



Title	2次元実同次二次変換の発散収束境界の形状の全類型およびその解析
Author(s)	伊達, 惇; Date, Tsutomu
Citation	北海道大學工學部研究報告, 98, 97-107
Issue Date	1980-05-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41606
Type	departmental bulletin paper
File Information	98_97-108.pdf



2次元実同次二次変換の発散収束境界の 形状の全類型およびその解析

伊 達 惇*
(昭和54年12月27日受理)

Analyses and Portraits of All Types of Divergence-Convergence Boundaries of Two-Dimensional Real Homogeneous Quadratic Transformations

Tsutomu DATE
(Received December 27, 1979)

Abstract

The aim of this paper is to analyze and illustrate in analyzing and illustrating the possible portraits of all types of divergence-convergence boundaries of two-dimensional real homogeneous quadratic transformations. The divergence-convergence boundaries can be regarded as the unit of the scale by which to measure the distance of a point from the origin in the process represented by a real homogeneous quadratic transformation.

Although the illustrations are limited to a two-dimensional case, exhaustive calculations and illustrations of their typical portraits may provide fundamental material for further analyses of such processes, which are encountered in a number of practical problems including asymptotic behaviors of the errors of the Newton-Raphson processes in numerical analysis, two-body interaction processes in biological interactions, etc.

The classification of the transformations used in this paper is based on the invariants introduced in the former papers^{3,4,5}.

1. 序 論

一次変換とその構造は、今日よく知られており、線形代数学に代表される美しい理論体系は完成されていると言っても過言ではない。この体系が、工学現象の解析に果す役割がきわめて大きいことも周知の通りである。

しかるに、近年一次変換によっては本質的に取り扱うことができない工学現象、たとえば数値計算の手法解析、集団遺伝学の数学的構造、あるいは化学反応論など、一次の近似項が厳密に消滅している問題では、当然に二次の項が支配項となり、二次変換の理論が必要となるのである。二次変換が取りあげられずに来たのは複雑さに原因があり、一次変換と本質的に異なる重要な点として、次の二点があげられよう。第一は、一次変換を定める量は一般に n^2 個であるが、変換の本質的な構造を与えるパラメータ(固有値)は n 個であるのに対し、二次変換を定める量が n^3 個あって、変換の本質的な構造を定めるパラメータもまた n^3 に比例する数だけある、という

* 情報科学教室

ことである。第二は、空間のある点に一次変換をくり返し施したときどうなるかという問題は、一般に、もっぱら一次変換それ自体で定まり、空間の点の位置によらないのであるが、一方の二次変換をくり返し施したときの点の挙動は、点の位置に強く依存する、ということである。

この問題を抽象化したものとしては、19世紀の数学の関心の対象であった有理変換が考えられるが、その複雑さゆえに、発散収束境界の存在は言えても、形状解析にはおよそ手が届かなかったと言える^{1),2)}。今日再び関心が持たれるに至ったのは、動機および手段のいずれにおいても、計算機の果す役割が大きく、逆に言えば、二次変換の構造は、計算機によって見通しが著しくよくなった問題である、と言える。

2. 二次変換および発散収束境界の定義とその意義

実同次二次変換は、点 $\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in R^n$ に対してそれぞれの座標成分を x^κ, x'^κ で表わせば (ただし、 $\kappa=1, \dots, n$ とする)、

$$x'^\kappa = \sum_{\lambda, \mu=1}^n P_{\lambda\mu}^\kappa x^\lambda x^\mu \quad (\kappa=1, \dots, n) \quad (1)$$

で与えられる。ここに、 $P_{\lambda\mu}^\kappa$ は n^3 個の実数であって、 $P_{\lambda\mu}^\kappa = P_{\mu\lambda}^\kappa$ をみたすものとする。

$\mathbf{X}' \in R^n$ は変換 (1) による $\mathbf{X} \in R^n$ の像であるから、(1) は、 R^n からそれ自身への写像と考えることができる。この写像を f で表わし、 $\mathbf{X}_{(m)} = f^m(\mathbf{X})$ とおくことにする。

この変換過程は、たとえば、方程式系の数値解法として古くから有名であって、かつ現在でも実用的に十分な速度を有している Newton-Raphson 法の誤差収束過程に見られる。すなわち、任意の方程式系 $g^\kappa(\mathbf{X})=0$ ($\kappa=1, \dots, n; \mathbf{X} \in R^n$) に対する Newton-Raphson 法の反復公式が

$$x_{(m+1)}^\kappa = x_{(m)}^\kappa - \sum_{\mu=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_{(m)}^\mu} g^\mu(\mathbf{X}_{(m)}) \right]^{-1} g^\mu(\mathbf{X}_{(m)}) \quad (2)$$

で表わされること、また、真の解を \mathbf{X}^* として、 $\varepsilon_{(m)} = \mathbf{X}_{(m)} - \mathbf{X}^*$ とおけば、誤差が

$$\varepsilon_{(m+1)}^\kappa = - \sum_{\lambda, \mu=1}^n P_{\lambda\mu}^\kappa \varepsilon_{(m)}^\lambda \varepsilon_{(m)}^\mu + O(|\varepsilon_{(m)}|^3) \quad (3)$$

で表わされること、などは良く知られていることである。ただし、(3)における $P_{\lambda\mu}^\kappa$ は

$$P_{\lambda\mu}^\kappa = - \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x^\rho} g^\rho(\mathbf{X}^*) \right]^{-1} \frac{\partial^2 g^\rho(\mathbf{X}^*)}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \quad (4)$$

