 (neutron branching process) に起因する項 (binary noise；$\boldsymbol{Q}_B$) と中性子の吸収・散乱等の素過程の揺ぎに起因する項 (singlet noise；$\boldsymbol{BE} + \boldsymbol{EB}^T$) からなり，binary part は $N_i - N_i$ 要素，すなわち，$Q_{N_iN_i} = \overline{\nu_{Pi}(\nu_{Pi}-1)}\, \Lambda_{fi}\bar{N}_i (i=1, 2)$ への寄与があるのみである。ただし，Λ_{fi}, ν_{Pi} は各炉心における核分裂率，核分裂あたりの放出中性子数である。PSD をそれぞれの雑音源からの寄与により分けて次の様に書き換える；

$$\boldsymbol{P}(\omega) = \boldsymbol{G}[i\omega]\, \boldsymbol{Q}_B\, \boldsymbol{G}^T[-i\omega] + \boldsymbol{G}[i\omega]\, \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{G}_T[-i\omega] \tag{26 a}$$

ここで，行列 $\boldsymbol{E}$ も対角要素のみからなり，次式で与えられる；

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \bar{N}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Z}_2 \end{pmatrix},\quad \bar{Z}_i = \tau_i a_i \bar{N}_i \quad (i=1, 2) \quad [\because \text{定常条件より}] \tag{26 b}$$

主たる雑音源は中性子の分枝過程である事を考察すれば（すなわち，singlet part の寄与はオーダー的に十分無視し得る），PSD は実質的に次式で計算可能である。

$$\boldsymbol{P}(\omega) \cong \boldsymbol{G}[i\omega]\,\boldsymbol{Q}_B\,\boldsymbol{G}^T[-i\omega] \tag{27}$$

(b) 揺動の非可逆的循環の評価

パワースペクトル密度は(27)式で評価されるが，その虚数部分は次式の様になる；

$$Im\,P_{N_1N_2}(\omega) = \Gamma_{12}(\omega)\,Q_{N_1N_1} - \Gamma_{21}(\omega)\,Q_{N_2N_2} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}(\omega) &= Im\,\{G_{N_iN_i}[i\omega]\,G_{N_jN_i}[-i\omega]\} \qquad (i,j=1,2\,;\ i\neq j)\\ &= (b_j/\tau_j)(a_j+1/\tau_j)\,\omega\,(\omega^2+1/\tau_i^2)/|\det \boldsymbol{G}^{-1}[i\omega]|^2\end{aligned} \tag{29}$$

固有値 $\{s_l\,;\ l=1\sim4\}$ が負実値のとき，積分公式 $\int_{-\infty}^{\infty}\{a/(\omega^2+a^2)\}\,d\omega=(\pi/2)\,\mathrm{sgn}\,a$ を用い，定義式(9)，及び(28)式を使って結合炉心間の中性子振動の非可逆的循環は次式の如く求まる；

$$\alpha_{N_1N_2} = \frac{1}{2}\left[Y_1Q_{N_1N_1} - Y_2Q_{N_2N_2}\right], \tag{30 a}$$

$$Y_1 = (b_2/\tau_2)(a_2+1/\tau_2)\sum_{l=1}^{4}(A_l^{(1)}/s_l)\,\mathrm{sgn}\,(s_l), \tag{30 b}$$

$$Y_2 = (b_1/\tau_1)(a_1+1/\tau_1)\sum_{l=1}^{4}A_l^{(2)}/s_l)\,\mathrm{sgn}\,(s_l), \tag{30 c}$$

$$A_l^{(i)} \equiv -s_l^2(-s_l^2+1/\tau_i^2)/\Pi_l \tag{30 d}$$

$$\Pi_l \equiv \prod_{l'\neq l}^{4}(\omega^2+s_{l'}^2)|_{\omega^2=-s_l^2} \tag{30 e}$$

以上述べた4点結合炉モデルでの揺動の非可逆的循環 $\alpha_{N_1N_2}$ が結合パラメータ推定にも用いられる事を示すために，分散 σ を用いた表現を示す；

$$\alpha_{N_1N_2} = \frac{1}{2}\left[(a_1-a_2)\,\sigma_{N_1N_2} + (1/\tau_2)\,\sigma_{N_1Z_2} - (1/\tau_1)\,\sigma_{N_2Z_1}\right] \tag{31}$$

