



Title	境界層剥離の近似的な推定法
Author(s)	知名, 宏; China, Hiroshi; 小橋, 安次郎 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 98, 31-39
Issue Date	1980-05-30
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41612">https://hdl.handle.net/2115/41612</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	98_31-40.pdf



## 境界層剝離の近似的な推定法

知名 宏\* 小橋安次郎\*  
(昭和54年12月27日受理)

### An Approximate Method to Estimate the Laminar Boundary Layer Separation

Hiroshi CHINA and Yasujiro KOBASHI  
(Received December 27, 1979)

#### Abstract

An approximate method is presented to estimate the separation point of a two-dimensional steady incompressible laminar boundary layer.

It is well known that the combination of the momentum and the energy integral equation gives a comparatively accurate solution of the laminar boundary layer.

In this paper, these equations are solved under the assumption that the shape parameters, such as displacement thickness, energy thickness which are normalized by the momentum thickness (designated by  $G$ ,  $H$ ) and the normalized dissipation integral  $Q$  are functions of the normalized wall shear stress  $P$ .

For the stagnation flow and the flow over a flat plate, the relations among  $G$ ,  $H$ ,  $Q$  and  $P$  are determined by the exact solutions. The relation among these parameters at the separation point is also determined by introducing similar solution proposed by Tani, which has one undetermined parameter. Then the quantities  $G$ ,  $H$  and  $Q$  can be expressed by either quadratic or cubic functional relation with respect to  $P$  involving one variable parameter which is to be determined by examining the exact solutions of various types of flow. Iterative calculations are necessary to determine the value of the parameter, but they converge very quickly. The numerical calculation shows that the values of the parameters are very close to each other for every case, suggesting the existence of a universal similarity of the velocity profile at the separation point.

The separation points of a circular and an elliptic cylinder are calculated numerically and the results are found to be quite satisfactory.

#### 1. 緒 言

流体中を運動する物体の圧力抵抗の増加や翼の失速など工学上好ましくない現象は、流れの剝離に由来することが多く、したがって剝離点の推定や圧力勾配がある場合の境界層の発達を算定することは重要である。しかし、境界層方程式を解くことは、その非線形性のため非常に困難で厳密解が得られる例は、ごく少数である<sup>1)</sup>。近年、計算機の発達に伴い、非線形の微分方程式を直接数値的に解いていく方法があるが、かなり面倒な計算手順を必要とし、とくに剝離点付近の

\* 機械工学第二学科 流体工学第二講座

解の特異性を取り扱うのが困難で、手軽に用いるという訳にはいかない。このため、工学上の目的に対しては、計算精度は多少低下しても簡単に剥離点を推定できる方法を見出すことが望まれている。境界層方程式の近似解法としては Pohlhausen の方法<sup>1)</sup>がよく知られているが、剥離点近くで解が不安定になる欠点がある。これに対して、Tani<sup>2)</sup>は運動量積分方程式とエネルギー積分方程式を併用して剥離点近傍までの比較的精度の高い解を得ることに成功している。

本報告は、岐点流れおよび平板上の流れについて知られている厳密解と Tani が与えた相似速度分布を剥離点に用いて、境界層の特性量を算出し、これらの間に簡単な関数関係が成り立つとして、運動量積分方程式とエネルギー積分方程式を結合して得られる式を解く手法について述べたもので、この結果は剥離を伴う一般の流れに対しても適用することができる。

## 2. 記号一覧表

- $x$  ; 物体表面に沿う流れ方向の座標  
 $y$  ; 物体表面に垂直な方向の座標  
 $u, v$ ;  $x, y$  方向の速度成分  
 $U_1$  ; 主流速度  
 $\nu$  ; 動粘性係数  
 $\delta$  ; 境界層厚さ  
 $a$  ; 境界層内における速度分布のパラメータ  
 $m$  ; 境界層内における速度分布の指数  
 $\beta$  ; 境界層外における速度分布の指数 ( $U_1 = X^\beta$ )  
 $n$  ; 境界層外における速度分布の指数 ( $U_1 = 1 - X^n$ )  
 $U_0$  ; 基準速度  
 $L$  ; 基準長さ

