HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	転位集団による磁壁への作用圧力の分布
Author(s)	石田, 巖; 中江, 仁
Citation	北海道大學工學部研究報告, 96, 9-20
Issue Date	1979-11-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41585
Type	departmental bulletin paper
File Information	96_9-20.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第96号（昭和54年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 96 (1979)

転位集団による磁壁への作用圧力の分布

石田　巖*　中江　仁*

（昭和54年6月30日受理）

Pressure Exerted on a Domain Wall by Dislocations

Iwao ISHIDA and Hitoshi NAKAE

(Received June 30, 1979)

Abstract

A distribution of pressure exerted on a domain wall by dislocations is studied theoretically. Magnto-elastic interaction between a planer rigid wall and a straight dislocation line is treated on the basis of the relation of Peach-Koehler. A force exerted on the wall by a dislocation line is obtained. Assuming a distribution of dislocation lines, the mean values and variances of the force are calculated. As the dislocation density is ρ, the distribution of pressure on the wall is estimated applying the center limiting theorem to the forces. As a result, the mean pressure becomes zero and the pressure solely depends on the variance. And the variance depends on the distribution and morphology of dislocation lines as well as the λ_{100}, $C_{11}-C_{12}$, $\sqrt{A/K_1}$ and ρ.

1. 序　　論

軟磁性材料において，転位と磁壁との相互作用が保磁力，透磁率等の磁性に対する支配的要素の一つを構成していることはよく知られている[1]。塑性変形と磁性との関連については転位論や磁区構造論が成立する以前から研究が行われ[2]，また転位と磁壁との相互作用についても多くの研究者により取扱われている[3)-5]。

A. Seeger らは剛体磁壁と磁壁に平行な直線転位との間の相互作用を Peach-Koehler の関係[6]を用いて扱い，さらに統計的取扱いを形式的に展開し，保磁力および初磁化率の変形依存性，温度依存性を説明している[7]。しかしながら，統計的取扱いは具体化されてなく，従って保磁力の値そのものを説明するまでには至っていない。一方，池田は変形された鉄単結晶の透過電子顕微鏡観察により，変形初期にらせん転位が主として残留し，変形の増大とともに一様な分布へと移行することを報告している[8]。

本研究においては，転位による保磁力を定量的に取扱うために，A. Seeger らの形式的展開に対して，(i) すべり面内で任意の方向をもつ直線転位による作用力を統計的取扱いができる形で表現し，(ii) 転位分布に関する電子顕微鏡観察結果を表現するような確率密度関数を導入することによって，作用力の平均，分散を計算する。さらに中心極限定理を適用し，転位集団による作用圧力の分布を求める。このような具体的計算の結果，作用圧力は平均が零で，分散にもとづく

* 精密工学科　物理工学講座

ものであり，分散は λ_{100}, $C_{11}-C_{12}$, $\sqrt{A/K_1}$, 転位密度 ρ に依存するほか，転位線の分布および幾何学的形状に依存することが示される。

計算の具体的展開は実験との比較を考慮し，(001) 面方位の Fe-3% Si 単結晶を [110] 方向に圧延した場合の残留転位と磁壁との相互作用について行っている。

2. 計算の前提および諸定数

計算は以下の前提のもとに行われる。(i) 転位による磁壁への作用力は Peach-Koehler の関係[6]による。(ii) 磁壁は剛体磁壁と仮定され，(100) 面に平行な 180° 磁壁で，[100] 方向に移動する。(iii) 磁壁に交わる転位線の部分は直線で近似され，これら直線転位はらせん転位を中心に分布する。(iv) 圧延中作用するすべり系は，シュミット因子が最大となる (011)[1$\bar{1}$1], (0$\bar{1}$1)[$\bar{1}$11], (101)[$\bar{1}$11], ($\bar{1}$01)[1$\bar{1}$1] の 4 つとする。各すべり系は圧延中同等に作用し，残留転位は各すべり系で同等に分布している。以下，残留転位はすべり系によって特徴づけられ，表示される。

また，計算に用いた諸定数は以下のようである。

格子定数[9]	$a=2.8565\times10^{-10}$ (m)
結晶磁気異方性定数[9]	$K_1=35.5\times10^3$ (J/m^3)
飽和磁化[10]	$I_s=1.985$ (wb/m^2)
交換エネルギー定数[11]	$A=1.7\times10^{-11}$ (J/m)
磁歪定数[12]	$\lambda_{100}=23.7\times10^{-6}$
	$\lambda_{111}=-4.1\times10^{-6}$
弾性定数[13]	$C_{11}=2.210\times10^{11}$ (N/m^2)
	$C_{12}=1.351\times10^{11}$ (N/m^2)
	$C_{44}=1.223\times10^{11}$ (N/m^2)
	$(C_{11}-C_{12})/2=0.430\times10^{11}$ (N/m^2)

3. (100) 180° 磁壁

3.1 磁壁の厚さ

(100) 180° 磁壁内に [100], [010], [001] 方向を x, y, z 軸とする座標系を設定する。いま，磁化方向が (100) 磁壁面内で [010] から [0$\bar{1}$0] 方向へと回転しているとし，[010] 方向とのなす角度を φ とすると，

$$dx=\sqrt{\frac{A}{K_1}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\alpha\sin^2\varphi}} \tag{1}$$

という関係が成立する。ここで

$$\alpha=(9/4K_1)\lambda_{100}^2(C_{11}-C_{12})$$

である。x の原点を磁壁の中心とする条件で (1) 式を積分し，

$$x(\varphi)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{K_1}}\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}\ln\left|\frac{(1+\sqrt{\alpha+1})(\cos^2\varphi-\cos\varphi\sqrt{\cos^2\varphi+\alpha-1}+\sqrt{\alpha+1})}{(1-\sqrt{\alpha+1})(\cos^2\varphi-\cos\varphi\sqrt{\cos^2\varphi+\alpha-1}-\sqrt{\alpha+1})}\right|$$

を得る。**Fig. 1** に $x-\varphi$ 曲線を示した。

B. A. Lilley は磁壁の厚さ δ を

$$\delta=(x_c-x_a)+\varphi_a(dx/d\varphi)_a+(\pi-\varphi_c)(dx/\alpha\varphi)_c$$

と定義した[14]。ここで (x_a, φ_a), (x_c, φ_c) は第一，第三変曲点を示す。この定義に従えば $\delta=10.30$

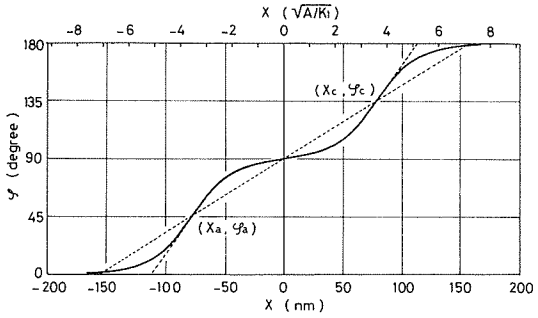

Fig. 1 Relation between the angle φ of magnetization from [010] and the distance X normal to 180° domain wall. (X_a, φ_a) and (X_c, φ_c) are first and third points of inflexion.

