



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Minkowski空間を情報数理モデルとするある錯視現象
Author(s)	河口, 至商; Kawaguchi, Michiaki; 山ノ井, 高洋 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 97, 83-88
Issue Date	1980-02-25
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41594">https://hdl.handle.net/2115/41594</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	97_83-88.pdf



## Minkowski 空間を情報数理モデル とするある錯視現象

河口至商\* 山ノ井高洋\*  
工藤 司\* 新保 勝\*\*  
(昭和 54 年 9 月 29 日受理)

### Some Visual Illusions Having Minkowski Space as a Mathematical Information Model

Michiaki KAWAGUCHI Takahiro YAMANOI  
Tsukasa KUDO Masaru SHIMBO  
(Received September 29, 1979)

#### Abstract

Some visual illusions are interpreted Minkowski geometrically. This provides a mathematical information model of human visual systems. In order to derive an equation of indicatrix in visual space, a psychophysical experiment was conducted. The approximated indicatrix determines a metric tensor in visual space. By this tensor Minkowski geometrical aspect of visual space is shown.

#### 1. 緒 言

人間の眼を一種の情報処理機構として捉えたとき、その機能を把握するには視覚を一つの幾何学的変換と見なして研究することが必要である。なぜならば、視覚によって我々は実際に物あるいは図形のある空間 (物理空間) を一つの心理物理空間 (視空間) に変換しているからである。

そもそも人間の眼は視覚により外界を正確にあるがままの状態として見ているようでいて、案外実際と異なる認識を持っていることが多い。これらの著しく異なった認識は心理学において錯視と呼ばれ、今までにも数多く見出されている。Luneburg<sup>1)</sup> は alley 錯視実験により曲率を見出し定曲率 Riemann 視空間論を提案し、新保ら<sup>2),3)</sup> は視空間を微視的構造模型と見なし振率をも考慮した非 Riemann 視空間論を構成した。

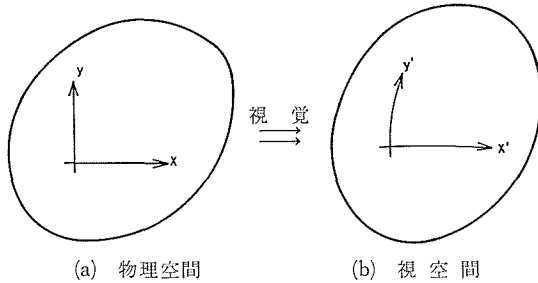
このように視覚を幾何学的に統一的にとらえようとする際には上述の曲率や振率等の幾何学的不変量が意味を持つ。その不変量の一つである計量的性質に関して錯視現象を検討しているうちに非常に顕著な錯視現象に気がついた<sup>4),5),6)</sup>。

それは等間隔平行線模様の場合、物理空間の円が視空間では歪んで見えるという現象である (第 2 図)。したがって、この錯視現象の逆に視空間の円を物理空間にひき戻してみれば円とはならない。この現象は、上述の場合による視空間においては計量が方向のみによって変化

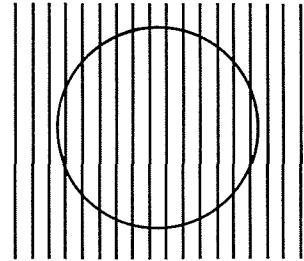
\* 情報工学専攻 情報数理工学第一講座

\*\* 情報工学専攻 情報処理工学講座

する性質，すなわち Minkowski 空間の一面を持つことを示している。そこで我々は Minkowski 幾何学の立場からこの錯視現象を解析してみた。以下での視空間は等間隔平行線模様のある視空間に限る。