である。

(3) で明らかであるように、Newton-Raphson 法の誤差収束過程は、一般に、漸近的に同次二次変換過程であるから、その漸近的挙動は、二次変換の理論によって明らかにすることができる。

2.1 発散収束境界の定義と意義

Newton 法の初期値の方向をどのように選べば収束が速いのか、という問題に定量的に答えるためには、方向による計量を導入しなくてはならない。

n 次元直交座標系において、単位球面上の点を θ で表わすとき、ある関数 $r(\theta)$ (>0) が存在して、任意の2点 $\mathbf{X}_1 = \|\mathbf{X}_1\| \theta_1$, $\mathbf{X}_2 = \|\mathbf{X}_2\| \theta_2$ に対して、

$$\frac{\|\mathbf{X}_1\|}{r(\theta_1)} < \frac{\|\mathbf{X}_2\|}{r(\theta_2)} \quad \text{であるならば} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{X}_{1(m)}\|}{\|\mathbf{X}_{2(m)}\|} = 0 \quad (5)$$

となるならば、関数 $r(\theta)$ は収束の速さに関する計量の役割を果すこととなる。この場合、 $r(\theta)$ が大きい方向ほど収束が速いことになる。このような関数 $r(\theta)$ は次のように導入される。

$C = \{X \mid \lim_{m \rightarrow \infty} \|X_{(m)}\| = 0\}$ で定義される領域 $C(\subset R^n)$ を変換 (1) の収束領域と呼び、

$$r(\theta) = \sup\{\alpha \mid \alpha\theta \in C\} \quad (6)$$

で定義される写像 $r: \{\theta\} \rightarrow R \cup \{\infty\}$ を考えて、 $B = \{r(\theta)\theta \mid r(\theta) < \infty\}$ を発散収束境界と呼ぶことにする。この $r(\theta)$ が (5) で示される「計量」の条件を満たすことは、容易に検証されるので省略する。当然のことながら、 $D = R^n - B - C$ は発散領域である。

以上の定義のみでは、各領域の形状や性質について、いかなる見通しも得られないので、次に性質について簡単に検討する。詳しくは^{3),4),5)}参照。

2.2 発散収束境界の性質

変換 (1) が同次であることによって、

$$f(\alpha X) = \alpha^2 f(X) \quad (\alpha \text{ は実数}) \quad (7)$$

である。これと、前節の定義によって、次の性質が導出できる。

- (i) $X \in C$ ならば、 $\alpha X \in C$ ($0 \leq \alpha \leq 1$),
- (ii) $X \in C$ ならば、 $f(X) \in C$ かつ $f^{-1}(X) \subset C$,
- (iii) $X \in B$ ならば、 $f(X) \in B$ かつ $f^{-1}(X) \subset B$,
- (iv) $X \in D$ ならば、 $f(X) \in D$ かつ $f^{-1}(X) \subset D$,
- (v) $\alpha > r(\theta)$ ($< r(\theta)$) であるならば、 $\alpha\theta \in D$ ($\in C$) であり、逆もなり立つ、
- (vi) $B \cap C = 0$, かつ $B \cup C \cup D = R^n$.

これらの性質を用いて、 C が開集合であること、また $r(\theta)$ が下半連続であることが示せる。

(5) 参照。

次に (1) で定義される写像に対して、 $f(X) = AX$ (A は実数) をみたく X の方向を不動方向と呼び、 $A=0$ の場合を無限不動方向、 $A \neq 0$ の場合を有限不動方向と呼ぶ。この名称の由来は、 $A=0$ のときの X の方向は (6) で定義される $r(\theta) = \infty$ 、すなわち発散収束境界 B が無限遠にのびている方向であること、一方、 $A \neq 0$ の場合はこれが有限であること、による。

この不動方向に関しては、次の性質が知られている^{3),4),5)}。

- (vii) すべての実同次二次変換は、少なくとも一つの不動方向をもつ、
- (viii) 無限不動方向をもたない実同次二次変換の $r(\theta)$ は有界であって、かつ、 θ に関して連続である。

最後の性質 (viii) の意義について言及すると、発散収束境界は、後述するように2次元の場合という簡単な場合においてさえ、 $r(\theta)$ が微係数をもたない点が稠密に存在する部分をもつ、というような病的な形状を呈する場合があります、そのような場合に、一般の次元において $r(\theta)$ の有界連続性が保証されているということは、その先の見通しに有力な手掛りを与えていることが理解されるのである。

以上、本節において論じたことを整理すると、実同次二次変換の発散収束境界の類型をあらかじめ列挙しておくならば、Newton-Raphson 法の収束に有利な初期値の方向を容易に選定可能とする、という問題をはじめ、二次変換過程を有する諸問題の解明に役立つことは明らかである。以下、次節以降にて、2次元の場合について、可能な発散収束境界の類型を列挙し、それぞれの特徴を論ずることとする。