$\sqrt{A/K_1}$ あるいは $\delta=2254\times10^{-10}$ (m) を得る。しかし，後で記述される転位と磁壁との相互作用における磁壁の実効的厚さを表現するために，ここでは

$$\delta=\pi x_c/(\varphi_c-\pi/2) \tag{2}$$

と定義する。この定義に従えば，$\delta=14.35\sqrt{A/K_1}$ あるいは $\delta=3141\times10^{-10}$ (m) を得る。

3.2 磁壁内の過剰応力 σ^M

磁歪による歪成分は

$$\left.\begin{aligned} e_{ii}&=-(3/2)\lambda_{100}[C_{12}-\alpha_i^2(C_{11}+2C_{12})]/(C_{11}+2C_{12}) \\ e_{ij}&=3\lambda_{111}\alpha_i\alpha_j \qquad (i\neq j) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

と表現できる[11]。ここで，α_i, α_j は磁化の方向余弦である。いま，隣接磁区の拘束があるときおよびない場合の磁壁内の歪を $\boldsymbol{e}_1$ および $\boldsymbol{e}_0$ とすると，隣接磁区の拘束により，磁壁は実質上，$\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_0=\boldsymbol{e}$ の歪を受けた状態にある。(100) 磁壁の場合，(3) 式により $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_0$ を求め，$\boldsymbol{e}$ の各成分は

$$\begin{aligned} e_{11}&=e_{12}=e_{31}=0 \\ e_{22}&=(3/2)\lambda_{100}\sin^2\varphi \\ e_{33}&=-(3/2)\lambda_{100}\sin^2\varphi \\ e_{23}&=-(3/2)\lambda_{111}\sin 2\varphi \end{aligned}$$

となる。従って，磁壁の過剰応力 σ^M は

$$\sigma^M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_1\sin^2\varphi & R_2\sin 2\varphi \\ 0 & R_2\sin 2\varphi & R_1\sin^2\varphi \end{pmatrix} \tag{4}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} R_1&=-(3/2)\lambda_{100}(C_{11}-C_{12}) \\ R_2&=-(3/2)\lambda_{111}C_{44} \end{aligned}$$

とおいた。

4. 直線転位と磁壁との磁気弾性的相互作用

転位と磁壁との磁気弾性的相互作用による磁壁への作用力 $\boldsymbol{f}$ は Peach-Koehler の関係において[6]，転位による反作用として

$$\boldsymbol{f}=\int_l d\boldsymbol{l}\times(\sigma^M\cdot\boldsymbol{b}) \tag{5}$$

と表現できる[7]。ここで，dl，$\boldsymbol{b}$ は転位線の線素ベクトル，バーガス・ベクトルである。

いま，dl に平行な単位ベクトル $\boldsymbol{l}_u$ を $\boldsymbol{l}_u=[l_x, l_y, l_z]$ とし，$\boldsymbol{b}=[b_xb_yb_z]$ と表現したとき，(4)，(5) 式により，$\boldsymbol{f}$ の x 成分 f_x は

$$f_x=\int_l\{(l_yb_z+l_zb_y)R_1\sin^2\varphi+(l_yb_y-l_zb_z)R_2\sin 2\varphi\}dl \tag{6}$$

となる。従って，f_x は $\boldsymbol{l}_u$，$\boldsymbol{b}$ ともに磁壁に平行な成分 l_y，l_z，b_y，b_z に依存し，l_u，b_x には依存しない。よって，転位線が磁壁に垂直な場合 $f_x=0$ となる。また，(6) 式の第一項は偶関数で，$l_y/l_z=-b_y/b_z$ のとき零となる。

4.1 直線転位による作用力

(i) (011) $[1\bar{1}1]$ すべり系；(011) すべり面内に存在する直線転位の単位ベクトル $\boldsymbol{l}_u$ は $\boldsymbol{l}_u$ と [100] 方向とのなす角を θ として，

$$\boldsymbol{l}_u=[\cos\theta,\ \sin\theta/\sqrt{2},\ -\sin\theta/\sqrt{2}] \tag{7}$$

と表現される。$\boldsymbol{b}=(a/2)\ [1\bar{1}1]$ および (7) 式を (6) 式に代入して

$$f_x=(aR_1/\sqrt{2})\sin\theta\int_l\sin^2\varphi dl \tag{8}$$

を得る。

(a) 転位線が磁壁に平行でない場合；$dl=dx/|\cos\theta|$ の関係および (1) 式を使って，

$$dl=\frac{1}{|\cos\theta|}\sqrt{\frac{A}{K_1}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\alpha\sin^2\varphi}} \tag{9}$$

を得る。(9) 式を (8) 式に代入し，積分することにより

$$f_x(\theta)=-\frac{aR_1}{\sqrt{2}}\frac{\sin\theta}{|\cos\theta|}\sqrt{\frac{A}{K_1}}\ln\left|\frac{-1+\sqrt{\alpha+1}}{1+\sqrt{\alpha+1}}\right| \tag{10}$$