第1図 物理空間と視空間の対応



第2図 等間隔平行線場による円の錯視

## 2. 平行線模様の場合における錯視実験

白地の上に幅 0.7 mm の黒い直線を 3 cm ごとの等間隔で垂直方向に平行に引いた図を垂直な面に掲げる。この図の中心付近に 1 点を定めこれを中心点 P とする。P に向かって右の水平方向を  $0^\circ$  とし、P から  $0^\circ$  の方向に長さ 20 cm 幅 0.7 mm の黒い線分を引きこれを参照線とする。また透明なプラスチックシート上に長さ 30 cm 幅 0.7 mm の黒い線分を引いておき、これが参照線と P で交わるように図に重ねる。この線分は参照線と P を交点とした V 字形をなすように P の反対側を隠し長さを自由に変えられるようにする。この線分を実験線と呼ぶ。上図の正面に約 3 m 離して目の高さが P の高さと同しくなるように被験者を座らせる。まず実験線を参照線から正の方向  $30^\circ$  の向きに置き、長さを変化させて、被験者が参照線と等長だと認識した実験線の長さを測定する。以下同様にして実験線を  $30^\circ$  ごとに反時計まわりに回転させ、各々の方向についてこの実験を繰り返し実験線の長さを測定する。なお実験は客観性を保つ為に、被験者には実験の意図、結果及びその予測は知らせずに行なった。この実験において測定して得た結果を第 1 表に示す。

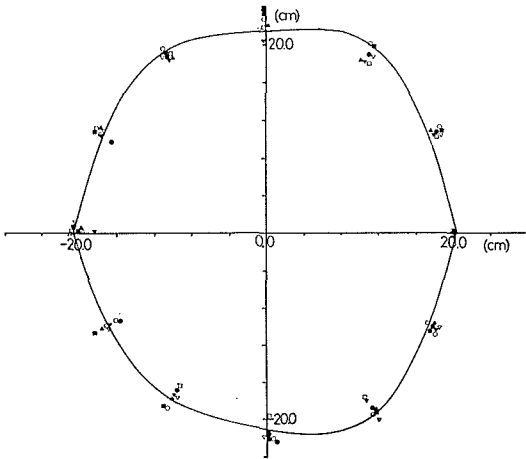
第1表 錯視実験の実測値

方向 被験者	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$	$210^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$330^\circ$
A	20.00	21.00	21.90	24.00	22.00	19.30	20.80	18.50	19.50	22.30	21.80	20.30
B	20.00	21.50	22.90	23.45	21.50	21.40	20.50	21.40	21.40	22.00	22.40	20.30
C	20.00	21.10	22.05	22.05	21.40	20.55	20.80	20.10	20.20	21.80	23.30	21.00
D	20.00	21.40	22.80	22.85	22.60	20.90	19.70	20.05	21.70	22.05	22.35	20.90
E	20.00	20.50	20.90	22.20	21.20	21.10	20.30	20.50	20.50	21.50	22.10	20.20
F	20.00	20.75	20.95	20.35	21.45	21.40	21.10	18.80	18.95	19.60	20.40	19.55
G	20.00	20.70	21.00	21.80	21.80	21.00	18.80	19.60	20.15	21.50	20.65	20.50

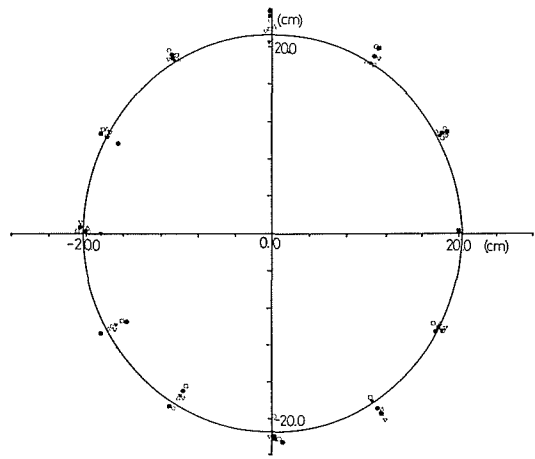
(単位 cm)

第 1 表のデータから分るように、等距離と認識された線分の長さは、物理空間内にて測定すると実験線が平行直線模様に平行な時に最も長く、平行直線模様に垂直な時に最も短かつその長さはほぼ参照線と等しい。

さらに、これは視空間内の一点からの等距離点を物理空間内の各方向についてひき戻したものである。このデータに最小 2 乗法を用いて 4 次関数近似を行なったものが第 3 図である。図中の記号は各被験者のデータ点に対応する。また、この近似関数はほぼ楕円に等しい。したがって対称性をも考慮に入れ、この関数を楕円とみなすことにする。第 4 図は第 1 表のデータに Deming 法<sup>7)</sup>を用いて得られた楕円を図示したものである。



