HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	任意形状を有する四辺形膜の自由振動
Author(s)	入江, 敏博; 山田, 元; 依田, 兼雄
Citation	北海道大學工學部研究報告, 96, 1-8
Issue Date	1979-11-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41591
Type	departmental bulletin paper
File Information	96_1-8.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第96号（昭和54年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 96 (1979)

任意形状を有する四辺形膜の自由振動

入江敏博* 山田 元* 依田兼雄**

（昭和54年6月30日受理）

Free Vibration of a Quadrangular Membrane with an Arbitrary Shape

Toshihiro IRIE, Gen YAMADA and Kaneo YODA

(Received June 30, 1979)

Abstract

The free vibration of a quadrangular membrane with an arbitrary shape is analyzed by use of the Galerkin method. For this purpose, a quadrangular membrane is transformed into a square membrane with edges of unit length by the transformation of variables. By applying the Galerkin method to the equation of motion of the membrane, the frequency equation is derived analytically, where a double Fourier series is used as an admissible function expressing the transverse deflection of the membrane.

The present method is applied to quadrangular membranes symmetrical with respect to one of the diagonals; the natural frequencies (the eigenvalues) and the mode shapes of the membranes are calculated numerically and the effects of the shape of the membrane are studied.

1. 緒　　言

最近，種々の機械や構造物に軽量構造が広範囲に採用されるにいたって，基本的な構造材としての薄板や膜の占める割合が大きくなっており，これらの振動問題の研究もきわめて活発である。一様な張力で張られたたわみ易い弾性体を膜というが，大きい張力場におかれた薄板において張力/曲げ剛性比が大きい場合，これを近似的に膜と考えて取扱うことも可能であり，また周辺が単純支持された薄板の振動に膜のそれとある定った相似性があることから，膜理論も大きい実用性を有している。

種々の形状を有する膜の研究には，ひし形や平行四辺形膜[1,2,3]，偏心した内部境界を有する円形膜[4]，多角形膜[5]の自由振動，あるいは円環状の衝撃荷重を受ける円形膜の過渡応答[6]，三日月形膜の自由振動やだ円形膜の動的応答[7]などがあり，また周辺が単純支持された多角形板と同形の膜との相似性[8]と，この考え方に基づいて等脚台形板[9]，不等脚台形板[10]の自由振動を論じた研究もあるが，任意の形状を有する四辺形膜の自由振動を論じた研究は見当らない。

本論文では，任意形状を有する（凸形）四辺形膜の自由振動を解析し，その固有振動数と振動形をかなり高次の振動まで求める。そのために，まず四辺形膜を適当な座標変換によって単位長さを有する正方形膜に変換し，これに関する運動方程式を導く。ついで膜のたわみを二重フーリ

* 機械工学第二学科　機械力学講座
** 工学研究科修士課程　機械工学第二専攻

ェ正弦級数で近似し，ガラーキン法[11]によって振動数方程式を誘導する。そしてこの方法を，一つの対角線に関して対称な四辺形膜に適用して固有振動数と振動形を数値計算し，その結果から膜の形状が振動に与える影響を明らかにする。なおひし形膜について，この方法によって得た数値計算の結果を他の著者が求めた数値と比較検討することによってその妥当性を確かめる。

2. 四辺形膜の振動数方程式

図1は任意形状を有する四辺形膜を示す。一つの頂点を原点にとり，図のように直角座標系 $0-xy$ と，他の三つの頂点の座標を定める。ここで a は代表寸法，α_i, β_i $(i=1, 2, 3)$ は無次元量を表わす。膜の自由振動を支配する方程式は，周知の通り

$$T\nabla^2 W+\rho\omega^2 W=0 \tag{1}$$

と書ける。ここで W は膜の横変位，ρ は単位面積当りの質量，T は張力，ω は円振動数を表わす。

いま，新しい無次元変数 u, v を用いて

$$\left.\begin{aligned} x&=a(\alpha_1 u+\alpha_2 v+\alpha_3 uv)\\ y&=a(\beta_1 u+\beta_2 v+\beta_3 uv)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