となる。一方，磁壁の厚さ δ 内で磁化方向が一様に回転し，$dx=(\delta/\pi)d\varphi$ と近似した場合，同様に (8) 式により

$$f_x(\theta)=(aR_1\sin\theta/2\sqrt{2})(\delta/|\cos\theta|) \tag{11}$$

を得る。(10) 式と (11) 式を比較することにより

$$\delta=-2\sqrt{A/K_1}\ln|(-1+\sqrt{\alpha+1})/(1+\sqrt{\alpha+1})| \tag{12}$$

という関係を得る。これより，$\delta=14.35\sqrt{A/K_1}$ あるいは $\delta=3141\times10^{-10}$ (m) を得る。これは (2) 式による磁壁の厚さの定義に一致する。いま，磁壁内に含まれる転位線の長さを $l=\delta/|\cos\theta|$ とし，転位線の単位長さ当りの作用力を $f_{xu}(\theta)$ は

$$f_{xu}(\theta)=(aR_1/2\sqrt{2})\sin\theta \tag{13}$$

となる。

(b) 転位線が磁壁に平行な場合；$\theta=\pi/2$ あるいは $\boldsymbol{l}_u=[01\bar{1}]/\sqrt{2}$ となり，(8) 式は

$$f_x(\varphi)=aR_1l\sin^2\varphi/\sqrt{2} \tag{14}$$

となる。ここで転位線の長さを l とした。また，転位線の単位長さ当りの作用力 $f_{xu}(\varphi)$ は

$$f_{xu}(\varphi)=aR_1\sin^2\varphi/\sqrt{2} \tag{15}$$

となる。また，転位線の単位長さによる磁壁のポテンシャル V_{xu} を $V_{xu}=-\int_{-\infty}^{x}f_{xu}dx$ と定義すると (15)，(1) 式により，

$$V_{xu}(\varphi)=(aR_1/\sqrt{2})\sqrt{A/K_1}\ln|(\cos\varphi+\sqrt{\cos^2\varphi+\alpha})/(1+\sqrt{\alpha+1})|$$

を得る。(13) 式について次のように極限をとると

$$\lim_{\theta\to\pi/2} f_{xu}(\theta)=aR_1/2\sqrt{2} \tag{16}$$

となり，(16) 式は形式的に磁壁に平行な転位線による作用力となる。一方，(15) 式を磁壁内で平均化した $\overline{f_{xu}(\varphi)}$ は

$$\overline{f_{xu}(\varphi)}=(1/\pi)\int_0^{\pi} f_{xu}(\varphi)d\varphi=aR_1/2\sqrt{2} \tag{17}$$

となり，(16) 式に一致する。

(ii) 他のすべり系についても **(i)** と同様な計算により作用力を求めることができる。以下に全体の結果をまとめておく。各すべり系における θ の基準方向 $\boldsymbol{u}$，転位線の単位ベクトル $\boldsymbol{l}_u$ は

すべり系	$\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{l}_u$
(011) [1$\bar{1}$1]	[100]	$[\cos\theta,\ \sin\theta/\sqrt{2},\ -\sin\theta/\sqrt{2}]$
(0$\bar{1}$1) [$\bar{1}$11]	[100]	$[\cos\theta,\ \sin\theta/\sqrt{2},\ \sin\theta/\sqrt{2}]$
(101) [$\bar{1}$11]	[10$\bar{1}$]	$[\cos\theta/\sqrt{2},\ \sin\theta,\ -\cos\theta/\sqrt{2}]$
($\bar{1}$01) [1$\bar{1}$1]	[101]	$[\cos\theta/\sqrt{2},\ \sin\theta,\ \cos\theta/\sqrt{2}]$

となる。また作用力は (12) の δ を用いて次のようになる。

(a) 転位線が磁壁に平行でない場合

すべり系	作用力	
(011) [1$\bar{1}$1]	$f_x(\theta)=(aR_1\sin\theta/2\sqrt{2})(\delta/\lvert\cos\theta\rvert)$	
	$f_{xu}(\theta)=aR_1\sin\theta/2\sqrt{2}$	
(0$\bar{1}$1) [$\bar{1}$11]	(011) [1$\bar{1}$1] と同じ	
(101) [$\bar{1}$11]	$f_x(\theta)=(aR_1/4)(\sin\theta-\cos\theta/\sqrt{2})(\delta\sqrt{2}/\lvert\cos\theta\rvert)$	(18)
	$f_{xu}(\theta)=(aR_1/4)(\sin\theta-\cos\theta/\sqrt{2})$	(19)
($\bar{1}$01) [1$\bar{1}$1]	(101) [$\bar{1}$11] と同じ	

(b) 転位線が磁壁に平行な場合

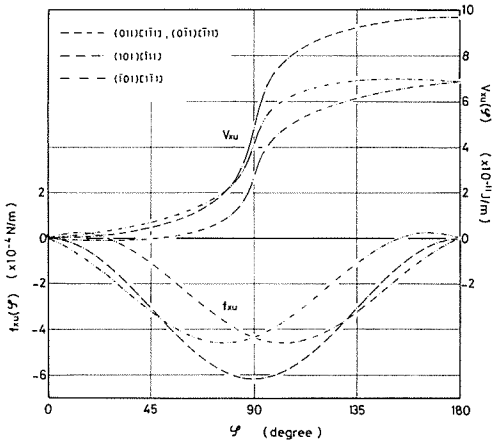

Fig. 2 Relation between the force or the potential energy exerted on the wall by a dislocation line per unit length parallel to the wall and the angle φ of magnetization in the wall at the dislocation line.

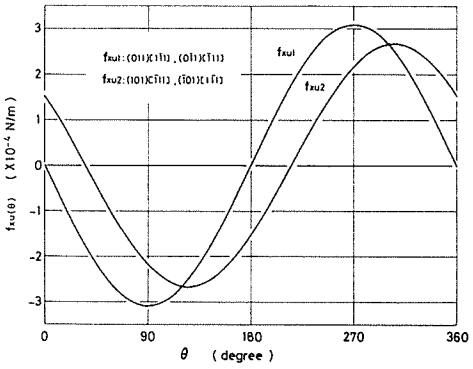

Fig. 3 Relation between the force $f_{xu}(\theta)$ exerted on the wall by a dislocation line per unit length intersecting the wall and the angle θ with a reference axis of dislocation line.