3. 2次元二次変換の不変式の導入

本節では、発散収束境界の形状解析に入る準備として、性質を分類する基礎となる不変式を導

入する。不変式の導入方法および意味は、前に紹介したので^{3),5)}、ここでは結果のみを示す。

はじめに、(1) で定義される $P_{\lambda\mu}^{\kappa}$ は、アフィン変換に対してテンソルをなすから、これを次のようにベクトル部分 p_{λ} とテンソル部分 $Q_{\lambda\mu}^{\kappa}$ に分解しておく。これは、前述の不動方向に関する性質がもたらすテンソル部分 $Q_{\lambda\mu}^{\kappa}$ に依存し、ベクトル部分 p_{λ} によらないため、不動方向の数によって $P_{\lambda\mu}^{\kappa}$ を分類するのに便利だからである。

$$\left. \begin{aligned} p_{\lambda} &= \sum_{\kappa=1}^n P_{\lambda\kappa}^{\kappa} \quad (\lambda=1, \dots, n), \\ Q_{\lambda\mu}^{\kappa} &= P_{\lambda\mu}^{\kappa} - \frac{1}{n+1} (\delta_{\lambda}^{\kappa} p_{\mu} + \delta_{\mu}^{\kappa} p_{\lambda}) \quad (\kappa, \lambda, \mu=1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここに $\delta_{\lambda}^{\kappa}$ は Kronecker のデルタである。

次に、(8) の分解の結果を用いて、次の不変式を導入する。ただし、 $\epsilon^{\kappa\lambda}(\epsilon_{\kappa\lambda})$ は重みが $1(-1)$ の単位 2-ベクトル A 密度である。

$$\left. \begin{aligned} h^{\kappa\lambda} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu, \rho, \sigma, \nu=1}^2 \epsilon^{\mu\rho} \epsilon^{\nu\sigma} Q_{\mu\nu}^{\kappa} Q_{\rho\sigma}^{\lambda}, \\ C_{\kappa\lambda} &= \sum_{\mu=1}^2 \left(Q_{\kappa\lambda}^{\mu} p_{\mu} - \frac{3}{2} \sum_{\nu=1}^2 \epsilon_{\kappa\mu} \epsilon_{\lambda\nu} h^{\mu\nu} \right), \\ D &= -2 \sum_{\kappa, \lambda, \mu, \nu=1}^2 \epsilon_{\kappa\lambda} \epsilon_{\mu\nu} h^{\kappa\mu} h^{\lambda\nu}, \\ H &= \sum_{\kappa, \lambda=1}^2 h^{\kappa\lambda} p_{\kappa} p_{\lambda}, \\ F &= \sum_{\kappa, \lambda, \mu, \nu, \rho=1}^2 \epsilon^{\lambda\mu} \epsilon^{\nu\rho} Q_{\lambda\nu}^{\kappa} p_{\kappa} p_{\mu} p_{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

以上は、古典的な不変式論の成果を利用して導入した不変式であり、いずれも重みは 2 であるから、座標変換によって符号が変わることはない。

次に、二次変換あるいは二次微分方程式系の物理的性質を論ずるにあたり、きわめて有用な不変式を導入しておく。

$$K_m = F + 9(-2)^{m-3} H - 27(-8)^{m-3} D. \quad (10)$$

K_m は、当然のことながら重み 2 であり、符号は座標変換によって不変である。 K_m の $m=1, 2, 3, 4$ については、物理的意味が明白に把握されており^{3),4),5)}、それ以上の m については、未だ意味の検討が行われていない。(10) の定義式それ自体からは複雑な構造が想定されるが、後述する標準形のパラメータ空間で表わせば、実に簡単な直線図形で表わされる。

4. 2次元二次変換の発散収束境界

2次元の場合は、発散収束境界を見やすい平面図形で示すことが、少なくとも近似的には可能であり、その可能なすべての類型を、計算機による計算と XY プロッターによる作図で示すことができる。本節では、その結果を整理して紹介する。

二次変換に無限不動方向がある場合、すなわち発散収束境界が無限にのびる方向を有する場合は、(10) で導入した不変式 K_m の $m=2$ すなわち $K_2=0$ の場合に限ることは、前に紹介した^{3),5)}。それ以外の形状の性質については、本節後半で標準形の型毎に論ずることとする。本節前半では、発散収束境界の作図とその評価について述べる。

4.1 発散収束境界図の作成方法と評価

(6) において定義される $r(\theta)$ の近似値を得るために、まず方向 θ を与え (円周を一万等分す

る), ① その方向上の $r=1.0$ から始めて (1) をくり返し行い, 15 回くり返しても所定の上下限界 (10^{-30} , 10^{30}) の間におさまっていれば, ③ を行い, そうでなければ, ② r を $r/r_{(m)}^{-m}$ で置きかえて再び (1) をくり返し行う。ただし, m は上下限界をこえたときの反復回数であり, $r_{(m)}$ はそのときの r の値である。③ $\hat{r}=r/r_{(15)}^{-15}$ として, \hat{r} を θ 方向の \hat{r} の近似値とする。ただし, \hat{r} は (6) で定義される θ 方向の真の $r(\theta)$ の値とする。

このように計算された \hat{r} の精度は, 前述の文献⁵⁾で述べたように次の方法で評価する。

$$\hat{r} - \hat{r}^* = \hat{r}^* (\hat{r}_{(15)}^{-15} - 1) \quad (11)$$

であり, 有界の場合, すべての図を通して各 θ に対する \hat{r} の最大・最小値が $0.1 < \hat{r} < 16.0$ であったこと, また作図は, 一つの図について r の最大値が 3.6 cm になるように規格化を行ったこと, これらを考慮すると, 計算値 \hat{r} と真の値 \hat{r}^* との間の差は

$$-0.0014 \text{ cm} < \hat{r} - \hat{r}^* < 0.0012 \text{ cm}$$

の範囲におさまることが示される。この値は, XY プロッターの動作限界値の 0.01 cm よりも一桁小さい値となっている。すなわち, 動径方向の精度としては, 肉眼の識別限界の範囲内では忠実に真の発散収束境界を実現している。