により変換すれば，四辺形膜は単位長さの辺を有する正方形膜に変換される。この場合，式 (1) は

$$\begin{aligned} L(W)=f_{20}(u, v)\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}-2f_{11}(u, v)\frac{\partial^2 W}{\partial u\partial v}+f_{02}(u, v)\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\\ -2f_{10}(u, v)\frac{\partial W}{\partial u}-2f_{01}(u, v)\frac{\partial W}{\partial v}+\lambda^2 f_{00}(u, v)W=0\end{aligned} \tag{3}$$

となる。式 (3) の係数は

$$\begin{aligned} f_{20}(u, v)&=(c_{22}+2c_{23}u+c_{33}u^2)(d_{12}-d_{31}u-d_{23}v)\\ f_{11}(u, v)&=(c_{12}+c_{31}u+c_{23}v+c_{33}uv)(d_{12}-d_{31}u-d_{23}v)\\ f_{02}(u, v)&=(c_{11}+2c_{31}v+c_{33}v^2)(d_{12}-d_{31}u-d_{23}v)\\ f_{10}(u, v)&=(c_{12}+c_{31}u+c_{23}v+c_{33}uv)d_{23}\\ f_{01}(u, v)&=(c_{12}+c_{31}u+c_{23}v+c_{33}uv)d_{31}\\ f_{00}(u, v)&=(d_{12}-d_{31}u-d_{23}v)^3\end{aligned} \tag{4}$$

で与えられる。ここで c_{ij}, d_{ij} は

$$c_{ij}=\alpha_i\alpha_j+\beta_i\beta_j,\qquad d_{ij}=\alpha_i\beta_j-\alpha_j\beta_i\qquad (i, j=1, 2, 3) \tag{5}$$

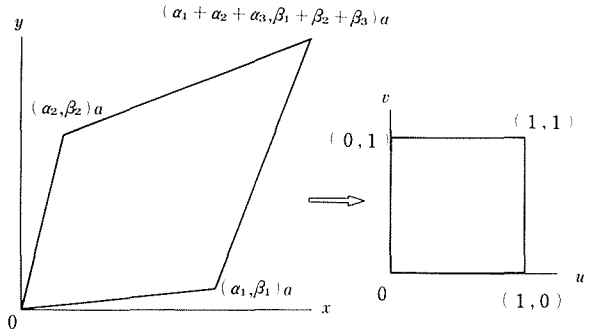

図1　四辺形膜と正方形膜への変換

を表わす。式 (3) にガラーキン法を適用することによって

$$\int_0^1\int_0^1 L(W)\delta W du dv=0 \tag{6}$$

が得られる。ここで $L(W)$ は残差，δW は重み関数を表わす。たわみに関する試験関数として，2重フーリエ正弦級数

$$W=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} A_{ij}\sin i\pi u\sin j\pi v \tag{7}$$

を仮定する。この関数が周辺における境界条件

$$u=0,\ 1\ \text{と}\ v=0,\ 1\ \text{で}\ W(u,v)=0 \tag{8}$$

を満足していることはいうまでもない。式 (7) を式 (6) に代入することによって，若干計算ののち次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(U_{ij}^{(kl)}-\lambda^2 T_{ij}^{(kl)})=0 \tag{9}$$