添 字

- 0 ; 壁面における値  
 $s$  ; 剥離点における値

## 3. 基礎方程式とその変形

定常な二次元、非圧縮の層流境界層に関する運動方程式、および連続の式はつぎのように与えられる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_1 \frac{dU_1}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

ここで、境界層特性長さを次式で定義する。

排除厚さ

$$\delta_1 = \int_0^s \left(1 - \frac{u}{U_1}\right) dy \quad (3)$$

運動量厚さ

$$\delta_2 = \int_0^s \frac{u}{U_1} \left(1 - \frac{u}{U_1}\right) dy \quad (4)$$

エネルギー厚さ

$$\delta_3 = \int_0^\delta \frac{u}{U_1} \left(1 - \frac{u^2}{U_1^2}\right) dy \quad (5)$$

連続の式 (2) を考慮して式 (1) を  $y=0$  から  $y=\delta$  まで積分し、さらに式 (3), (4) の関係を用いると次式のような運動量積分方程式が得られる。

$$\frac{U_1}{\nu} \frac{d\delta_2^2}{dx} + 2 \frac{\delta_2^2}{\nu} \frac{dU_1}{dx} \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\right) = \frac{2\delta_2}{U_1} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \quad (6)$$

さらに、式 (1) に  $u$  を乗じ、同様な手順をくり返すと、エネルギー積分方程式

$$\frac{U_1}{\nu} \frac{d\delta_3^2}{dx} + 6 \frac{\delta_3^2}{\nu} \frac{dU_1}{dx} = \frac{4\delta_3}{U_1} \int_0^\delta \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy \quad (7)$$

が得られる。ここで、つぎのような無次元量を

$$\mathbf{H} = \frac{\delta_1}{\delta_2}, \quad \mathbf{G} = \frac{\delta_3}{\delta_2} \quad (8)$$

$$\mathbf{P} = \frac{2\delta_2}{U_1} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0, \quad \mathbf{Q} = \frac{4\delta_3}{U_1} \int_0^\delta \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy \quad (9)$$

で定義すると、式 (6), (7) はつぎのようにまとめられる。

$$\frac{U_1}{\nu} \frac{d\delta_2^2}{dx} + 2(2 + \mathbf{H}) \frac{\delta_2^2}{\nu} \frac{dU_1}{dx} = \mathbf{P} \quad (10)$$

$$\frac{U_1}{\nu} \frac{d(\mathbf{G}^2 \delta_2^2)}{dx} + \frac{6\mathbf{G}^2 \delta_2^2}{\nu} \frac{dU_1}{dx} = \mathbf{Q} \quad (11)$$

さらに式 (10) は次のように変形される。

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{\nu} \frac{d\delta_2^2}{dx} + \frac{\delta_2^2}{\nu} \frac{dU_1}{dx} &= \mathbf{P} - (3 + 2\mathbf{H}) \frac{\delta_2^2}{\nu} \frac{dU_1}{dx} \\ &= \mathbf{A} - n\lambda \end{aligned} \quad (12)$$

ここで

$$\lambda = \frac{\delta_2^2}{\nu} \frac{dU_1}{dx}$$

は、いわゆる Pohlhausen のパラメータを表わす。

式 (12) の両辺に  $U_1^n$  を乗じてまとめると

$$\frac{1}{\nu} \frac{d}{dx} [U_1^{n+1} \delta_2^2] = \mathbf{A} U_1^n \quad (13)$$

となり、この式はただちに積分できて、次式が得られる。

$$\frac{\delta_2^2}{\nu} = \frac{\mathbf{A}}{U_1^{n+1}} \int_0^x U_1^n dx \quad (14)$$

式 (11) も同様に積分できて、次式が得られる。

$$\frac{\delta_3^2}{\nu} = \frac{1}{U_1^6 \mathbf{G}^2} \int_0^x \mathbf{Q} U_1^5 dx \quad (15)$$

一方、式 (10) と式 (11) から  $d\delta_2^2/dx$  を消去することにより、これらの式は一つの方程式にまとめることができ

$$\frac{\delta_2^2}{\nu} \left[ (\mathbf{H} - 1) \frac{dU_1}{dx} - \frac{U_1}{\mathbf{G}} \frac{d\mathbf{G}}{dx} \right] - \frac{1}{2} \left[ \mathbf{P} - \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{G}^2} \right] = 0 \quad (16)$$