また, 円周方向の精度としては, 円周を一万分等分して, それぞれの方向 θ に対して \hat{r} を計算するという方法を採用した。比較的なめらかな曲線については, 肉眼の識別限界よりも十分小さい誤差ですんでいる。

4.2 発散収束境界の類型と解析

(a) I \ominus 型の場合: (9) で定義した不変式 $D < 0$ の場合である。この場合であってその時に限り, 第2節で述べた不動方向が3方向存在する。このときの標準形は, 次の (12) で与えられる。

$$x' = -2xy + \frac{2}{3}x(\hat{p}_1x + \hat{p}_2y), \quad y' = -x^2 + y^2 + \frac{2}{3}y(\hat{p}_1x + \hat{p}_2y). \quad (12)$$

この標準形は, パラメータの (\hat{p}_1, \hat{p}_2) 平面において, 原点のまわりの $\pm \frac{2}{3}\pi$ 回転に対して不変であり, また変換の同次性から \hat{p}_1 の符号反転に対しても不変である。したがって, 発散収束境界の類型の代表点を示す Fig. 1 において, $\hat{p}_1 > 0$ かつ $\hat{p}_2 > \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{p}_1$ の部分領域のみを考慮して

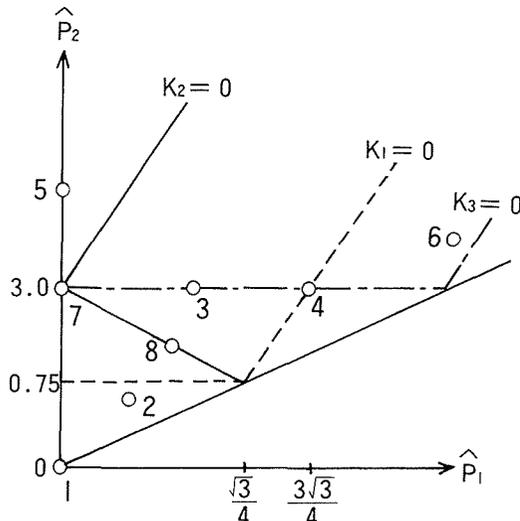


Fig. 1 I \ominus 型二次変換の発散収束境界の類型の代表点を (\hat{p}_1, \hat{p}_2) 平面に示す図

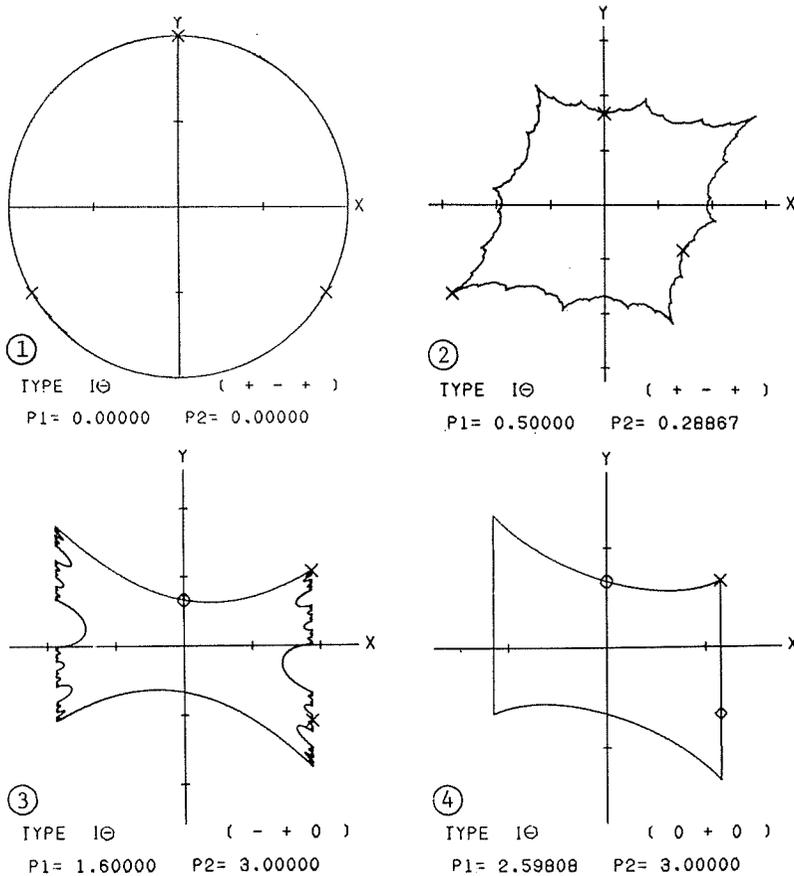
いるが、これで I ⊖ 型すべての性質を充足している。

次に、Fig. 1 に示されている、 $K_1=0, K_2=0, K_3=0$ の直線群であるが、(12) で与えられた標準形について (10) を計算すると、 $K_1=[3\hat{p}_1^2-(\hat{p}_2+3/2)^2](\hat{p}_2-3/4)$ 、 $K_2=[3\hat{p}_1^2-(\hat{p}_2-3)^2](\hat{p}_2+3/2)$ 、 $K_3=[3\hat{p}_1^2-(\hat{p}_2+6)^2](\hat{p}_2-3)$ で与えられる。したがって、それらが 0 となる (\hat{p}_1, \hat{p}_2) 平面の点の軌跡は、それぞれ 3 直線から成り、いずれも規則的に並ぶことが容易に検証される。