$$(i,\ k=1,\ 2,\ldots,\ M\ ;\ j,\ l=1,\ 2,\ldots,\ N)$$

ここで

$$\lambda^2=\frac{\rho a^2\omega^2}{T} \tag{10}$$

は無次元振動数パラメータを表わす。$U_{ij}^{(kl)}$ および $T_{ij}^{(kl)}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}U_{ij}^{(kl)}=&i^2\pi^2[c_{22}d_{12}I_0I_0-c_{22}d_{23}I_0I_1-(c_{22}d_{31}-2c_{23}d_{12})I_1I_0-2c_{23}d_{23}I_1I_1\\&+(c_{33}d_{12}-2c_{23}d_{31})I_2I_0-c_{33}d_{23}I_2I_1-c_{33}d_{31}I_3I_0]_{ij}^{(kl)}+2ij\pi^2[c_{12}d_{12}J_0J_0\\&+(c_{23}d_{12}-c_{12}d_{23})J_0J_1+(c_{31}d_{12}-c_{12}d_{31})J_1J_0+(c_{33}d_{12}-c_{23}d_{31}-c_{31}d_{23})J_1J_1\\&-c_{23}d_{23}J_0J_2-c_{31}d_{31}J_2J_0-c_{33}d_{23}J_1J_2-c_{33}d_{31}J_2J_1]_{ij}^{(kl)}+j^2\pi^2[c_{11}d_{12}I_0I_0\\&-(c_{11}d_{23}-2c_{31}d_{12})I_0I_1-c_{11}d_{31}I_1I_0-2c_{31}d_{31}I_1I_1+(c_{33}d_{12}-2c_{31}d_{23})I_0I_2\\&-c_{33}d_{31}I_1I_2-c_{33}d_{23}I_0I_3]_{ij}^{(kl)}+2i\pi d_{23}[c_{12}J_0I_0+c_{23}J_0I_1+c_{31}J_1I_0+c_{33}J_1I_1]_{ij}^{(kl)}\\&+2j\pi d_{31}[c_{12}I_0J_0+c_{23}I_0J_1+c_{31}I_1J_0+c_{33}I_1J_1]_{ij}^{(kl)}\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}T_{ij}^{(kl)}=&[d_{12}^3I_0I_0-3d_{12}^2(d_{23}I_0I_1+d_{31}I_1I_0)+3d_{12}(2d_{23}d_{31}I_1I_1+d_{23}^2I_0I_2+d_{31}^2I_2I_0)\\&-3d_{23}d_{31}(d_{23}I_1I_2+d_{31}I_2I_1)-d_{23}^3I_0I_3-d_{31}^3I_3I_0]_{ij}^{(kl)}\end{aligned} \tag{12}$$

によって与えられる。式 (11)，(12) 中の $[c_{22}d_{12}I_0I_0-\ldots]_{ij}^{(kl)}$ などはすべて

$$[c_{22}d_{12}I_0I_0-\ldots]_{ij}^{(kl)}=c_{22}d_{12}I_{0,i}^{(k)}I_{0,j}^{(l)}-\ldots$$

を略記したものであり，$I_{p,n}^{(m)}$，$J_{p,n}^{(m)}$ はつぎの定積分を表わす。

$$\left.\begin{aligned}I_{p,n}^{(m)}&=\int_0^1 x^p\sin m\pi x\sin n\pi x dx\quad(p=0,\ 1,\ 2,\ 3)\\J_{p,n}^{(m)}&=\int_0^1 x^p\sin m\pi x\cos n\pi x dx\quad(p=0,\ 1,\ 2)\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

式 (9) は未定係数 A_{ij} に関する線形同次方程式で，これらの係数に関するマトリックスから作られる行列式の値を0とする固有値 λ を求めることによって膜の固有振動数が決定され，おのおのの固有値に対する係数の値を計算することによって振動形が定まる。

3. 数値計算例ならびに考察

以上の方法を適用して，図2に示す一つの対角線に関して対称な四辺形膜の固有振動数と振動形を計算する。この場合，膜には対称軸に関して対称な (S 形) 振動と逆対称な (A 形) 振動とが生じるので，試験関数 [式 (7)] を二つに分けて

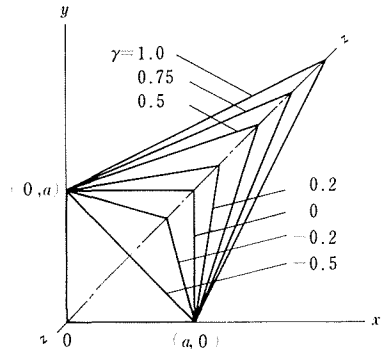

図2　一つの対角線に関して対称な四辺形膜

表1　一つの頂角が60°のひし形膜の固有値

λ	Present $M\times N$ 5×5	Present $M\times N$ 6×6	Present $M\times N$ 7×7	Durvasula[1]
λ_1	4.994	4.992	4.992	4.991
λ_2	7.292	7.261	7.258	7.257
λ_3	8.484	8.477	8.474	8.473
λ_4	9.185	9.169	9.116	9.160
λ_5	11.11	11.10	11.09	11.09
λ_6	11.14	11.11	11.11	11.09
λ_7	11.88	11.87	11.86	11.88

