



Title	電磁環境下における多導体伝送線路理論の構成
Author(s)	金子, 優; Kaneko, Masaru; 本間, 利久 他
Citation	北海道大學工学部研究報告, 99, 11-21
Issue Date	1980-08-11
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41618
Type	departmental bulletin paper
File Information	99_11-22.pdf



電磁環境下における多導体伝送線路理論の構成

金子 優 本間利久 深井一郎

(昭和55年3月31日受理)

Multiconductor Transmission Line Theory under an Electromagnetic Field Environment

Masaru KANEKO Toshihisa HONMA Ichiro FUKAI

(Received March 31, 1980)

Abstract

As the multiconductor transmission line theory under an electromagnetic field environment, the problem of coupling of external electromagnetic fields is studied for two lossless lines: homogeneous medium and cross-sectionally inhomogeneous medium cases. According to the usual method telegrapher's equations with source terms are derived from Maxwell's field equations considering external fields and those produced by the line currents together. In this paper, however, the effects of external fields are replaced with the independent distributed voltage sources and ordinary telegrapher's equations are set up as basic equations. The problem is recognized from the viewpoint of primary electric circuit theory and the analysis is developed on the basis of the fundamental concept, i. e., Thevenin's theorem and law of superposition. As a consequence, it is shown that the current distribution induced on the line conductor is obtained in the same way regardless of whether the surrounding medium is homogeneous or not.

1. ま え が き

外部電磁界の伝送線路への結合問題については、すでに多くの研究者によって考察がなされている^{1)~7)}。通常、興味の対象となるのは、線路端に接続されている回路網に現われる電圧あるいは電流である。そのため、外部電磁界とそれによって線路に誘起される電流がつくり出す電磁界を同時に考慮し、Maxwellの電磁界方程式から、従来の多導体電信方程式に電源項が付加した形の電圧、電流に関する方程式を導出し、それを解くのが一般的な方法となっている^{1)~4)}。一方、Smith⁷⁾は、外部電磁界の効果を、独立な分布電圧源に置き換えることにより、従来の電信方程式から、孤立2導体線路に誘起される電流分布を求めている。その解はTheveninの定理と重ね合わせの理に基づいて導かれており、先の方法によって得られた解に全く一致している。線路媒質が均質な場合には両者の方法に差異はないが、線路導体が誘電体被覆を持つような線路媒質に不均質性がある場合には、前者の方法では解くべき方程式の導出自体が困難となる。それに対し、後者の方法は、従来の電信方程式が基本方程式となっており、外部電磁界の効果についても、独立した電圧源として処理するため、媒質の不均質性も含めた問題の取り扱いが可能である。しか

し、行列演算の繁雑性により、多導体線路問題にはその方法は拡張されていなかった。本論文はその拡張を行なうものである。対象とする線路は、孤立 $(n+1)$ 導体系で、導体は無損失、その太さは線路断面の大きさに比較して無視できるものとする⁴⁾。線路の伝搬モードは **TEM**、媒質不均質の場合にも“quasi-**TEM**”を仮定する。

第2章においては、一般に多導体伝送線路を取り扱う場合、また本論文で Smith の方法を拡張する際にも重要な概念となる、電信方程式の係数行列の行列積の対角化可能性について述べる。第3章では、外部電磁界の処理、すなわち等価分布電圧源を決定する。第4章では多導体伝送線路と外部電磁界の結合問題として、理想的多導体系について、すでに Paul によって得られている解と一致することを示し、最後に第5章で、媒質不均質の線路に誘起される電流を求める。

2. 行列積 YZ の対角化可能性

長手方向に均一な孤立 $(n+1)$ 導体系伝送線路の電信方程式は、時間依存性を $\exp(j\omega t)$ としてフェーザー表示すると、

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \mathbf{V}(x) = -\mathbf{Z}\mathbf{I}(x) & (1a) \\ \frac{d}{dx} \mathbf{I}(x) = -\mathbf{Y}\mathbf{V}(x) & (1b) \end{cases}$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R} + j\omega \mathbf{L} = \mathbf{R}_c + j\omega \mathbf{L}_c + j\omega \mathbf{L} \quad (2)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{G} + j\omega \mathbf{C} \quad (3)$$

で与えられる。ここに $\mathbf{V}(x)$, $\mathbf{I}(x)$ は、 n 行 1 列の縦ベクトルで、それぞれ基準導体に対する各導体の電位、および各導体を流れる電流を表わす。 \mathbf{R}_c , \mathbf{L}_c は n 行 n 列の実対称行列で、それぞれ単位長当りの導体抵抗、導体内部インダクタンス、 \mathbf{L} , \mathbf{C} , \mathbf{G} は n 行 n 列の実行列で、それぞれ単位長当りの外部インダクタンス、キャパシタンス、コンダクタンスを表す。 \mathbf{L} , \mathbf{C} , \mathbf{G} はまた、線路媒質の均質、不均質に関係なく対称行列である。

多導体伝送線路問題を取り扱う際に重要な概念となるのは、行列積 \mathbf{YZ} (あるいは \mathbf{ZY}) の性質である。行列積 \mathbf{YZ} は一般には、ある正則な行列 \mathbf{T} による相似変換 $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{YZT}$ によって Jordan 標準形になるが、ある条件の下で対角行列に変換できる場合がある。それらの条件は実用上、興味あるものであり、本論文での解析を進める際にも重要な意味を持つ。以下それらの条件について述べる^{3), 8), 9)}。