ここで，もし，あらかじめ $\sigma_{N_1Z_2}=\langle\delta n_1\delta z_2\rangle$ の直交性を前提すれば分散 $\sigma_{N_1N_2}$ と $\alpha_{N_1N_2}$ が直接 (a_1-a_2) を係数として比例関係がある事になり，結合パラメータ推定には用いられないことになる。しかし，(27)式からもわかるように $\sigma_{N_iZ_j}=(1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}ReP_{N_iZ_j}(\omega)\,d\omega$ は non-zero の値を有する。また，例えば，$\sigma_{N_1Z_2}$ は $\sigma_{N_1N_1}$，$\sigma_{N_2N_2}$ 及び $\sigma_{N_1N_2}$ と結びついている[17]。従って，$\sigma_{N_iN_j}(i,j=1,2)$ の測定をの $\alpha_{N_1N_2}$ 測定と同時に行なえば結合パラメータ推定に役立つわけである。われわれの導入した推移領域が中性子に対する irreversible filter になっている事は $\alpha_{N_iZ_j}(i,j=1,2)$ が対称炉でも消えないことからも理解されるが，この事情は次章でもっと詳しく述べる。

4. 巨視的循環と揺動の非可逆的循環

揺動の非可逆的循環は熱平衡状態における詳細均衡に対置するものとして，非平衡定常状態における循環平衡という特質が揺動に反映されたものであると解釈される。2.1節では，確率分布の循環 $\boldsymbol{J}_a=\alpha\partial p(\hat{\boldsymbol{\xi}},t)/\partial\hat{\boldsymbol{\xi}}$ から巨視的循環を理解した。本章では別の定式化により，再び，定常安定な“正規型”(normal case) の場合につき巨視的な循環との関係を議論しよう。

揺動の非可逆的循環 α に対応する巨視的な量として次の様なオーダーパラメータ；

$$\boldsymbol{A}(t) = [\boldsymbol{y}(t),\ \dot{\boldsymbol{y}}(t)]$$

を導入でき，systematic part $\boldsymbol{y}$ と fluctuating part $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ は analogous に考え得る。また，特に“normal”な場合には従来 $\boldsymbol{y}(t)$ の従がう現象論的線型ランジュバン方程式；

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{y}(t) = -\int_0^t \boldsymbol{\Psi}(t-s)\,\boldsymbol{y}(s)\,ds + \boldsymbol{F}(t) \tag{32 a}$$

または，これを周波数領域で表わした次式が設定され得ることが知られている。

$$i\omega\,\boldsymbol{y}[i\omega] = -\boldsymbol{\Psi}[i\omega]\,\boldsymbol{y}[i\omega] + \boldsymbol{F}[i\omega] \tag{32 b}$$

森島[18]は結合炉の中性子多群拡散方程式で $\boldsymbol{\Psi}[i\omega]$ を対角成分 $\boldsymbol{\Psi}_0$ と非対角成分 $\boldsymbol{\Psi}_c$ に分離し，

$$\boldsymbol{y}[i\omega] = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{(i\omega+\boldsymbol{\Psi}_0)^{-1}\boldsymbol{\Psi}_c\right\}^n (i\omega+\boldsymbol{\Psi}_0)^{-1}\boldsymbol{F}[i\omega]\,, \tag{33}$$

の型の無限級数の和に表わし，結合炉心の各領域間の中性子のやりとりを“循環”と呼んだが，この中性子のやりとりが結合効果を生ずることを上式(33)は示している。

揺動の従がう方程式も同様に次の様に表現される；

$$i\omega\,\tilde{\boldsymbol{\xi}}[i\omega] = \boldsymbol{K}[i\omega]\,\tilde{\boldsymbol{\xi}}[i\omega] + \boldsymbol{F}[i\omega] \tag{34}$$

ここで，regaession matrix $\boldsymbol{K}[i\omega]$ を対角成分 $\boldsymbol{K}_0$ と非対角成分 $\boldsymbol{K}_c$ とに分離しよう。すなわち，揺動についても，この対角成分 $\boldsymbol{K}_0$ からなる関数 $\boldsymbol{G}_0[i\omega]=[i\omega-\boldsymbol{K}_0]^{-1}$ で展開して次式を得る。

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}[i\omega] = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\boldsymbol{G}_0[i\omega]\,\boldsymbol{K}_c[i\omega]\right\}^n \boldsymbol{G}_0[i\omega]\,\boldsymbol{F}[i\omega] \tag{35}$$