S 形振動：
$$W=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}(\sin i\pi u\sin j\pi v+\sin j\pi u\sin i\pi v) \tag{14}$$

A 形振動：
$$W=\sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=i+1}^{N}A_{ij}(\sin i\pi u\sin j\pi v-\sin j\pi u\sin i\pi v) \tag{15}$$

と書くのが便利である。

なおこの種の計算を実施するに当っては，採用する試験関数の項数 M, N を解の収束状況と精度を見ながら適当な数で打ち切らなければならない。この方法による計算精度を検討するために，一つの頂角が60°，一辺の長さが a のひし形膜の振動の固有値を数値計算した結果を表1に示す（付録参照）。この計算においては，M, N として5ないし7項を採用している。この表に同じひし形膜について Durvasula[1] がリッツ法によって計算した結果をあわせて記載してあるが，本方法により $M\times N=7\times 7$ 項を用いて計算した結果と Durvasula の結果との間の相対誤差は0.2%を超えない。本方法において，試験関数の項数を増すほど固有値の精度は高くなるが，それだけ多くの計算時間を必要とすることと，6×6項採れば実用上十分な数値が得られるので，本論文の計算ではこの程度の項数に止めてある。

以下に，図2に示す形状の膜について数値計算を実施した結果を述べる。ここでは式 (2) の膜の形状を与えるパラメータとして

$$\left.\begin{array}{lll}\alpha_1=1.0, & \alpha_2=0, & \alpha_3=\gamma \\ \beta_1=0, & \beta_2=1.0, & \beta_3=\gamma \qquad (\gamma>-0.5)\end{array}\right\}$$

を選んである。γ は膜の形状変化を表わすパラメータである。この場合，式 (5) の c_{ij}, d_{ij} は単に

$$c_{11}=1,\ c_{12}=0;\ c_{22}=1,\ c_{21}=\gamma;\ c_{31}=\gamma,\ c_{33}=2\gamma^2$$
$$d_{11}=1,\ d_{23}=-\gamma,\ d_{31}=-\gamma$$

で与えられる。とくに $\gamma=0$ の場合は正方形膜，$\gamma=-0.5$ は直角三角形膜に当る。

図3は種々の γ に対して計算した四辺形膜の固有値と振動形を最低次振動から順次高い次数の振動へ大きさの順序に並べたものである。この方法は $\gamma=-0.5$ のとき式 (2) による座標変換を行うことができないので，三角形膜に対しては厳密解によって求めている。四辺形のなかに描かれた直線や曲線はすべてその線上で膜の変位が0となる節線を示す。四辺形の対称軸である一つの対角線上に節線を有する振動はすべて逆対称形振動で，それ以外の振動はすべて対称形振動である。この図から γ の大きさ（絶対値）が増し，膜の形状の変化が大きくなるにしたがって，周知の正方形膜とはかなり異なった形の振動形が現われることがわかる。