第 3 図 実験データの関数近似



第 4 図 indicatrix の楕円近似

### 3. Minkowski 空間と視空間

Minkowski 空間<sup>8),9),10)</sup> は affine 空間において 2 点  $P, Q$  の距離が  $L(Q-P)$  で定義される空間で、その基本関数  $L(X) \equiv L(X^1, X^2, \dots, X^n)$  は次の条件を満たす。

- (I)  $X \neq 0$  に対して、 $L(X) > 0$ 。
- (II)  $L(X) = L(-X)$ 。
- (III)  $\rho > 0$  に対して、 $L(\rho X) = \rho L(X)$ 。
- (IV) 1 次独立なベクトル  $X$  と  $Y$  に対して、 $L(X) + L(Y) > L(X+Y)$ 。
- (V)  $L(X)$  は連続かつ十分な回数微分可能。
- (VI)  $g_{ij}(X)$  の作る行列は rank  $n$ 。ただし

$$g_{ij}(X) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial X^i \partial X^j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

原点から距離 1 の点の軌跡を等距離円 (indicatrix) という。以下では、2 次元 ( $n=2$ ) Minkowski 空間について考える。

さて、平行線模様の場の錯視実験より推定された閉曲線は、視空間内では中心から等距離であると認識されているのであるから、視空間の indicatrix を表わしている。また、これは上述の条件を満足している。したがって、この錯視現象の起こっている視空間は Minkowski 空間とみなすことができる。第 3 図の楕円の方方程式より、この視空間の indicatrix は物理空間内の座標を  $x^1, x^2$  として

$$L(x^1, x^2) = \sqrt{k^2(x^1)^2 + (x^2)^2} \quad (3.2)$$

と表わせる。ただし  $k$  は定数である。これより計量テンソルは (3.1) を用いて

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} k^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

となる。なお実験により推定された  $k$  の値は  $k^2=1.1073$  である。

#### 4. 物理空間と視空間

物理空間内の微小線素を  $dx^i$  視空間内の微小線素を  $du^\alpha$  とし、視覚による変換、逆変換

$$du^\alpha = A_\beta^\alpha dx^\beta, \quad dx^i = B_\alpha^i du^\alpha \quad (4.1)$$

を仮定する。ただし、 $B_\alpha^i$  は  $A_\beta^\alpha$  の逆変換係数を表わす。したがって、線素の長さ  $ds$  は、視空間内に Euclid 座標系をとれば

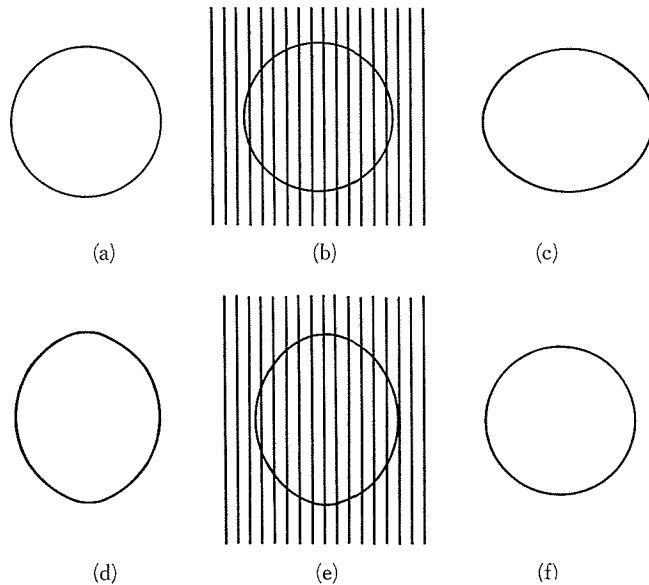
$$\begin{aligned} ds^2 &= \delta_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \\ &= g_{ij} dx^i dx^j \end{aligned}$$

となり、 $g_{ij}$  は

$$g_{ij} = \delta_{\alpha\beta} A_\beta^i A_\alpha^j \quad (4.2)$$

となる<sup>2)</sup>。

等間隔平行線模様の場合における円が視空間内ではつぶれて見え、また錯視実験より視空間内の円は物理空間内の楕円になることが確かめられた。このことから、視空間と物理空間のそれぞれの indicatrix について、その対応を整理すると第5図のごとくなる。(a) の物理空間の indicatrix は (b) として等間隔平行線が施されると視空間では (c) のように楕円として認識される。逆に等間隔平行線模様の場の視空間の indicatrix (f) は物理空間内では (d) のように (3.2) で表される楕円となる。これは、すなわち視覚の変換の際には物理空間内のベクトルが平行線模様の方向に縮められるか、あるいは平行線と垂直な方向に引き伸ばされると見なせる。前者と仮定すれば、この座標変換は