ここで流れのレイノルズ数を、つぎのように定義する。

$$Re = \frac{U_0 L}{\nu} = \frac{1}{\varepsilon^2} \quad (17)$$

ただし、 $U_0$  は基準速度、 $L$  は基準長さを表わす。さらに、これらの量を用いて、次のような無

次元量を定義する。

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{x}{L} & Y &= \frac{y}{\varepsilon L} & \bar{u} &= \frac{u}{U_0} & \bar{v} &= \frac{v}{\varepsilon U_0} \\ \bar{\delta} &= \frac{\delta}{\varepsilon L} & \bar{\delta}_1 &= \frac{\delta_1}{\varepsilon L} & \bar{\delta}_2 &= \frac{\delta_2}{\varepsilon L} & \bar{\delta}_3 &= \frac{\delta_3}{\varepsilon L} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$H = \frac{\bar{\delta}_1}{\bar{\delta}_2} \quad G = \frac{\bar{\delta}_3}{\bar{\delta}_2} \quad P = \frac{2\bar{\delta}_2}{\bar{U}_1} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{Y}} \right)_0 \quad Q = \frac{2\bar{\delta}_3}{\bar{U}_1^2} \int_0^{\bar{\delta}} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{Y}} \right) d\bar{Y} \quad (19)$$

これらの量を用いると、式 (14), (15) および (16) はそれぞれ、つぎのように書ける。

$$\bar{\delta}_3^2 = \frac{A}{\bar{U}_1^{n+1}} \int_0^X \bar{U}_1^n dX \quad (20)$$

$$\bar{\delta}_3^2 = \frac{1}{G \bar{U}_1^6} \int_0^X Q \bar{U}_1^5 dX \quad (21)$$

$$\bar{\delta}_3^2 \left[ (H-1) \frac{d\bar{U}_1}{dX} - \frac{\bar{U}_1}{G} \frac{dG}{dX} \right] - \frac{1}{2} \left( P - \frac{Q}{G^2} \right) = 0 \quad (22)$$

結局、問題は式 (22) から明らかなように、与えられた  $\bar{U}_1$  に対して  $\bar{\delta}_3^2$ ,  $P$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $Q$  を流れ方向の距離  $X$  の関数として求めることに帰着する。以下、その具体的な方法について述べる。

まず、境界層の外側における流れ  $\bar{U}_1(X)$  が与えられると、式 (20) から  $\bar{\delta}_3^2(X)$  が求められる。ここで  $A$  および  $n$  は Tani の与えた値を採用し、 $A=0.44$ ,  $n=5$  とする。このようにして求めた  $\bar{\delta}_3^2(X)$  を第一近似とし、 $dG/dX=0$  とおいて式 (22) に代入する。このとき  $P$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $Q$  は速度分布に依存する量であるが、たとえば式 (23) で表わされるような速度分布を仮定すれば、一つのパラメータ  $a$  の関数として表わすことができ、したがって、ある  $X$  の位置で式

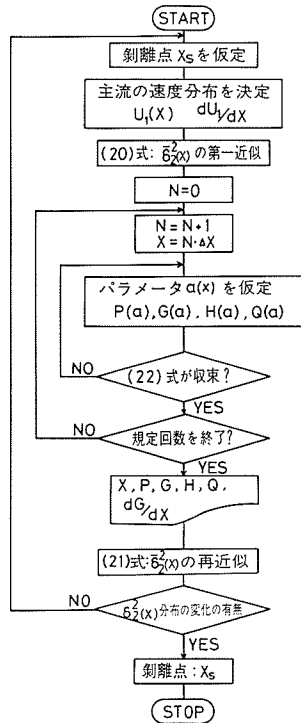


図-1 流れ図

(22) を満足する  $a$  を反復計算をすることによって求める。このようにして  $P, G, H, Q$  が  $X$  の関数として求まると、式 (21) を用いて  $\delta_2^*(X)$  の第二近似値が計算できる。以下この値を用いて、式 (21) と式 (22) を満足する  $\delta_2^*(X)$  の分布が変化しなくなるまで同様の計算をくり返す。なお、第二近似以降は  $G$  の  $X$  方向の分布が与えられるから、 $dG/dX$  を見積もることが、可能である。上述の計算過程の流れ図を図 1 に示す。