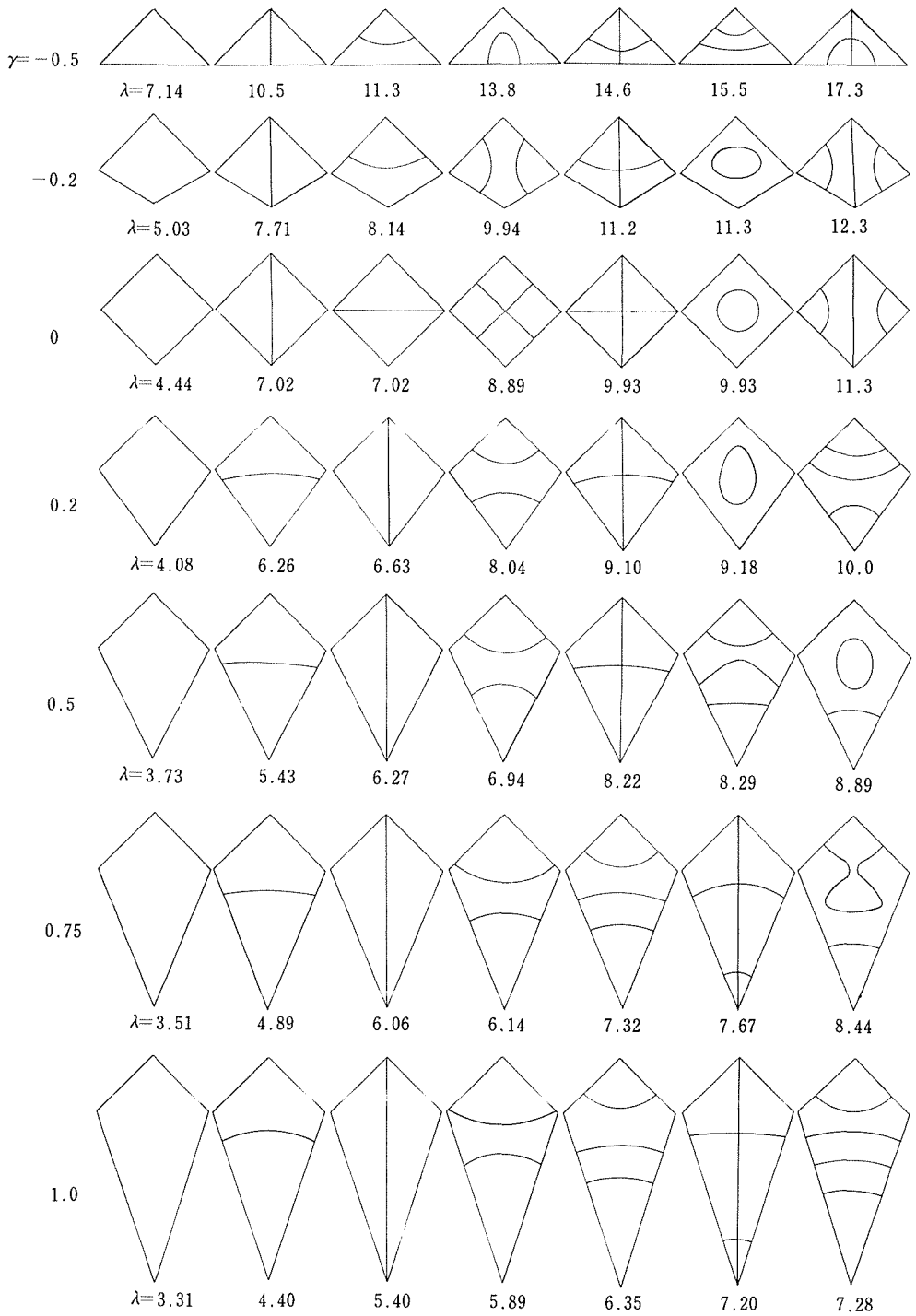

図3 一つの対角線に対称な四辺形膜の振動モード

図4は膜の形状パラメータγに対する固有値の変化を示す。みやすいように、対称形と逆対称形振動の固有値とはそれぞれ実線と破線で区別して表わされている。正方形膜と三角形膜に当る