すべり系 作用力

(011) [1$\bar{1}$1] $f_{xu}(\varphi)=aR_1\sin^2\varphi/\sqrt{2}$

$V_{xu}(\varphi)=(aR_1/2)\sqrt{A/K_1}\ln|(\cos\varphi+\sqrt{\cos^2\varphi+\alpha})/(1+\sqrt{\alpha+1})|$

(0$\bar{1}$1) [$\bar{1}$11] (011) [1$\bar{1}$1] と同じ

(101) [$\bar{1}$11] $f_{xu}(\varphi)=a(R_1\sin^2\varphi+R_2\sin 2\varphi)/2$ (20)

$$V_{xu}(\varphi)=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{A}{K_1}}\left\{R_1\ln\left|\frac{\cos\varphi+\sqrt{\cos^2\varphi+\alpha}}{1+\sqrt{\alpha+1}}\right|-2R_2\sin^{-1}\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\alpha+1}}\right)\right\}$$

($\bar{1}$01) [1$\bar{1}$1] $f_{xu}(\varphi)=a(R_1\sin^2\varphi-R_2\sin 2\varphi)/2$ (21)

$$V_{xu}(\varphi)=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{A}{K_1}}\left\{R_1\ln\left|\frac{\cos\varphi+\sqrt{\cos^2\varphi+\alpha}}{1+\sqrt{\alpha+1}}\right|+2R_2\sin^{-1}\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\alpha+1}}\right)\right\}$$

Fig. 2 および **Fig. 3** に $f_{xu}(\varphi)$, $V_{xu}(\varphi)$ および $f_{xu}(\theta)$ を示した。

5. 直線転位集団による作用圧力

転位密度が 10^{10} (cm/cm^3) の場合，磁壁に交わる転位線の数は後の計算により，2.88～5.78×10^9 (cm^{-2}) となる。従って転位源や転位間の相互作用による転位配列の局所的な相関は統計的ゆらぎとして取扱うことが可能と思われる。

5.1 転位分布の表現

θ_{si} をらせん転位線の方向とすると，$\theta_{si}+m\pi$ (m; 整数) の方向もらせん転位である。以下転位の方向 θ は θ_{si} に関係するときは，$\theta_{si}-\pi\leqq\theta\leqq\theta_{si}+\pi$ の範囲で，θ_{si} に無関係な場合，$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の範囲で表現される。

転位線方向 θ の分布を記述する確率密度関数 $f_n(\theta)$ は $f_n(\theta\pm\pi)=f_n(\theta)$ を満たし，かつ，らせん転位を中心とした分布をあらわすものとする。$f_n(\theta)$ は正規分布を拡張した形で，

$$\theta_{si}-\pi\leqq\theta\leqq\theta_{si}-\pi/2\ ;\quad f_n(\theta)=\exp\{-(\theta-\theta_{si}+\pi)^2/2W^2\}/C$$
$$\theta_{si}-\pi/2\leqq\theta\leqq\theta_{si}+\pi/2\ ;\ f_n(\theta)=\exp\{-(\theta-\theta_{si})^2/2W^2\}/C$$
$$\theta_{si}+\pi/2\leqq\theta\leqq\theta_{si}+\pi\ ;\quad f_n(\theta)=\exp\{-(\theta-\theta_{si}-\pi)^2/2W^2\}/C$$

と表現される。ここで C は規格化定数で，

$$C=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\exp(-\theta^2/2W^2)d\theta$$

の関係にある。W^2 は正規分布の分散に相当するが，θ の範囲が有限なため一般的には分散に等しくならない。らせん転位周辺の分散 σ_θ^2 は

$$\sigma_\theta^2=\frac{2}{C}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\theta^2\exp(-\theta^2/2W^2)d\theta \tag{22}$$

となる。(22) 式は，$\theta=\pm\pi/2$ において $\exp(-\theta^2/2W^2)\sim 0$ となるような W^2 の小さな範囲では近似的に $\sigma_\theta^2=W^2$ が成立し，正規分布となる。一方，$\theta=\pm\pi/2$ において $\exp(-\theta^2/2W^2)\sim 1$ となるような W^2 の大きい範囲では近似的に $C=2\pi$ となり，(22) 式は

$$\sigma_\theta^2=\pi^2/12 \tag{23}$$

となる。(23) 式は密度関係が $1/2\pi$ の一様分布の分散を表現している。このように，$f_n(\theta)$ は正規分布から一様分布に至るまでを表現する。**Fig. 4** に W^2 と数値計算による σ_θ^2 との関係を示した。

以下において，(i) 一様分布は解析的取扱いが容易であり，(ii) $f_n(\theta)$ を含む計算結果は W^2 の大きいところで一様分布へ漸近する，(iii) 高い変形率で転位分布は一様分布となる等の理由で

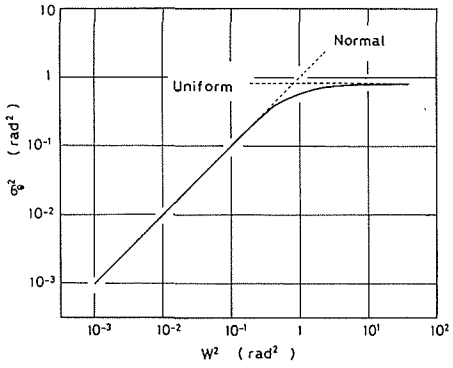

Fig. 4 Relation between the variance σ_θ^2 of the angle θ and the given W^2. Dislocation lines become normal distribution for small W^2 and uniform distribution for large W^2.

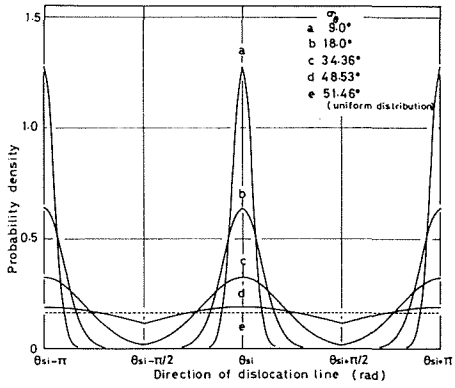

Fig. 5 Relation between the probability density and the direction of dislocation line. The dotted line indicates at uniform distribution.

$f_u(\theta)$ と同様に一様分布の確率密度関数 $f_u(\theta)$ も使用した。$f_u(\theta)$ は $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲で $f_u(\theta)=1/2\pi$ となる。**Fig. 5** に σ_θ をパラメータに，θ に対する $f_n(\theta)$ および $f_u(\theta)$ を示した。

一方，らせん転位線の方向 θ_{si} は各すべり系で

(011)[1$\bar{1}$1]; $\theta_{s_1}=-\cos^{-1}(1/\sqrt{3})=-54.74°$, (0$\bar{1}$1)[$\bar{1}$11]; $\theta_{s_2}=\cos^{-1}(-1/\sqrt{3})=125.26°$

(101)[$\bar{1}$11]; $\theta_{s_3}=\cos^{-1}(-2/\sqrt{6})=144.74°$, ($\bar{1}$01)[1$\bar{1}$1]; $\theta_{s_4}=-\cos^{-1}(2/\sqrt{6})=-35.26°$