#### 4. $G, H, Q$ の関数形の仮定

Tani は Pohlhausen のパラメータ  $\lambda$  を境界層内における速度分布のパラメータとせず、壁面での速度勾配に比例する量  $a$  を用いることを提案し、境界層内における速度分布を次式で仮定した。

$$\frac{u}{U_1} = 1 - \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^{m-1} \left[1 + (m-1-a)\frac{y}{\delta}\right] \quad (23)$$

この式を用いると式 (18), (19) で表わされる量はすべて  $m$  と  $a$  の関数となる。Tani は  $m=4$  とおいて境界層外側の流れが、 $U_1 = U_0 - bX^n$ , ( $n=1, 2, 4, 8$ ) で与えられる場合の境界層方程式の近似解を求め、それが厳密解と比較しても、かなり良い精度があることを報告している。ただ、 $m=4$  としたとき式 (23) で与えられる速度分布では、岐点において成りたつべき式

$$\frac{Q}{3G^2} = \frac{P}{2+H} \quad (24)$$

を厳密には満足し得ないという欠点がある。そこで本報告では、そのような欠点を除くとともに、精度を上げるため以下に述べる仮定を設ける。

境界層の特性量である  $P, G, H, Q$  を式 (23) から計算すると、 $m$  を一定 (たとえば  $m=4$ ) としたとき  $a$  に対して単調な変化をすることがわかる。一方、 $P$  はその定義から明らかのように壁面での剪断応力に関する量であるから、 $a$  のかわりに  $P$  を変数に選ぶことにすると、 $G, H, Q$  は  $P$  の単調関数として表現できるはずである。このことは、速度分布の形状を仮定しないで境界層の挙動を取り扱うという意味で、新しい試みというべきであろう。なお、こうした仮定の妥当性は Hartree<sup>3)</sup>, Howarth<sup>4)</sup>, Tani<sup>5)</sup> らが与えた厳密解を吟味することにより得られる。図 2~4 はそれぞれこれらの厳密解より得られた  $P$  と  $G, H, Q$  の関係を示したもので、これらの量を  $P$  の単調な関数と仮定できることがわかる。これらの図中には式 (23) で  $m=4$  お

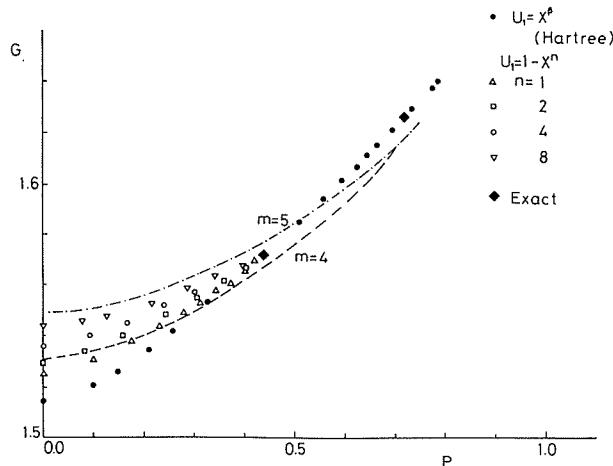


図-2  $P$  と  $G$  の関係 (厳密解)

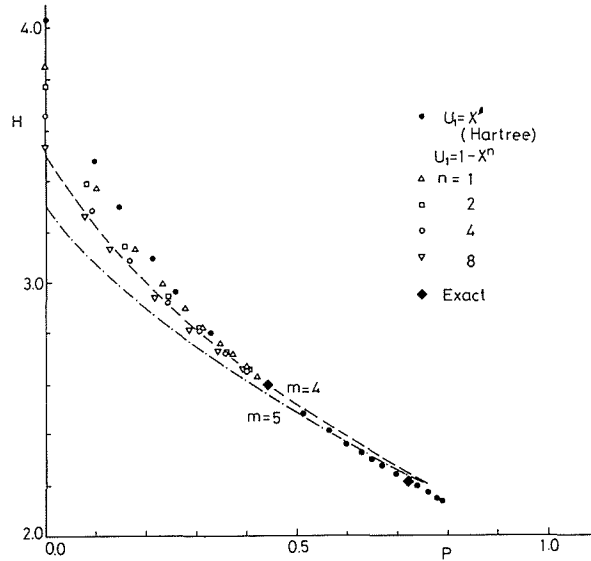


図-3 P と H の関係 (厳密解)