第5図 物理空間と視空間

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

となる。これに(4.2)を用いると

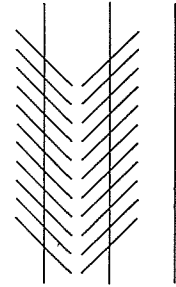
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} k^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり(3.3)と等しい。

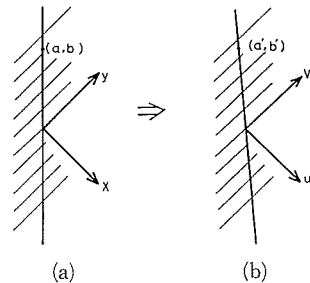
第6図は有名な Zöllner の錯視である<sup>1)</sup>。物理空間内の平行な二直線がそれぞれ異なる方向を持つ等間隔平行線模様を施されたために視空間内においては平行には見えない。この物理空間の一方に第7図のように Euclid 座標を導入する。物理空間から視空間への変換は線形変換であるから直線は直線に移される。点  $(a, b)$  を通る直線は視空間内において点  $(a', b')$  を通る直線に変換されるとする。この間には(4.3)により

$$a' = a, \quad b' = kb$$

なる変換が成立する。したがって視空間内では横座標(平行線模様に対して垂直)が  $k$  倍に伸び第7図(b)のように認識され Zöllner の錯視が起こる。



第6図 Zöllner の錯視



第7図 Zöllner の錯視における視覚の変換

## 5. 結 言

我々は、等間隔平行線模様の場合における錯視実験より得られた閉曲線を Minkowski 空間の indicatrix と見なし、視空間の計量を導出した。また、この錯視の場合の視覚の変換を indicatrix の方程式より仮定し、Zöllner の錯視を説明した。このことから、視覚の Minkowski 幾何学的一面が明らかになった。しかしながら、実験を試みた視空間は我々が認識可能な視空間の局所的な部分にしか過ぎず、また空間の平行性が刺激模様によって規程されている場合である。大域的な、また刺激模様の一般的な場合の視空間についての議論が今後の課題である。

最後に、本研究を進めるにあたり有意義な討論をいただいた佐藤助手、並びに情報数理工学第一講座、情報処理工学講座の諸氏に感謝する。

なお、本研究の計算は本学情報工学専攻計算機センター ECLIPSE を用いた。

## 参 考 文 献

- 1) Luneburg, R. K.: *Mathematical Analysis of Binocular Vision*, (1947), Princeton Univ. Press.
- 2) 新保 勝, 山ノ井高洋: 北大工学部研究報告, 87 (1978), p. 169.
- 3) Shimbo, M., Yamanoi, T. and Kawaguchi, M.: *Proc. International Conference on Cybernetics and Society '78*, I (1978), p. 394.
- 4) 河口至商, 山ノ井高洋, 工藤 司, 新保 勝: 昭和 54 年度電子通信学会情報・システム部門全国大会論文集 (1979), p. 173.
- 5) 河口至商, 山ノ井高洋, 工藤 司, 水田正弘, 松井 茂: 多変量解析研究会研究報告, 9 (1979).
- 6) 河口至商, 山ノ井高洋, 佐藤義治, 工藤 司, 水田正弘, 松井 茂: 多変量解析研究会研究報告, 12 (1979).

- 7) 本間 仁, 春日屋伸昌: 次元解析・最小2乗法と実験式 (1976), p. 255, コロナ社.
- 8) Kawaguchi, A.: Tensor, N.S., 6 (1956), p. 165.
- 9) Kawaguchi, A. and Laugwitz, D.: Tensor, N.S., 7 (1957), p. 190.
- 10) Nagai, T.: J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, 15 (1960), p. 29.
- 11) 八木 晃, 大山 正: 講座心理学 4. 知覚 (1970), 東大出版会.