となり，$\theta_{s_2}=\theta_{s_1}+\pi$, $\theta_{s_3}=\theta_{s_4}+\pi$ の関係にある。$f_n(\theta)$ の性質から，$\theta_{s_1}=\theta_{s_2}=\cos^{-1}(-1/\sqrt{3})=\theta_{m_1}$ および $\theta_{s_3}=\theta_{s_4}=\cos^{-1}(-2/\sqrt{6})=\theta_{m_2}$ とおくことができる。

5.2 磁壁に交わる転位数

磁壁に交わる転位線の長さは，転位線が磁壁に平行な場合，無限大となり，作用力も発散する。一方，ここで扱っている直線転位は完全な直線転位も含むが，一般には曲った転位線を直線で近似して扱っているとみなせる。このような理由から，(011) あるいは (0$\bar{1}$1) すべり面内において磁壁に交わる転位線の最大長さ $l_{\max}$ を導入し，θ_1 を次のように定義する。

$$\theta_1=\cos^{-1}(\delta/l_{\max})$$

すべり面によって θ の基準方向 $\boldsymbol{u}$ は異なるが，いずれも $\theta=\pi/2$, $3\pi/2$ で転位線は磁壁に平行となるから，以下，各すべり面において $\theta=\theta_1$ で磁壁に交わる転位線の長さを最大長さとする。$\theta_1 \leqq \theta \leqq \pi-\theta_1$, $\pi+\theta_1 \leqq \theta \leqq 2\pi-\theta_1$ の範囲で，l は最大の長さで一定とする。他の θ の範囲では，磁壁に交わる転位線の長さは (011), (0$\bar{1}$1) および (101), ($\bar{1}$01) すべり面上で $\delta/|\cos\theta|$ および $\sqrt{2}\,\delta/|\cos\theta|$ となる。

(1) θ が $f_n(\theta)$ に従って分布する場合 θ_{m_1}, θ_{m_2}, θ_1, 及び $l_{\max}$ を用いて，磁壁に交わる転位線の平均長さ $\bar{l}$ は

$$\begin{aligned}\bar{l}=\frac{1}{2C}\Bigg[&\int_{\theta_{m1}-\pi}^{\theta_{m1}-\pi/2}\frac{\delta}{\cos\theta}\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_1}+\pi)^2}{2W^2}\right]d\theta+\int_{\theta_{m1}-\pi/2}^{\theta_1}\frac{\delta}{\cos\theta}\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_1})^2}{2W^2}\right]d\theta\\&-\int_{\pi-\theta_1}^{\theta_{m1}+\pi/2}\frac{\delta}{\cos\theta}\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_1})^2}{2W^2}\right]d\theta-\int_{\theta_{m1}+\pi/2}^{\pi+\theta_1}\frac{\delta}{\cos\theta}\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_1}-\pi)^2}{2W^2}\right]d\theta\\&+\int_{2\pi-\theta_1}^{\pi+\theta_{m1}}\frac{\delta}{\cos\theta}\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_1}-\pi)^2}{2W^2}\right]d\theta+l_{\max}\left\{\int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1}\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_1})^2}{2W^2}\right]d\theta\right.\\&\left.+\int_{\pi+\theta_1}^{2\pi-\theta_1}\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_1}-\pi)^2}{2W^2}\right]d\theta\right\}+\sqrt{2}\left\{\int_{\theta_{m2}-\pi}^{\theta_{m2}-\pi/2}\frac{\delta}{\cos\theta}\exp\left[\frac{(\theta-\theta_{m_2}+\pi)^2}{2W^2}\right]d\theta\right.\end{aligned}$$

$$+\int_{\theta_{m2}-\pi/2}^{\theta_1}\frac{\delta}{\cos\theta}\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_2})^2}{2W^2}\right]d\theta-\int_{\pi-\theta_1}^{\theta_{m2}+\pi/2}\frac{\delta}{\cos\theta}\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_2})^2}{2W^2}\right]d\theta$$
$$-\int_{\theta_{m2}+\pi/2}^{\pi+\theta_1}\frac{\delta}{\cos\theta}\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_2}-\pi)^2}{2W^2}\right]d\theta+\int_{2\pi-\theta_1}^{\pi+\theta_{m2}}\frac{\delta}{\cos\theta}\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_2}-\pi)^2}{2W^2}\right]d\theta\Bigg\}$$
$$+\sqrt{2}\,l_{\max}\left\{\int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1}\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_2})^2}{2W^2}\right]d\theta+\int_{\pi+\theta_1}^{2\pi-\theta_1}\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_2}-\pi)^2}{2W^2}\right]d\theta\right\}\Bigg] \qquad (24)$$

となる。$\bar{l}$ は数値積分によって求めた。**Fig. 6** は σ_θ をパラメータに，$l_{\max}$ に対する $\bar{l}$ の関係

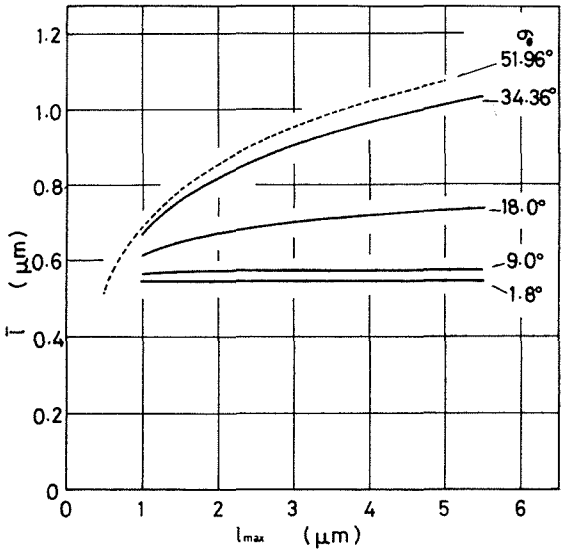

Fig. 6 Relation between the mean length $\bar{l}$ of a dislocation line intersecting the wall and the maximum length $l_{\max}$.

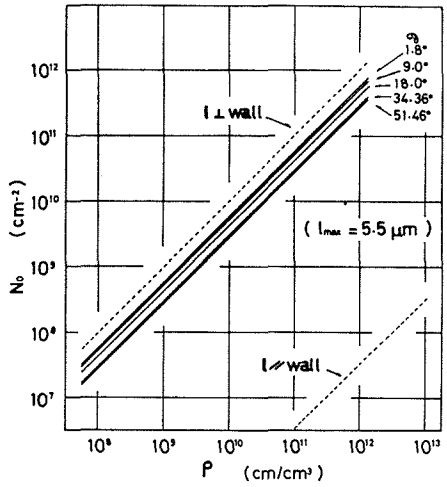

Fig. 7 Relation between the number N_0 of dislocation lines intersecting the unit area of wall and dislocation density ρ. The dotted lines indicate N_0 in the extreme case of all dislocation lines being normal or parallel to the wall.