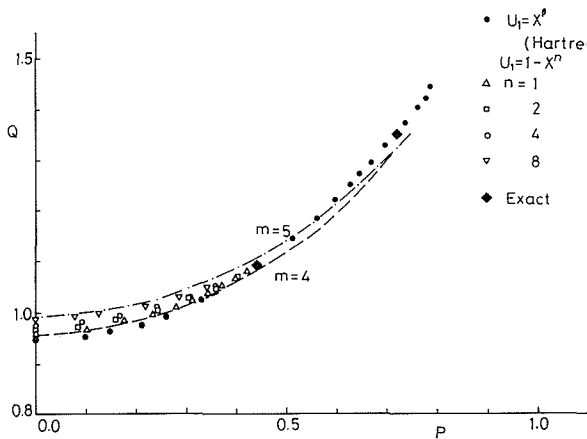


図-4 P と Q の関係 (厳密解)

表-1 岐点と平板上の流れの厳密解

	Hiemenz	Blasius	剥離点
$P$	0.72067	0.44106	0.0
$G$	1.62574	1.57258	$G_s$
$H$	2.21625	2.59110	$H_s$
$Q$	1.35529	1.09073	$Q_s$

よび  $m=5$  としたときの対応を破線で示してある。なお、ここでは議論の対象から除外した問題ではあるが、厳密解と破線の対比から式 (23) で仮定した速度分布が  $m$  の値のとり方により岐点付近を除けば厳密解をかなり忠実に近似できることがわかる。

いま、 $G$ 、 $H$ 、 $Q$  の具体的な関数形をつぎのように仮定する。すなわち、岐点付近の流れと平板上の流れについては、それぞれ、Hiemenz 解、Blasius 解<sup>6)</sup> として与えられている厳密解から得られる値を採用する。さらに剥離点 ( $a=0$ ) については指数  $m$  を未知のパラメータとして、次式で計算されるものを用いる。

$$\left. \begin{aligned}
 G_s &= \frac{131m^3 - 114m^2 + m + 6}{3(3m-2)(9m^2-1)} \\
 H_s &= \frac{2(4m^2-1)}{3m(m-1)} \\
 Q_s &= \frac{12m^3(m-1)^2 G_s}{(2m-3)(2m-1)(m+1)(4m^2-1)}
 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Hiemenz 解, Blasius 解, および剥離点での解を表 1 に示す。

### 5. $G, H, Q$ の関数形の決定

$G, H, Q$  が単調に変化する関数であることに着目し, これらを Hiemenz 解, Blasius 解および式 (25) で与えられる値を満足するような  $P$  の 2 次式および 3 次式で表わすことにする。これらの式には未定のパラメータ  $m$  が含まれているので, その適正值を決定するため表 2 に示すようないままでに厳密解の得られている流れについて, 剥離点でどのような値をもつか調べる必要がある。このため,  $m$  をパラメータとして  $G_s, H_s, Q_s$  を求め表 1 で示す点を用いて  $G, H, Q$  を  $P$  の多項式で近似し, 前述した解法によって式 (22) を解き, 厳密解から得られる剥離点  $X_s$  を与える  $m_s$  を見出す。 $U_1=1-X^4$  の場合の計算例を図 5 に示すが, 2 次式のときには  $m_{s_2}=4.13$ , 3 次式のときには  $m_{s_3}=4.02$  であることがわかる。表 2 のいろいろな流れに対する  $m_s$  を 2 次式, 3 次式の場合について表 3 で示す。この表に見られるように,  $m_s$  の値にはかなりのばらつきが見られるが, 厳密解自体に含まれる誤差を考慮すると, ほぼ一定値をとると

表-2 いろいろな型の流れと剥離点位置

No.	人 名	境界層外側の流れ	剥離点 $X_s$
1	Howarth <sup>4)</sup>	$1-X$	0.120
2	Leigh <sup>7)</sup>	$1-X$	0.1198
3	Tani <sup>5)</sup>	$1-X^2$	0.271
4	〃	$1-X^4$	0.462
5	〃	$1-X^8$	0.640
6	Curle <sup>6)</sup>	$X-X^3-0.1216X^5$	0.6245
7	〃	$X-X^3$	0.6551
8	〃	$X-X^3+0.0789X^5$	0.6647
9	Terrill <sup>9)</sup>	$\sin X$	1.8230
10	Hayashi <sup>10)</sup>	$Xe^{-X}$	1.3125
	Inoue		
	Tsuji		