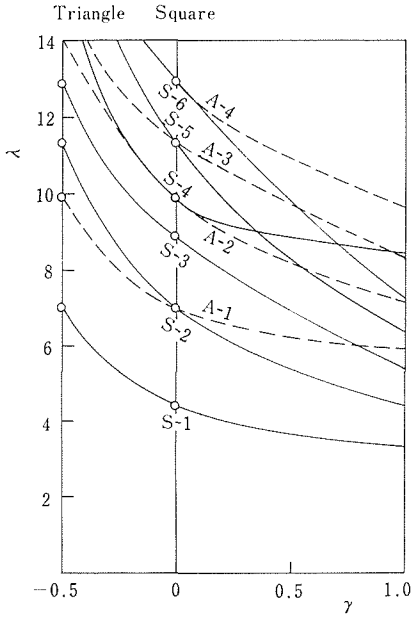

図4　一つの対角線に関して対称な四辺形膜の固有値

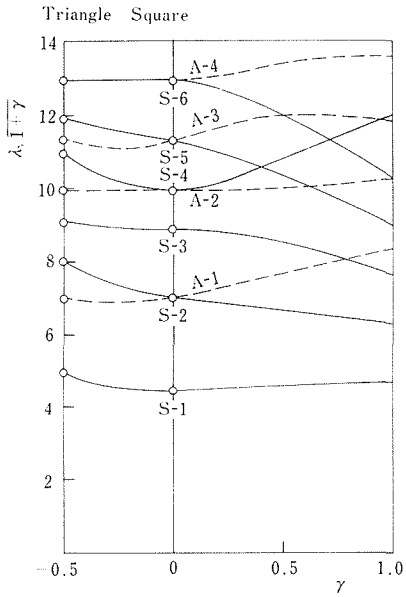

図5　一つの対角線に関して対称な四辺形膜の固有値（等面積膜に換算）

$\gamma=0$ と -0.5 の縦線上に記入した○印は近似解法によらない厳密な固有値を与える。γ が増すにともなって膜面積も増加し，したがって各次数とも固有値は単調に減少する。またこの図から，正方形膜の場合に一致していた対称形と逆対称形振動の固有値が γ の変化によって分岐すること，および γ が増して膜が偏平になると固有値の大きさの間に交差が起こることがわかる。直角三角形膜の振動は対角線上に節線を有する正方形膜の振動と全く同一のものである。

図5は各形状の四辺形膜の固有値を等面積の膜の固有値に換算した結果を示しており，これから膜の形状効果（偏平度と固有振動数の関係）がわかる。パラメータ γ の変化による固有値の変動状況は振動の次数と振動形に依存しているが，そのなかで，対称形振動の固有値は最低次振動と閉じた節線をもつ4次振動を除けば，偏平度が増すにしたがって単調に減少する。

4.　周辺が単純支持された平板と膜の振動との相似性

いま，互いに合同な形状を有する薄板と膜の自由振動を考える。単位体積当りの質量 ρ_p，板厚 h の薄板の自由振動を支配する方程式は，板の振動数パラメータ

$$\lambda_p^4=\frac{\rho_p h a^4\omega^2}{D} \tag{16}$$

$$\left[D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\quad E:\text{ヤング率},\quad \nu:\text{ポアソン比}\right]$$

を用いて

$$\nabla^4 W_p-\left(\frac{\lambda_p}{a}\right)^4 W_p=0 \tag{17}$$

で表わされる。ここで W_p は板の横変位を表わす。周辺が単純支持された板では，すべての辺

でつぎの境界条件が満足されなければならない。

$$W_p=0, \quad \nabla^2 W_p=0 \tag{18}$$

式 (17) は

$$\left\{\nabla^2+\left(\frac{\lambda_p}{a}\right)^2\right\}\left\{\nabla^2-\left\{\frac{\lambda_p}{a}\right\}^2\right\}W_p=0 \tag{19}$$

となるが，このうち $\{\nabla^2-(\lambda_p/a)^2\}W_p=0$ からは二つの虚数の固有値が，$\{\nabla^2+(\lambda_p/a)^2\}W_p=0$ からは正と負の固有値が出てくる。実際に意味をもつのは正の固有値だけなので，後者に注目して