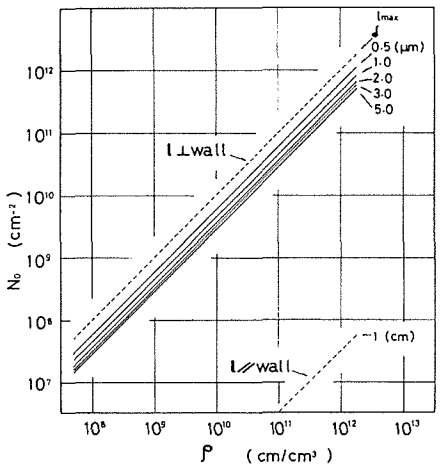

Fig. 8 Relation between the number N_0 of dislocation lines intersecting the unit area of wall and dislocation density ρ, when dislocation lines distribute uniformly.

を示す。磁壁の単位面積に交叉する転位線の数 N_0, 転位密度 ρ および $\bar{l}$ との間には

$$N_0=\rho\delta/\bar{l} \tag{24}$$

という関係がある。転位線が磁壁に垂直な場合, $\bar{l}=\delta$ で $N_0=\rho$ となり, 磁壁に平位な場合, $\bar{l}=1$ で $N_0=\rho\delta$ となる。**Fig. 7** に $l_{\max}=0.5(\mu\mathrm{m})$ の場合について, σ_θ をパラメータに N_0 と ρ との関係を示した。破線は $N_0=\rho$, $N_0=\rho\delta$ を示す。また, 転位線がすべて一定の方向 θ で, $\bar{l}=l$ の場合 $N_0 f_x(\theta)=\rho\delta f_{xu}(\theta)$ を得る。

(2) **θ が一様分布する場合** $\bar{l}$ は

$$\bar{l}=(1/2\pi)\{\delta\ln|(1+\sin\theta_1)/(1-\sin\theta_1)|+l_{\max}(\pi-2\theta_1)\}(1+\sqrt{2})$$

となる。$\bar{l}$ と $l_{\max}$ との関係は **Fig. 6** に破線で示した。さらに (24) 式により N_0 を得る。**Fig. 8** に $l_{\max}$ をパラメータに N_0 と ρ との関係を示した。

5.3 作用力の平均および分散

(011) [1$\bar{1}$1], (0$\bar{1}$1) [$\bar{1}$11], (101) [$\bar{1}$11], ($\bar{1}$01) [1$\bar{1}$1] すべり系の残留転位による作用力を $f_{xh}(\theta)$, $f_{xi}(\theta)$, $f_{xj}(\theta)$, $f_{xk}(\theta)$ とすると, **4.1 (ii)** の **(a)** にまとめられた結果から, $f_{xh}(\theta)=f_{xi}(\theta)=f_{x_1}(\theta)$, $f_{xj}(\theta)=f_{xk}(\theta)=f_{x_2}(\theta)$ とおくことができる (以下の計算においては磁壁に平行な転位線による作用力は $l_{\max}f_{xu}(\theta=\pi/2)$ と表現される)。$f_{x_1}(\theta)$, $f_{x_2}(\theta)$ は $l_{\max}$ を用い, 各 θ の範囲で

θ の範囲	$f_{x_1}(\theta)$	$f_{x_2}(\theta)$
$0\leqq\theta\leqq\theta_1$	$(aR_1\delta/2\sqrt{2})\tan\theta$	$(aR_1\delta/4)(\sqrt{2}\tan\theta-1)$
$\theta_1\leqq\theta\leqq\pi-\theta_1$	$(aR_1l_{\max}/2\sqrt{2})\sin\theta$	$(aR_1l_{\max}/4)(\sqrt{2}\sin\theta-\cos\theta)$
$\pi-\theta_1\leqq\theta\leqq\pi+\theta_1$	$-(aR_1\delta/2\sqrt{2})\tan\theta$	$-(aR_1\delta/4)(\sqrt{2}\tan\theta-1)$
$\pi+\theta_1\leqq\theta\leqq2\pi-\theta_1$	$(aR_1l_{\max}/2\sqrt{2})\sin\theta$	$(aR_1l_{\max}/4)(\sqrt{2}\sin\theta-\cos\theta)$
$2\pi-\theta_1\leqq\theta\leqq2\pi$	$(aR_1\delta/2\sqrt{2})\tan\theta$	$(aR_1\delta/4)(\sqrt{2}\tan\theta-1)$

となる。$f_{x_1}(\theta)$, $f_{x_2}(\theta)$, $f_n(\theta)$ あるいは $f_u(\theta)$ を用いて, 一本の転位線による作用力の平均, 分散を以下に求める。

(1) **θ が $f_n(\theta)$ に従って分布する場合** 以下の計算において, $l_{\max}$ は, θ_1 が $(\pi-\theta_{m_2}<)\pi-\theta_{m_1}<\theta_1<\pi/2$ となる範囲に設定している。

(i) (011) [1$\bar{1}$1], (0$\bar{1}$1) [1$\bar{1}$1] すべり系; 平均作用力 $E[f_{x_1}(\theta)]$ は

$$\begin{aligned}E[f_{x_1}(\theta)]=(aR_1/2\sqrt{2}C)\Big[\delta\Big\{&\int_{\theta_{m1}-\pi}^{\theta_{m1}-\pi/2}\tan\theta\exp\Big[-\frac{(\theta-\theta_{m_1}+\pi)^2}{2W^2}\Big]d\theta\\&+\int_{\theta_{m1}-\pi/2}^{\theta_1}\tan\theta\exp\Big[-\frac{(\theta-\theta_{m_i})^2}{2W^2}\Big]d\theta-\int_{\pi-\theta_1}^{\theta_{m1}+\pi/2}\tan\theta\exp\Big[-\frac{(\theta-\theta_{m_1})^2}{2W^2}\Big]d\theta\\&-\int_{\theta_{m1}+\pi/2}^{\pi+\theta_1}\tan\theta\exp\Big[-\frac{(\theta-\theta_{m_1}-\pi)^2}{2W^2}\Big]d\theta+\int_{2\pi-\theta_1}^{\pi+\theta_{m1}}\tan\theta\exp\Big[-\frac{(\theta-\theta_{m_1}-\pi)^2}{2W^2}\Big]d\theta\Big\}\\&+l_{\max}\Big\{\int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1}\sin\theta\exp\Big[\frac{-(\theta-\theta_{m_1})^2}{2W^2}\Big]d\theta+\int_{\pi+\theta_1}^{2\pi-\theta_1}\sin\theta\exp\Big[-\frac{(\theta-\theta_{m_1}-\pi)^2}{2W^2}\Big]d\theta\Big\}\Big]\end{aligned}\tag{25}$$