Fig. 1 において、大きな数字を付した○印は、その点に相当する (\hat{p}_1, \hat{p}_2) をもつ二次変換の発散収束境界の図が、Fig. 2 において、対応する番号の順に置かれていることを示す。

Fig. 2 の 8 枚の図は、I ⊖ 型における発散収束境界の形状の典型的なものを示す。各図下部の p_1, p_2 の数字は標準形 (12) のパラメータ \hat{p}_1, \hat{p}_2 の値であり、(+, -, +) のように右下で () に囲まれた三つの符号は、左から順に、 K_1, K_2, K_3 の符号を示す。各図の曲線は、発散収束境界を表わし、したがってその内側は収束領域、外側は発散領域である。各座標軸上の目盛は、特に指定されていない限り、一目盛 0.5 を意味する。

発散収束境界上に記された、○, ×, ◇, △, ⊗, □, * という記号は、不動方向の安定性に関する性質を表わし、それぞれ順に、安定、不安定、準安定、準不安定、2 巡回、孤立、一方向不安定を意味する。この安定性の定義は文献³⁾で与えてあるが、簡単に言えば、不動方向の近傍の点が次第に不動方向に近付くか、遠去かるかという性質である。各記号が置かれた位置は不動点である。無限不動方向がある ⑦ および ⑧ は、不動点が無限遠にあるので作図の便宜上、有限



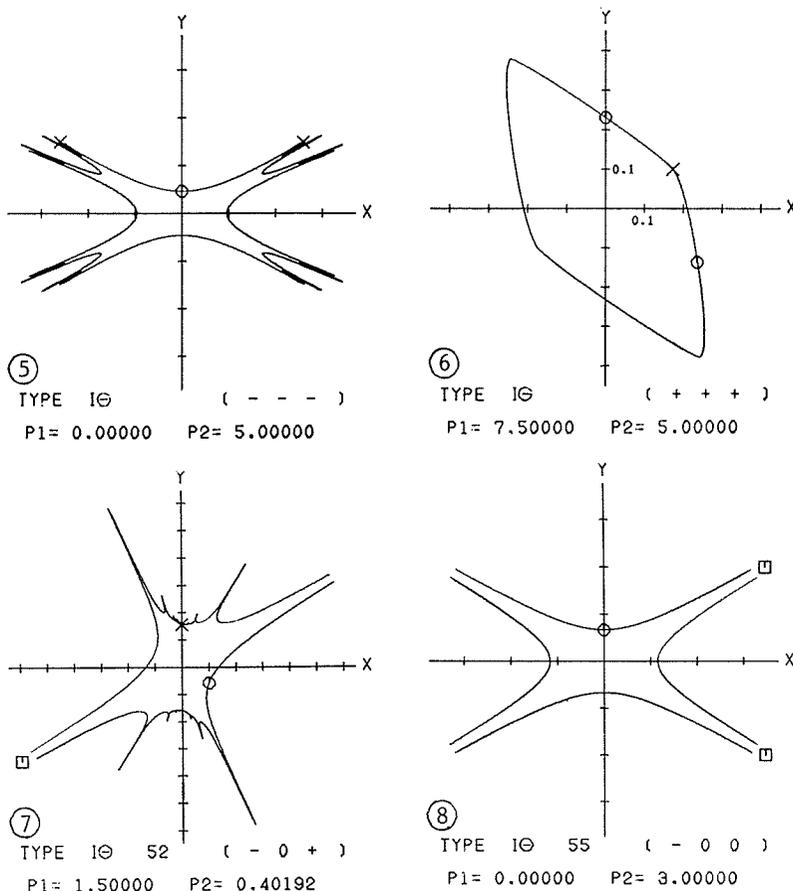


Fig. 2 I ⊖ 型二次変換の発散収束境界の8種類の図

の場所に記載した。

$K_2=0$ の場合 (Fig. 1 の斜めの実線) に対応する二次変換の発散収束境界は、すべて無限遠にのびるスパイクを有し、逆に、発散収束境界が無限遠にのびるのは、この Fig. 1 の $K_2=0$ を表わす直線上の点に対応する二次変換に限る。したがって、この $K_2=0$ を示す直線の両側で、発散収束境界の形状が大きく変化することが予想されるが、実際そうになっている。たとえば、Fig. 2 の ⑤ は一部のスパイク部分を除いて大部分はなめらかな曲線であるが、② は微係数を持たない点が稠密に存在する部分をもつ曲線である。このような図形は、本来的に表現できないのであるが、XY プロッターの動作精度である 0.01 cm の範囲内の誤差を許すことによって作図が可能となっている。

⑤ のスパイク状の部分は病的な性質を有している。黒く見えるスパイクの一つのすき間には、実は可付番個のなめらかな曲線の弧がわずかなすき間をおいて並んでおり、またそれぞれのすき間には、可付番個のなめらかな曲線の弧がわずかなすき間をおいて並ぶ、……というしくみになっている。したがって、極言すれば、この曲線はメジャー-1 でなめらかであり、かつ微係数を持たない点が可付番の可付番乗、すなわち連続の濃度をもって存在する、という病的性質を有する。