$$\nabla^2 W_p+\left(\frac{\lambda_p}{a}\right)^2 W_p=0 \tag{20}$$

が得られる。この式は式 (1), (10) で与えられた膜の横たわみ W_m を支配する方程式

$$\nabla^2 W_m+\left(\frac{\lambda_m}{a}\right)^2 W_m=0 \tag{21}$$

と同形である。膜の周辺が固定されているときは，すべての辺で

$$W_m=0 \tag{22}$$

となる。板の境界条件は式 (18) で与えられるのに対し，膜の境界条件は式 (22) で与えられる。膜の場合，式 (21) により境界上においても

$$\nabla^2 W_m=0 \tag{23}$$

が満足されるので，結局膜と板の支配方程式と境界条件は同じ式で与えられることとなる。したがって，両者の固有値と固有関数の間につぎの関係が成立する。

$$\lambda_p=\lambda_m, \quad W_p(x, y)=W_m(x, y) \tag{24}$$

5. 結　　論

任意形状を有する（凸形）四辺形膜の自由振動をガラーキン法によって解析した。すなわち

(1) 任意形状を有する四辺形膜を単位長さの辺をもつ正方形膜に変換し，この正方形膜に対する運動方程式を導き，ついでガラーキン法によって振動数方程式を誘導した。

(2) ひし形膜について，採用する試験関数の項数をかえて固有値を数値計算した結果と他の著者による数値とを比較検討したところ，6×6 項程度の試験関数を採れば十分な精度の固有値が得られることが明らかとなった。

(3) この方法を一つの対角線に関して対称な（凸形）四辺形膜に適用して振動の固有値と振動形を数値計算した結果，四辺形膜の偏平度の振動に与える影響が定量的に明らかになった。

(4) 同じ形状を有する単純支持板と膜の振動が同一の方程式と境界条件に支配されることを示し，両者の固有値と固有関数の間に定った相似性があることを説明した。

参 考 文 献

1) Durvasula, S.: J. Acous. Soc. Amer., **44** (1968), 6, p. 1636-1646.
2) Bauer, L. and Reiss, E. L.: J. Acous. Soc. Amer., **54** (1973), 5, p. 1373-1375.
3) Vijayakumar, K. and Durvasula, S.: J. Sound and Vibr., **34** (1974), 4, p. 557-559.
4) Nagaya, K.: J. Sound and Vibr., **50** (1977), 4, p. 545-551.
5) Laura, P. A. A. et al.: J. Sound and Vibr., **60** (1978), 4, p. 499-509.
6) Nagaya, K.: J. Sound and Vibr., **55** (1977), 2, p. 215-223.
7) Nagaya, K.: J. Appl. Mech., **45** (1978), 1, p. 153-158.
8) Conway, H. D.: Can. Aeron. J., **6** (1960), p. 263.
9) Chopra, I. and Durvasula, S.: J. Sound and Vibr., **19** (1971), 4, p. 379-392.

10) Chopra, I. and Durvasula, S.: J. Sound and Vibr., **20** (1972), 2, p. 125-134.
11) Chen, Y.: Vibrations: Theoretical Methods, (1966), p. 266-268, Addison-Wesley Pub. Co.

付録 ひし形膜の方程式と試験関数

この場合は $\alpha_1=\beta_2$, $\alpha_2=\beta_1$, $\alpha_3=\beta_3=0$ で, 式 (5) の c_{ij}, d_{ij} は

$$\left.\begin{array}{lll} c_{11}=\alpha_1^2+\beta_1^2, & c_{12}=2\alpha_1\beta_1, & c_{22}=\alpha_1^2+\beta_1^2 \\ c_{23}=0, & c_{31}=0, & c_{33}=0 \\ d_{12}=\alpha_1^2-\beta_1^2, & d_{23}=0, & d_{31}=0 \end{array}\right\}$$

と書け, 式 (3) 以下の計算も簡単となる。ひし形には二つの対角線に関して対称性があるので, これらの対称軸に関する対称と逆対称振動を組合せた下記に示す四種の試験関数を用いるのが便利である。

SS 形振動:
$$W=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=i,\,i+2,\ldots}^{N} A_{ij}(\sin i\pi u \sin j\pi v+\sin j\pi u \sin i\pi v) \qquad \text{(A-1)}$$

SA 形振動:
$$W=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=i+1,\,i+3,\ldots}^{N} A_{ij}(\sin i\pi u \sin j\pi v+\sin j\pi u \sin i\pi v) \qquad \text{(A-2)}$$

AS 形振動:
$$W=\sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=i+1,\,i+3,\ldots}^{N} A_{ij}(\sin i\pi u \sin j\pi v-\sin j\pi u \sin i\pi v) \qquad \text{(A-3)}$$

AA 形振動:
$$W=\sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=i+2,\,i+4,\ldots}^{N} A_{ij}(\sin i\pi u \sin j\pi v-\sin j\pi u \sin i\pi v) \qquad \text{(A-4)}$$