と表現される。変数変換により

$$E[f_{x_1}(\theta)]=0$$

となる。このとき, 作用力の分散 $V[f_{x_1}(\theta)]$ は

$$\begin{aligned}V[f_{x_1}(\theta)]=E[f_{x_1}(\theta)^2]=(a^2R_1^2/8C)\Big[\delta^2\Big\{&\int_{-\pi+\theta_{m1}}^{\theta_{m1}-\pi/2}\tan^2\theta\exp\Big[-\frac{(\theta-\theta_{m_1}+\pi)^2}{2W^2}\Big]d\theta\\&+\int_{\theta_{m1}-\pi/2}^{\theta_1}\tan^2\theta\exp\Big[-\frac{(\theta-\theta_{m_1})^2}{2W^2}\Big]d\theta+\int_{\pi-\theta_1}^{\theta_{m1}+\pi/2}\tan^2\theta\exp\Big[-\frac{(\theta-\theta_{m_1})^2}{2W^2}\Big]d\theta\end{aligned}$$

$$+\int_{\theta_{m1}+\pi/2}^{\pi+\theta_1}\tan^2\theta\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_1}-\pi)^2}{2W^2}\right]d\theta+\int_{2\pi-\theta_1}^{\pi+\theta_{m1}}\tan^2\theta\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_1}-\pi)^2}{2W^2}d\theta\right]\Bigg\}$$

$$+l_{\max}^2\left\{\int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1}\sin^2\theta\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_1})^2}{2W^2}\right]d\theta+\int_{\pi+\theta_1}^{2\pi-\theta_1}\sin^2\theta\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_1}-\pi)^2}{2W^2}\right]d\theta\right\}\Bigg] \quad (26)$$

となる。数値計算の結果を **Fig. 9** に，σ_θ をパラメータに，$l_{\max}$ に対する $V[f_{x_1}(\theta)]$ として示す。

(ii) (101) [$\bar{1}11$], ($\bar{1}01$) [$1\bar{1}1$] すべり系；平均作用力は **(i)** と同様に表現され，$E[f_{x_2}(\theta)]=0$ を得る。ここで，

$$g_1(\theta)=2\tan^2\theta-2\sqrt{2}\tan\theta+1, \qquad g_2(\theta)=\sin^2\theta-\sqrt{2}\sin 2\theta+1$$

とおくと，作用力の分散 $V[f_{x_2}(\theta)]$ は

$$V[f_{x_2}(\theta)]=E[f_{x_2}(\theta)^2]=\left(\frac{a^2R_1^2}{16C}\right)\Bigg[\delta^2\Bigg\{\int_{\theta_{m2}-\pi}^{\theta_{m2}-\pi/2}g_1(\theta)\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_2}+\pi)^2}{2W^2}\right]d\theta$$

$$+\int_{\theta_{m2}-\pi/2}^{\theta_1}g_1(\theta)\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_2})^2}{2W^2}\right]d\theta+\int_{\pi-\theta_1}^{\theta_{m_2}+\pi/2}g_1(\theta)\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_2})^2}{2W^2}\right]d\theta$$

$$+\int_{\theta_{m2}+\pi/2}^{\pi+\theta_1}g_1(\theta)\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_2}-\pi)^2}{2W^2}\right]d\theta+\int_{2\pi-\theta_1}^{\theta_{m_2}+\pi}g_1(\theta)\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_2}-\pi)^2}{2W^2}\right]d\theta\Bigg\}$$

$$+l_{\max}^2\left\{\int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1}g_2(\theta)\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_2})^2}{2W^2}\right]d\theta+\int_{\pi+\theta_1}^{2\pi-\theta_1}g_2(\theta)\exp\left[-\frac{(\theta-\theta_{m_2}-\pi)^2}{2W^2}\right]d\theta\right\}\Bigg] \quad (27)$$

となる。数値計算の結果は **Fig. 10** に示される。

(2) 一様分布の場合

(i) (011) [$1\bar{1}1$], ($0\bar{1}1$) [$\bar{1}11$] すべり系；平均作用力は **(1)** の **(i)** と同様にして，$E[f_{x_1}(\theta)]=0$ となり，$V[f_{x_1}(\theta)]$ は

$$V[f_{x_1}(\theta)]=(a^2R_1^2/8\pi)\{2\delta^2(\tan\theta_1-\theta_1)+l_{\max}^2(\pi-2\theta_1+\sin^2\theta_1)\} \quad (28)$$

となる。$V[f_{x_1}(\theta)]$ と $l_{\max}$ との関数は **Fig. 9** に破線で示される。

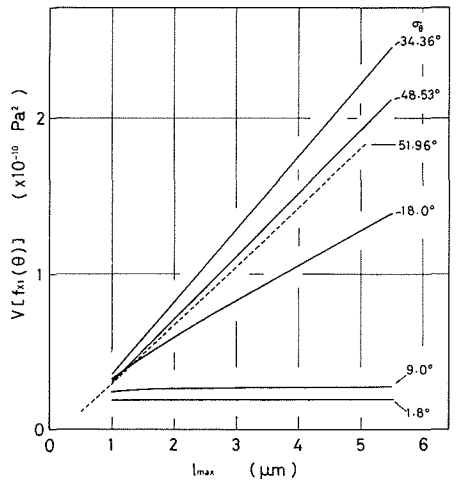

Fig. 9 Relation between the variance $V[f_{x_1}(\theta)]$ of the force exerted on the wall by a dislocation line on (011) or ($0\bar{1}1$) plane and the maximum length $l_{\max}$ of a dislocation line on (011) intersecting the wall. The dotted line indicates at uniform distribution.