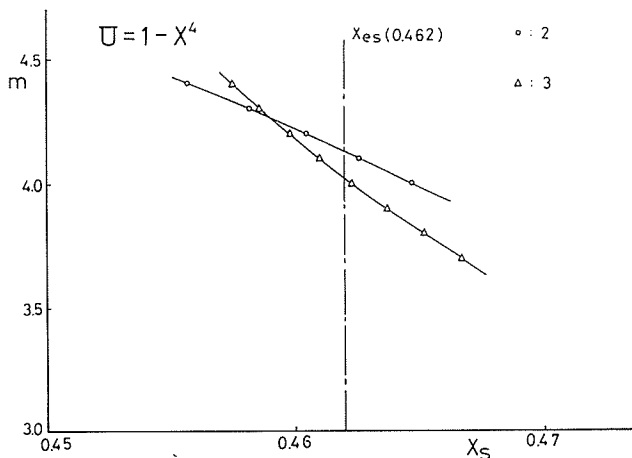


図-5 計 算 列

表-3 いろいろな型の流れに対して  
厳密解の剥離点を与える  $m$   
添字 2, 3 はそれぞれ 2 次式,  
3 次式による結果を表わす

No.	$m_{s_2}$	$m_{s_3}$
1	4.716	(3.60)
2	〃	〃
3	4.270	3.904
4	4.139	4.025
5	4.328	4.391
6	4.792	5.176
7	4.113	4.103
8	4.717	5.088
9	3.994	3.880
10	3.948	3.752

考えてよく、これらの平均値をとって、2次式の場合には  $\bar{m}_{s_2}=4.33$ 、3次式の場合には  $\bar{m}_{s_3}=4.21$  を採用することにする。これらの値を用いると、 $G, H, Q$  の最終的な形が以下のように決定される。

2次式の場合

$$\left. \begin{aligned} G &= 0.154P^2 + 0.010P + 1.538 \\ H &= 0.751P^2 - 2.213P + 3.421 \\ Q &= 0.936P^2 - 0.143P + 0.972 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

3次式の場合

$$\left. \begin{aligned} G &= -0.058P^3 + 0.214P^2 + 1.536 \\ H &= -2.119P^3 + 3.294P^2 - 2.982P + 3.447 \\ Q &= 0.403P^3 + 0.455P^2 + 0.968 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

図6は式(26)、(27)を示したものであるが、2次式でも3次式でも両者の間にそれほど差異のないことがわかる。

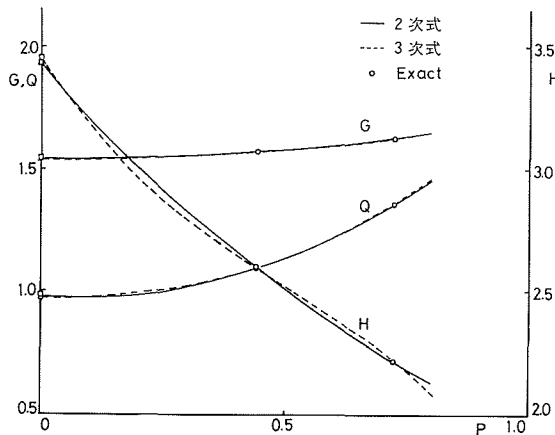


図-6 最終的な  $P, G, H, Q$  の関係

### 6. 精度と応用

表4に式(26)、(27)を用いた場合の剥離点の推定位置と、厳密解に対する誤差の程度を示した。これからわかるようにいろいろな型の流れに対する剥離点の推定精度は3%以内であり、複

表-4 厳密解と剥離点との差

No.	$\Delta X/X_s \times 100(\%)$	$\Delta X/X_s \times 100(\%)$
2	2.980	1.544
3	-0.334	-0.452
4	-0.934	-0.514
5	-0.008	0.461
6	0.907	1.167
7	-0.425	-0.164
8	0.817	1.084
9	-0.818	-0.547
10	-1.182	-0.911