われわれは，さらに，PSD $\boldsymbol{P}(\omega)=\langle\tilde{\boldsymbol{\xi}}[i\omega]\,\tilde{\boldsymbol{\xi}}^T[-i\omega]\rangle$ も上記級数展開を用いた型に表現しよう。

$$\boldsymbol{P}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\boldsymbol{G}_0\boldsymbol{K}_c\right\}^n \boldsymbol{G}_0\langle\boldsymbol{F}[i\omega]\,\boldsymbol{F}^T[-i\omega]\rangle\,\boldsymbol{G}_0^+\left\{\boldsymbol{K}_c^+\boldsymbol{G}_0^+\right\}^m \tag{36}$$

ここまでくると，揺動の非可逆的循環と巨視的循環との対応関係は明らかであろう。又，ランジュバン方程式がマルコフであっても非マルコフであっても上記の議論は成立する。1回の循環の PSD への寄与は次式で与えられる；

$$\boldsymbol{P}^{(1)}(\omega) = \left\{\boldsymbol{G}_0[i\omega]\,\boldsymbol{K}_c[i\omega]\right\}\boldsymbol{G}_0[i\omega]\,\langle\boldsymbol{F}[i\omega]\,\boldsymbol{F}^T[-i\omega]\rangle\,\boldsymbol{G}_0^T[-i\omega] + \text{c.c.} \tag{37}$$

$\boldsymbol{P}(\omega)$ のうち，$m+n=2l+1$ $(l=0, 1, 2, \cdots)$ のとき $Im\boldsymbol{P}(\omega)$ への寄与がある事に注意して，この $(2l+1)$ 次の寄与を $\boldsymbol{P}^{[2l+1]}(\omega)$ とかくと，揺動の非可逆的循環は次式の様に各項からの寄与の和の型に書くことができる。

$$\alpha = \sum_{l=0}^{\infty}\alpha\,[2l+1] \qquad (l = 0, 1, 2, \cdots) \tag{38 a}$$

$$\alpha\,[2l+1] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\,Im\boldsymbol{P}^{[2l+1]}(\omega)\,d\omega \tag{38 b}$$

さて，以上の様に展開された定式を用い，結合炉における2点マルコフモデルと4点マルコフモデルとの比較を行ない，モデルの性質を明らかにしよう。Table 1 と Table 2 に2つのモデ

Table 1.

行列 / モデル	$\boldsymbol{G}_0[i\omega]$	$\boldsymbol{K}_c[i\omega]$	$\{\boldsymbol{G}_0[i\omega]\,\boldsymbol{K}_c[i\omega]\}$
2点 マルコフ	$\begin{pmatrix}1/(i\omega+a_1) & 0\\ 0 & 1/(i\omega+a_2)\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & b_1\\ b_2 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & b_1/(i\omega+a_1)\\ b_2/(i\omega+a_2) & 0\end{pmatrix}$
4点 マルコフ	$\begin{pmatrix}1/(i\omega+a_1) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/(i\omega+1/\tau_1) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/(i\omega+a_2) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/(i\omega+1/\tau_2)\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1/\tau_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/\tau_2\\ b_2 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & (1/\tau_1)/(i\omega+a_1) & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_1/(i\omega+1/\tau_1) & 0\\ 0 & 0 & 0 & (1/\tau_2)/(i\omega+a_2)\\ b_2/(i\omega+1/\tau_2) & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Table 2.

循環 / モデル	$\alpha_{N_1N_2}$	$\alpha_{N_1N_2}[1]$
2点 マルコフ	$\frac{1}{2(a_1+a_2)}(b_2Q_{N_1N_1}-b_1Q_{N_2N_2})$	$\frac{1}{2(a_1+a_2)}(b_2Q_{N_1N_1}-b_1Q_{N_2N_2})$
4点 マルコフ	$\frac{1}{2}(Y_1Q_{N_1N_1}-Y_2Q_{N_2N_2})$	[(39)式参照]

ルにおける $\boldsymbol{G}_0$, $\boldsymbol{K}_c$, $\{\boldsymbol{G}_0\boldsymbol{K}_c\}$, α 及び $\alpha[1]$ をまとめて示す。

(i) 2点マルコフ結合炉の場合[17]