Fig. 2 の ① は円である。この発散収束境界は例外的に解析的表現が可能であり、標準形 (12) から $(x')^2 + (y')^2 = (-2xy)^2 + (-x^2 + y^2)^2 = (x^2 + y^2)^2 = 1$ が発散収束境界であることが示せる。

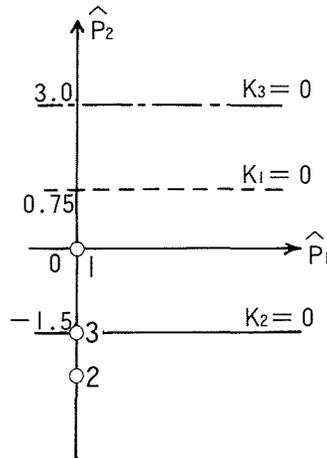


Fig. 3 I ⊕ 型二変換の発散収束境界の類型の代表点を (\hat{p}_1, \hat{p}_2) 平面に示す図

Fig. 2 の ④ は直線部分を有するように見えるが、その部分は、実際に直線である。 $\hat{p}_2=3$ のとき、 $x=3/(2\hat{p}_1)$ なる直線上の点は、同じく $x'=3/(2\hat{p}_1)$ 上に移り、この直線上に不動点 $(3/(2\hat{p}_1), \pm\sqrt{3}/(2\hat{p}_1))$ が存在し、それらが安定もしくは準安定であれば、この直線の一部は発散収束境界となっている。より一般的に言えば、I ⊖ 型において $K_3=0$ かつ、 $F<0$ (定義は (9) で与えた) のとき、発散収束境界は直線部分を有する。

第 2 節で定義した不動方向を表わす直線と発散収束境界の交点は、不動点である。不動点は、I ⊖ 型においては 3 点存在する。

(b) I ⊕ 型の場合：(9) で定義した不変式 $D>0$ の場合である。この場合、不動方向は一方向である。標準形は次の (13) で与えられる。

$$x' = -2xy + \frac{2}{3}x(\hat{p}_1x + \hat{p}_2y), \quad y' = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}y(\hat{p}_1x + \hat{p}_2y). \quad (13)$$

この型の発散収束境界の類型の代表点を Fig. 3 に示すが、この標準形は、 \hat{p}_1 の符号反転に対して不変であるから、Fig. 3 は (\hat{p}_1, \hat{p}_2) 平面の右半平面のみを扱う。(10) で定義した不変式は $K_1=[3\hat{p}_1^2+(\hat{p}_2+3/2)^2](\hat{p}_2-3/4)$, $K_2=[3\hat{p}_1^2+(\hat{p}_2-3)^2](\hat{p}_2+3/4)$, $K_3=[3\hat{p}_1^2+(\hat{p}_2+6)^2](\hat{p}_2-3)$ である。それぞれの符号は、 $\hat{p}_2=3/4$, $\hat{p}_2=-3/2$, $\hat{p}_2=3$ という直線を境にしてかわり、 \hat{p}_1 によらない。唯一の例外として、それぞれ角括弧の中が 0 となる場合、それぞれ 0 となるが、これは $\hat{p}_1=0$ の場合に限る。

Fig. 3 の○印を付した数字に対応して、各発散収束境界を Fig. 4 の ①～③ に示す。

Fig. 4 ① は正方形である。これも解析的表現が可能な発散収束境界の数少ない例の一つであって、 $(x')^2-(y')^2=(-2xy)^2-(x^2+y^2)^2=-(x^2-y^2)=\pm 1$ で表わされる。

Fig. 4 ② は、Fig. 2 ② と同様に複雑な図形で、微係数をもたない点が稠密に存在する部分を有する病的なものである。

Fig. 4 ③ は、 $K_2=0$ であって、無限不動方向があり、したがって発散収束境界は無限遠にのびている。I ⊕ 型において、無限不動方向が存在するのは $K_2=0$ かつ $K_3 \neq 0$ の場合であって、その時に限る。 $K_2=K_3=0$ のときは、無限不動方向はない。 $K_2=0$ でありながら無限不動方向をもたないのは、二次変換のすべての型を通じてこの場合、すなわち I ⊕ 型で $K_2=K_3=0$ の場合に限られる。