表-5 実験結果と本方法の結果との比較

物体	実験結果	本方法	
円柱	Roshko <sup>13)</sup>	80°	2次式; 78.4°
	Achenbach <sup>12)</sup>	78°	3次式; 78.9°
だ円柱	Wiland <sup>11)</sup> ( $\varepsilon=0.6$ )	$74^\circ < X_s < 78^\circ$	71°
	Schubauer <sup>14)</sup> ( $\varepsilon=0.941$ )	126°	134°

$\varepsilon$ : 離心率

雑な計算過程を要する方法と比較しても、それほど差異のないことがわかる。また本推定法の妥当性を調べるために、円柱とだ円柱の剥離点を計算して、それぞれ Achenbach<sup>12)</sup>、Roshko<sup>13)</sup>、Wiland<sup>11)</sup>、Schubauer<sup>14)</sup> の実験結果と比較した。表5にその結果を示すが、これらの推定値は実験結果と比較的よい一致を示す。なお、円柱および離心率の小さいだ円柱に対する流れ場には、Parkinson と Jandali<sup>11)</sup> の後流吹き出しモデルを用いて逐次近似的に計算を進めてあるが、Parkinson と Jandali のモデルは、離心率の大きいだ円やレンズ状翼など、流線形の物体に対しては適当でないため、離心率の大きい Schubauer のだ円に対しては、実験より得られた速度分布を関数近似して計算を行った。

## 7. 結 言

剥離を伴う境界層の剥離点を、精度よく簡単に推定する一つの方法を提案した。境界層特性量の間簡単な関数関係を仮定して、運動量積分方程式とエネルギー積分方程式を併用して解いていくのであるが、仮定した関数は岐点流れと平板上の流れに対しては厳密解を、また剥離点での流れに対しては一つの未定のパラメータを含む解を連ねるもので、壁面の剪断応力に相当する量の2次および3次の多項式で与えられている。多項式中のパラメータは、厳密解の得られているいろいろな型の流れを吟味して、平均値を算定し、これを用いて具体的な関数形を提案してある。これらの関数を用いて剥離を伴う流れの例について計算した結果は、実験とも良い一致を示しており、解法の妥当性が証明されたと思われる。

なお、数値計算は北海道大学大型計算機センター **FACOM 230-75** によって行われた。

## 参 考 文 献

- 1) Schlichting, H.: *Boundary Layer Theory*, 6-th ed., McGraw-Hill.
- 2) Tani, I.: On the solution of the laminar boundary layer equations, 50-Jahre Grenzschichtforschung, (Ed. H. Görtler and W. Tollmien, Braunschweig, 1955).
- 3) Hartree, D. R.: On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **33** (1937), 223.
- 4) Howarth, L. A.: On the solution of the laminar boundary layer equations, *Proc. Roy. Soc. A-164* (1938), 547.
- 5) Tani, I.: On the solution of the laminar boundary layer equations, *J. Phys. Soc. Japan*, **4** (1949), 149.
- 6) Rosenhead, L.: *Laminar boundary layers*, Oxford Univ. Press, (1963), 224, 232.
- 7) Leigh, D. E. F.: The laminar boundary-layer equations, A method of solution by means of an automatic computer, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **51** (1955), 320.
- 8) Curle, N.: Accurate solution of the laminar boundary layer equations for flows having a stagnation point and separation, *ARC R & M 3164* (1960).
- 9) Terrill, R. M.: Laminar boundary-layer flow near separation with and without suction, *Phil. Trans. Roy. Soc. A-253* (1960), 55.
- 10) Hayashi, N., Inoue, K. and Tsuji, H.: Solution of laminar boundary layer equations involving separations, *Phys. Fluids*, **12**, suppl. II (1969), 283.
- 11) Parkinson, G. V. and Jandali, T.: A wake source model for bluff body potential flow, *J. Fluid Mech.*, **40-3** (1970), 577.
- 12) Achenbach, E.: Distribution of local pressure and skin friction around a circular cylinder in cross-flow up to  $Re=5 \times 10^6$ , *J. Fluid Mech.*, **34-4** (1968), 625.
- 13) Roshko, L.: A new hodograph for free-stream line theory, *NACA TN-3168* (1954).
- 14) Schubauer, G. B.: Air flow in a separating laminar boundary layer, *NACA TR-527* (1935).