このときの $\alpha_{N_1N_2}$ は1回の循環からの寄与(37)から計算した $\alpha_{N_1N_2}[1]$ に一致する。$\alpha_{N_1N_2}$ は a_1, a_2, b_1, b_2 の単純な関数であり，炉心の緩和定数 a_1, a_2 が大きくなる程，また，炉心の非対称性が弱くなる程(すなわち，$(b_2Q_{N_1N_1}-b_1Q_{N_2N_2})$ が小さくなる程)小さな値をとる。さらに，$\alpha_{N_1N_2}$ は原子炉が臨界のときでも発散しない。(分散 $\sigma_{N_1N_2}$ は臨界 $a_1a_2=b_1b_2$ のとき発散する)

(ii) 4点マルコフ結合炉の場合

この場合，$\boldsymbol{K}_0$ の中に $\tau_i(i=1,2)$ が含まれることに注意をしよう。行列 $\{\boldsymbol{G}_0\boldsymbol{K}_c\}$ は，炉心—推移領域要素のみ零ではない値を有する。$\alpha[1]$[19] は次式の様になり α とは一致しない。

$$\alpha[1]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & b_2Q_{N_1N_1}/(a_1+1/\tau_2) \\ 0, & 0, & -b_1Q_{N_2N_2}/(a_2+1/\tau_1), & 0 \\ 0, & b_1Q_{N_2N_2}/(a_2+1/\tau_1), & 0, & 0 \\ -b_2Q_{N_1N_1}/(a_1+1/\tau_2), & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

$\alpha_{N_1N_2}[1]$ は零値をとることがわかる。また，$Q_{N_iN_i}(i=1,2)$ を含む項が分離している。このモデルでは，新らたに導入した推移領域が irreversible filter になっていることがこれから理解できる。すなわち，このモデルで考えれば，対称炉でも $\alpha[2l+1]$ は2点モデルの様に相殺されないので有限値が残ることになる。

なお，その他のいくつかの記憶関数の場合，非マルコフ効果が α にどの様に反映されるかについて，結合炉を例にとり調べられている[19]。

5. 議論と結言

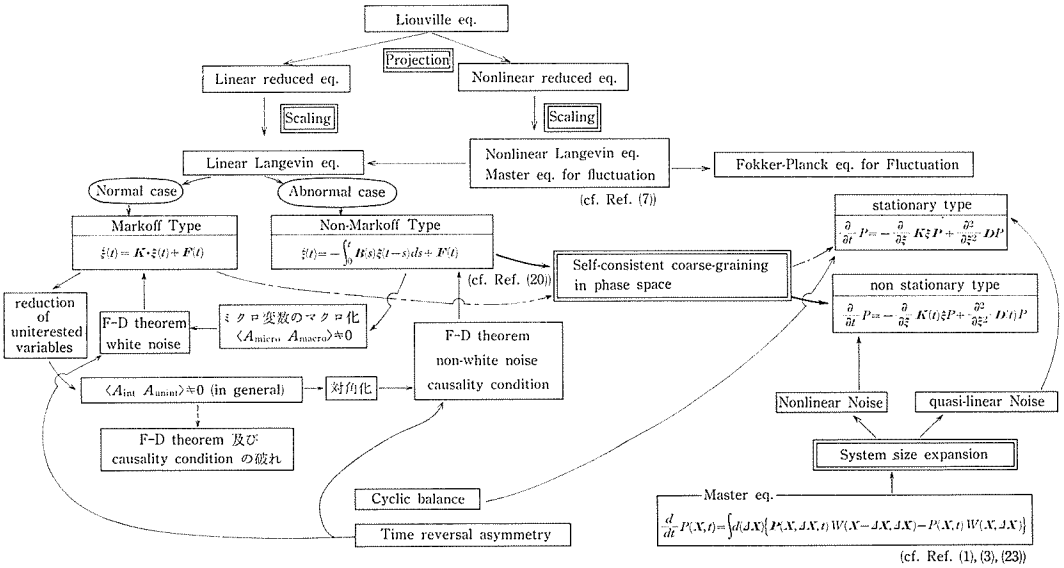
この小論では非マルコフ系の揺動の非可逆的循環を評価する1つの方法として，変数を増やしてそれに実体を与えマルコフ化できる結合炉の例を示した。また，変数を増やしたときのF-D定理及び因果律と変数の直交性が考察された。しかし，2章3節で展開した方法を用い解決し得るのは，記憶関数が e^{-at} 型のときであり，一般の記憶関数を有する系ではICFを評価するには何らかの別の評価法を考えねばならない。