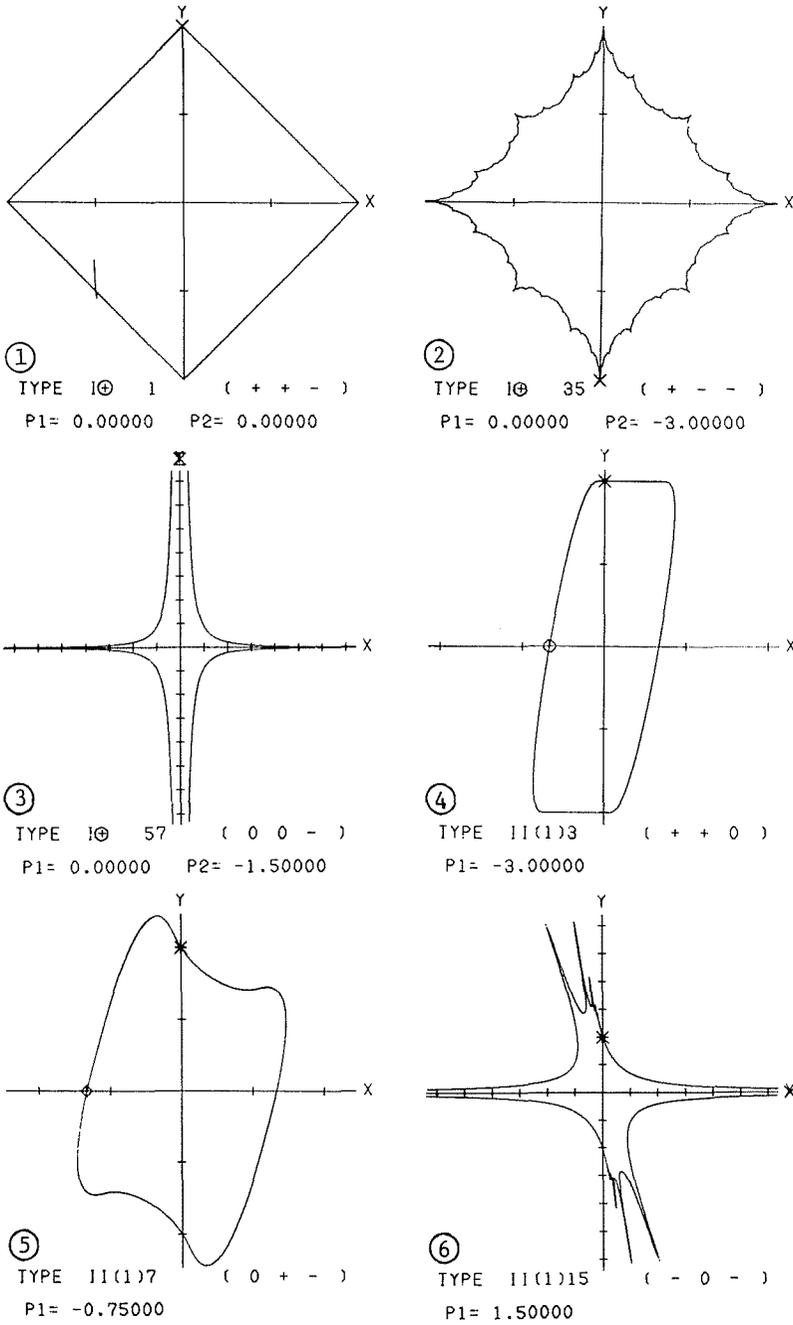


Fig. 4 I ⊕ 型および II (1) 型二次変換の発散収束境界の図①～③は I ⊕ 型, ④～⑥は II (1) 型である

(c) II (1) 型の場合: (9) で定義した不変式 $D=0, [h^{x^2}] \neq 0, H \neq 0$ の場合である。標準形は (14) で与えられる。

$$x' = \left(\frac{2}{3} \hat{p}_1 - 1\right) x^2 + xy, \quad y' = \frac{2}{3} (\hat{p}_1 + 3) xy + y^2. \quad (14)$$

この型に属する発散収束境界の類型の代表点を Fig. 5 に示し, それに対応する発散収束境界

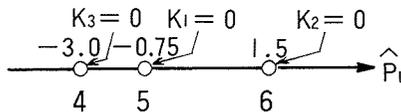


Fig. 5 II (1) 型二次変換の発散収束境界の種類の代表点を \hat{p}_1 軸上に表示図。対応する発散収束境界図は Fig. 4 ④~⑥ に示す。

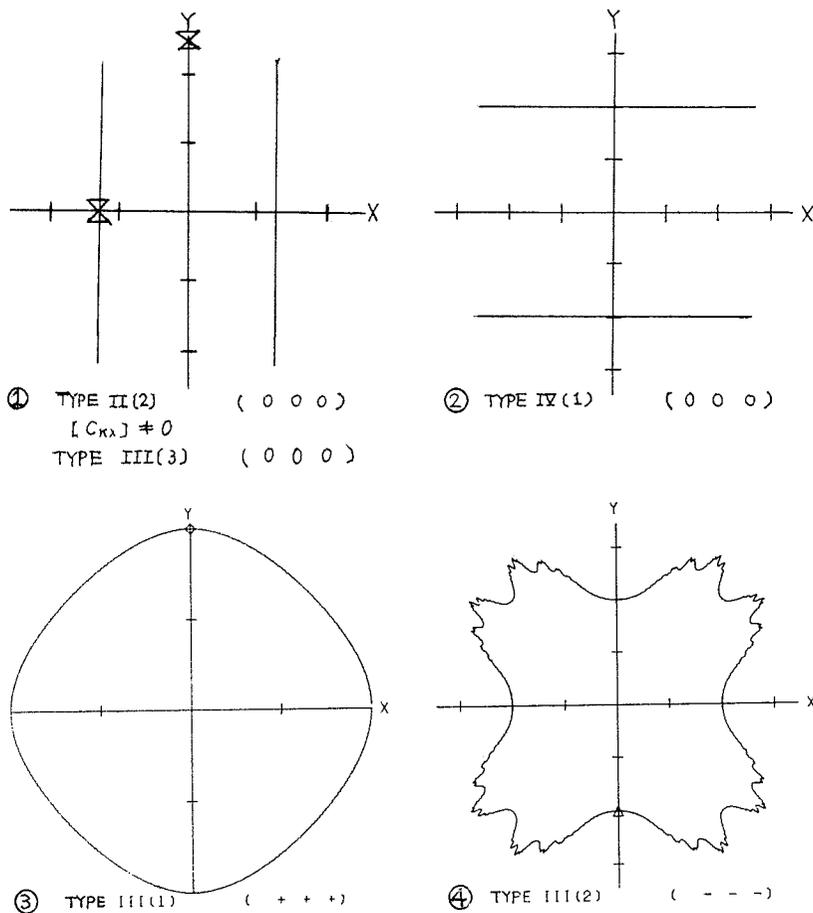


Fig. 6 II (2) 型, III 型, IV 型の二次換の発散収束境界の図

の図を Fig. 4 ④~⑥ に示す。

II (1) 型においては不動方向が2方向である。標準形では $x=0, y=0$ が不動方向であり, $(0, 1)$ はつねに不動点である。 $x=0$ なる不動方向は, つねに一方向不安定である³⁾。