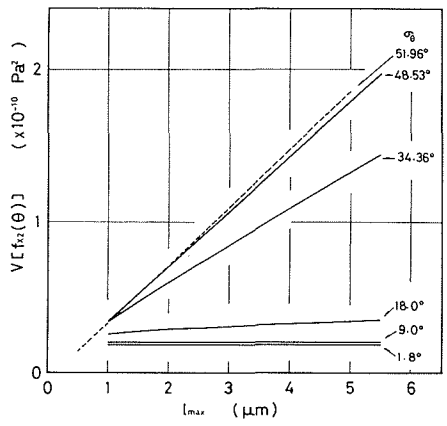

Fig. 10 Relation between the variance $V[f_{x_2}(\theta)]$ of the force exerted on the wall by a dislocation line on (101) or ($\bar{1}01$) plane and the maximum length $l_{\max}$. The dotted line indicates at uniform distribution.

(ii) (101) [$\bar{1}11$], (101) [$1\bar{1}1$] すべり系；平均作用力は **(i)** と同様に $E[f_{x_2}(\theta)]=0$ となり，分散 $V[f_{x_2}(\theta)]$ は

$$V[f_{x_2}(\theta)]=(a^2R_1^2/32\pi)\{4\delta^2(2\tan\theta_1-\theta_1)+l_{\max}^2(3\pi-6\theta_1+\sin 2\theta_1)\} \tag{29}$$

となる。**Fig. 10** の破線は $V[f_{x_2}(\theta)]$ と $l_{\max}$ との関係を示す。

5.4 作用圧力の分布

磁壁の単位面積に交わる N_0 本の転位によって磁壁が受ける圧力 p_{x_0} は各々の転位の作用力の和として表現できるという仮定のもとに

$$p_{x_0}=\sum_{h=1}^{N_0/4}f_{xh}(\theta)+\sum_{i=1}^{N_0/4}f_{xi}(\theta)+\sum_{j=1}^{N_0/4}f_{xj}(\theta)+\sum_{k=1}^{N_0/4}f_{xk}(\theta) \tag{30}$$

となる。ここで同等な4つのすべり系の各々に属する転位の数を等しく $N_0/4$ とした。また，各すべり系の作用力の和をそれぞれ，

$$p_{x_1}=\sum_{h=1}^{N_0/4}f_{xh}(\theta),\quad p_{x_2}=\sum_{i=1}^{N_0/4}f_{xi}(\theta),\quad p_{x_3}=\sum_{j=1}^{N_0/4}f_{xj}(\theta),\quad p_{x_4}=\sum_{k=1}^{N_0/4}f_{xk}(\theta)$$

とおく。あるすべり系に属する $N_0/4$ 本の転位による作用力は各々互いに統計的に独立で，**5.3** で求めた平均，分散をもつとして中心局限定理を適用すれば，p_{x_1}, p_{x_2}, p_{x_3}, p_{x_4} の分布はそれぞれ平均0，分散 $(N_0/4)V[f_{x_1}(\theta)]$, $(N_0/4)V[f_{x_1}(\theta)]$, $(N_0/4)V[f_{x_2}(\theta)]$, $(N_0/4)V[f_{x_2}(\theta)]$ の正規分布となる。さらに各すべり系は互いに統計的に独立であるとすると，p_{x_0} は平均0，分散 $(N_0/2)\{V[f_{x_1}(\theta)]+V[f_{x_2}(\theta)]\}$ の正規分布となる。p_{x_0} の分散を

$$\sigma_{p_0}^2=(N_0/2)\{V[f_{x_1}(\theta)\}+V[f_{x_2}(\theta)]\} \tag{31}$$

とおくと，p_{x_0} が $-p_u\leqq p_{x_0}\leqq p_u$ の範囲に入る確率 P は

$$P(-p_u\leqq p_{x_0}\leqq p_u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{p_0}^2}}\int_{-p_u}^{p_u}\exp\left(\frac{-p_{x_0}^2}{2\sigma_{p_0}^2}\right)dp_{x_0} \tag{32}$$

と表現される。

6. 結　　論

剛体磁壁および転位線の直線近似により，転位と磁壁との相互作用力を Peach-Koehler の関係で取扱い，らせん転位を中心とした転位分布を表現する確率密度関数を導入し，一本の転位線による作用力の平均，分散，さらに磁壁に交わる転位数をもとめ，中心極限定理を適用して転位集団による磁壁への作用圧力を具体的にもとめた結果，以下のことが明らかとなった。

1. 転位集団による磁壁への作用圧力は，平均が零で，分散にもとづくものである。
2. 作用圧力の分散は次のような因子に依存する。
   (i) $l_{\max}$ あるいは θ_1 に，すなわち，転位線の幾何学的形状に依存する。
   (ii) σ_θ，すなわち，転位の分布に依存する。
   (iii) 磁壁に交わる転位線の数 N_0 に依存する。N_0 は転位密度，転位分布，転位線の幾何学的形状に依存する。
   (iv) R_1, δ，すなわち，λ_{100}, $C_{11}-C_{12}$, $\sqrt{A/K_1}$ に依存する。

おわりに，本研究の数値計算には北海道大学大型計算センターを利用させていただきました。関係者の方々に感謝致します。

参 考 文 献

1) H. Traüble: Magnetism and Metallurgy, **vol. 2,** (1969), p. 622, Academic Press.
2) W. S. Messkin: Arch. Eisenhuttenwes., **3** (1929), 6, p. 417.
3) H. Dietrich and E. Kneller: Z. Metalk., **47** (1956), 11, p. 716.
4) F. Vicena: Czech. J. Phys., **5** (1955), 4, p. 480.
5) M. Kersten: Z. angew. Phys., **8** (1956). 10, p. 496.
6) M. Peach and S. Koehler: Phys. Rev., **80** (1950), 11, p. 436.
7) A. Seeger, H. Kronmüller, H. Rieger and H. Traüble: J. Appl. Phys., **35** (1964), 3, p. 740.
8) S. Ikeda: J. Phys. Soc. Japan, **27** (1969), 6, p. 1564.
9) L. P. Trasov: Phys. Rev., **15** (1939), 12, p. 1231.
10) H. J. Williams, R. M. Bozorth and W. Shockley: Phys. Rev., **75** (1949), 1, p. 155.
11) C. Kittel: Rev. Mod. Phys., **21** (1949), 4, p. 541.
12) J. W. Shilling and G. L. House: IEEE Trans. Mag., **Mag 10** (1974), 2, p. 195.
13) J. L. Routbort, C. N. Reid, E. S. Fisher and D. J. Dever: Acta Met., **19** (1971), 12, p. 1307.
14) B. A. Lilley: Phil. Mag., **41** (1950), p. 792.