4章で展開した揺動的表現は非マルコフの場合でも成立し，物理的意味も明確であるのでICFを非マルコフ系に対しても(9)式で評価することが考えられる。しかし，非マルコフのとき，非マルコフランジュバン方程式に対応するFokker-Planck方程式は非定常の型，すなわち，regression matrix $\boldsymbol{K}$ 及び diffusion matrix $\boldsymbol{D}$ が時間的に変化するものに帰着する[20]。(この様な非マルコフ性と非定常性との関連性は，平衡状態における非マルコフ Brownian oscillator を Fokker-Planck 方程式に変換して考えようとする場合にも現われる[21]。)従って，揺動の非可逆的循環 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ も非マルコフ系に対しては時間依存性を示すことになる。この結果と，(9)式から $\boldsymbol{\alpha}$ を評価するという定式化の物理的，数学的な整合性を検討する必要がある。

非線型性が内在するため分布の流れが存在し，揺動の非可逆的循環が導入されたわけであるが，system size 展開に基づき遷移確率 $W(\boldsymbol{X}, \Delta\boldsymbol{X})$ を与えるアプローチでは，揺動が小さくそれが中心極限定理に従がうとすると常に線型揺動が得られる。このとき，非線型雑音源は一般に揺動の非可逆的循環 $a(t)$ の非定常性へと導びく，一方，森によって行なわれている様に[7]，スケーリングを用いれば非線型揺動も得られる。この場合，定常状態でも非線型揺動を再び繰り込んで線型化すれば非マルコフ・ランジュバン方程式が得られ，これをさらに Fokker-Planck 方程式に変換すると非定常をあらわす方程式（$\boldsymbol{K}(t)$ 及び $D(t)$ が時間に依存する）が得られることになる。すなわち，非正規性と非マルコフ性及び非定常性の関連性が示唆されるわけである。原子炉物理の分野で非正規な温度揺ぎが観測されているが，非線型・非マルコフ性を重視する観点からの一層の研究が待たれる。

以上の事情は Table 3 にまとめて示してある。さらには，3章で展開したマルコフから非マルコフへの変数の逓減操作及びその逆操作と変数の直交性及び因果律，揺動散逸定理の関係も示した。

Table 3. The relation of the coarse-graining procedures and the reduced equations in non-equilibrium system.



参 考 文 献

1) Tomita, K. and Tomita, H.: Progr. Theor. Phys. **51**, 1731 (1974).
2) e. g., Landau & Lifshitz: 統計物理学下.
3) Kubo, R., Kitahara, K., Matsuo, K.: J. Stat. Phys. **9**, 51 (1973).
4) Saito, K.: JAERI-1187 "炉雑音の理論 (I)" (1970).
5) Kishida, K., Kanemoto, S., Sekiya, T. and Tomita, K.: J. Nucl. Sci. & Technol. **13**, 161 (1976).
6) Mori, H.: Progr. Theor. Phys. **33**, 423 (1965).
7) Mori, H.: Progr. Theor. Phys. **53**, 1617 (1975).
8) e. g., Saito, K.: Ann. Nucl. Eng. **1**, 31 (1974).
9) e. g., van Vliet, K. M.: J. Math. Phys. **12**, 1982 (1971).
10) 斎藤慶一: 北大工学部研究報告 **86**, 87 (1978) 及びその中の参照文献リスト.
11) Tomita, K., Ohta, T. and Tomita, H.: Progr. Theor. Phys. **52**, 737 (1974).

12) e. g., ref 7) and Pomeau, Y. and Resibois, P.: Phys. Rep. **19 C**, 63 (1975).
13) e. g., 赤池弘次, 中川東一郎共著: "統計的解析と制御" (サイエンス社, 1972).
14) e. g., Kerlin, T. W.: Nuclear Technology **36**, 7 (1977).
15) Nishigori, T. et al.: J. Nucl. Sci. Technol. **13**, 708 (1976).
16) Tokuyama, M. and Mori, H.: Progr. Theor. Phys. **55**, 411 (1976).
17) Konno, H. and Saito, K.: To be published in J. Nucl. Sci and Technol.
18) Morishima, N.: 日本原子力学会 52 年度秋の分科会予稿集, **D 49**.
19) Konno, H. and Saito, K.: Submitted to Ann. Nucl. Eng. (1979).
20) Konno, H. and Saito, K.: Progr. Theor. Phys. **60**, 1953 (1978).
21) Fox, R. F.: J. Stat. Phys. **16**, 259 (1977).
22) e. g., 数理科学, **153**, 5 (1976).
23) van Kampen, N. G.: Can. J. Phys. **39**, 551 (1961).