Fig. 4 ④ は水平な直線分を有するように見えるが, 実際, $0 < x < 1/3, y=1$ の部分とその原点对称な部分は直線分である。

Fig. 4 ⑥ は $K_2=0$ の場合で無限不動方向を有する。標準形では $y=0$ がそれであって, 発散収束境界は無限遠にのびているが, $y'/x'=3+y/x$ であるから, $y/x=-3m$ ($m=0, 1, \dots$) の方向はいずれも無限遠にのびるスパイクとなっている。

(d) その他の型の場合: II (2) 型 ($D=0, [h^{s\lambda}] \cong 0, H=0$), III 型 ($D=0, [h^{s\lambda}]=0, Q_{i\mu}^{s\lambda} \cong 0$), IV 型 ($D=0, [h^{s\lambda}]=0, [Q_{i\mu}^{s\lambda}]=0$) の場合である。

II (2) 型 (標準形は, $x'=(2/3\hat{p}_1-1)x^2$, $y'=(2/3)(\hat{p}_1+3)xy$) の発散収束境界は, (9) で定義した $[C_{x2}] \neq 0$ のときは, すべて $x=\pm 1/(2\hat{p}_1-3)$ なる 2 直線である。これを Fig. 6 ① に示す。 $[C_{x2}]=0$ のときは, 有限の範囲に発散収束境界は存在しない。

次に, III 型であって, $F>0$ を III (1) 型 ($x'=xy$, $y'=x^2+y^2$), $F<0$ を III (2) 型 ($x'=-xy$, $y'=x^2-y^2$), $F=0$ かつ $[p_2] \neq 0$ を III (3) 型 ($x'=x^2$, $y'=x^2+xy$), $F=0$ かつ $[p_2]=0$ を III (4) 型 ($x'=0$, $y'=x^2$) と呼ぶ。このとき III (3) 型の発散収束境界は, $x=\pm 1$ なる 2 直線である (Fig. 6 ①)。III (1) 型, III (2) 型の発散収束境界をそれぞれ, Fig. 6 ③, ④ に図示する。III (4) 型では有限の範囲に発散収束境界は存在しない。

IV 型で, $[p_2] \neq 0$ を IV (1) 型 ($x'=xy$, $y'=y^2$), $[p_2]=0$ を IV (2) 型 ($x'=0$, $y'=0$) という。IV (1) 型の発散収束境界は $y=\pm 1$ なる 2 直線である (Fig. 6 ②)。IV (2) 型の発散収束境界は, 有限の範囲に存在しないことは明らかである。

5. 結 論

本報告は, 二次変換過程に特徴的な発散収束境界を取り上げ, その性質および形状の解析を行い, とくに 2 次元の場合について, 可能な形状の類型を網羅して 18 の図に示し, 解析したものである。分類の基礎となる不変式の導入や, 発散収束境界の性質については, すでに論じている^{3),4),5)}ので, 本報告では結果のみを紹介し, その前提に立って, 計算機 (東京大学大型計算機センター HITAC 8700/8800) によって作成した発散収束境界 162 図の中から, 同種のを類型としてまとめ, 18 枚の図に代表例を示した。

数値解析における Newton 法, 生物学や化学反応論⁶⁾において見られる, 二つの個体から一つの個体が生成される過程の数学的取扱いは, 従来の一次変換の数学では不可能であり, 純粋に二次変換の数学が必要である。本報告は, Newton 法の使用の際の最も有利な初期値の方向を選定する問題に, 解答を与えるのみならず, 各種の二次変換構造を有する過程の解析のための基礎資料となることを期待して作成したものである。

参 考 文 献

- 1) Gaston Julia, "Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles". Journal de mathématiques pures et appliquées, 8 Série, Tome 1 (1918), pp. 47-249.
- 2) J. H. M. Wedderburn, "The Automorphic Transformation of a Bilinear Form". Annals of Mathematics II, Vol. 23 (1921), pp. 122-134.
- 3) Tsutomu Date and Masao Iri, "Canonical Forms of Real Homogeneous Quadratic Transformations". J. Mathematical Analysis and Applications, Vol. 56 (1976) pp. 650-682.
- 4) Tsutomu Date, "Classification and Analysis of Two-Dimensional Real Homogeneous Quadratic Differential Equation Systems". J. Differential Equations, Vol. 32 (1979), pp. 507-513.
- 5) 伊達 惇「二次変換の発散収束境界の諸性質」情報処理, 19 卷 6 号 (1978), pp. 311~334.
- 6) Rutherford Aris, "The Algebra of Systems of Second-Order Reactions". I & EC Fundamentals, Vol. 3 (1964), pp. 28-37.