導体を取り囲む線路媒質が均質、すなわち一種類の誘電体で構成されている場合には、 \mathbf{L} と \mathbf{C} および \mathbf{L} と \mathbf{G} の間には次の関係がある。

$$\mathbf{LC} = \mathbf{CL} = \mu\epsilon \mathbf{I}_n \quad (4a)$$

$$\mathbf{LG} = \mathbf{GL} = \mu\sigma \mathbf{I}_n \quad (4b)$$

ここに μ , ϵ , σ は、それぞれ媒質の透磁率、誘電率、導電率、および \mathbf{I}_n は n 行 n 列の単位行列である。さらにキャパシタンス行列 \mathbf{C} は

$$\mathbf{C} = \epsilon \mathbf{K} \quad (5)$$

で与えられる。 \mathbf{K} は n 行 n 列の実対称、正定符号な、線路の断面形状のみによって決まる行列である。(4), (5) を考慮すれば \mathbf{YZ} は

$$\begin{aligned} \mathbf{YZ} &= (\mathbf{G} + j\omega \mathbf{C})(\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L}) \\ &= (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{KR} + (j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon) \mathbf{I}_n \end{aligned} \quad (6)$$

となる。いま完全導体、すなわち $\mathbf{R}=\mathbf{0}_n$ ($\mathbf{0}_n$ は n 行 n 列の零行列) を仮定すると、 \mathbf{YZ} は単位行列のスカラ倍になり、相似変換行列 \mathbf{T} は任意の正則行列を選べる。 $\mathbf{R}\neq\mathbf{0}_n$ の場合には、行列積 \mathbf{KR} が対角化されるような \mathbf{T} の存在が問題となる。 \mathbf{R} は (2) に示すように、複素数からなる行列であり、それと \mathbf{K} との積の対角化は、 \mathbf{KR} が正規行列になる場合以外は、一般には保証されない。しかし、導体抵抗 \mathbf{R}_c あるいは内部インダクタンス \mathbf{L}_c のいずれか一方が無視できる場合には、 \mathbf{KL}_c あるいは \mathbf{KR}_c を対角化する \mathbf{T} の存在は、 \mathbf{L}_c , \mathbf{R}_c が実対称行列であり、 \mathbf{K} が正定符号であることから保証される。さらに、 $\mathbf{R}_c\neq\mathbf{0}_n$, $\mathbf{L}_c\neq\mathbf{0}_n$ の場合でも、 $(n+1)$ 個の導体がすべて同一であれば、 r_c , l_c を導体の単位当りの抵抗、内部インダクタンスとすると、 \mathbf{YZ} は

$$\mathbf{YZ} = (\sigma + j\omega\varepsilon)(r_c + j\omega l_c) \mathbf{K} [\mathbf{I}_n + \mathbf{U}_n] + (j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon) \mathbf{I}_n \quad (7)$$

となる。 \mathbf{U}_n は全要素が1の n 行 n 列の行列である。 $\mathbf{I}_n + \mathbf{U}_n$ は実対称行列であるから、 $\mathbf{K} [\mathbf{I}_n + \mathbf{U}_n]$ は対角化可能、すなわち \mathbf{YZ} は対角化可能である。 n 個の導体が同一であって、基準導体のみが完全導体と仮定できる場合には、(7) 中の \mathbf{U}_n が消えることになり、このときも \mathbf{YZ} は対角化可能である。

以上、線路媒質が均質な線路の \mathbf{YZ} の対角化可能条件を列挙したが、(6), (7) からわかるように、この場合は媒質の損失の有無は対角化可能性に影響を与えない。

次に、線路導体が誘電体被覆を持つような、媒質が不均質な線路については、(4), (5) はもはや成り立たず、 \mathbf{YZ} も (6) のようには表わせない。 $\mathbf{R}=\mathbf{0}_n$ の条件を課しても、 \mathbf{YZ} を対角化するには、複素行列 $j\omega\mathbf{GL} - \omega^2\mathbf{CL}$ を対角化する \mathbf{T} が要求されることになり、その存在は一般には保証されていない。 $\mathbf{G}=\mathbf{0}_n$ かつ $(n+1)$ 導体がすべて同一としても、 \mathbf{YZ} は

$$\mathbf{YZ} = j\omega(r_c + j\omega l_c) \mathbf{C} (\mathbf{I}_n + \mathbf{U}_n) - \omega^2 \mathbf{CL} \quad (8)$$

となり、 $\mathbf{C} (\mathbf{I}_n + \mathbf{U}_n)$ と \mathbf{CL} を同時に対角化する必要があり、それは一般には可能でない。(8) に $\mathbf{U}_n=\mathbf{0}_n$ すなわち基準導体が完全導体であるとの条件を付加しても、 \mathbf{C} と \mathbf{CL} を同時に対角化する \mathbf{T} が要求され、これもまた一般には保証されていない。しかし、導体および媒質ともにその損失が無視できる場合には、

$$\mathbf{YZ} = -\omega^2 \mathbf{CL} \quad (9)$$

となり、 \mathbf{C} は媒質不均質な場合でも実対称正定符号、 \mathbf{L} も実対称行列であるから、それらの積 \mathbf{CL} はある実行列 \mathbf{T} で対角化できる。また \mathbf{R} および \mathbf{G} が存在しても、 n 個の導体とその誘電体被覆が同一のものであり、線路の断面構造が、 n 個の導体と基準導体の間である対称性を持つ場合、すなわち \mathbf{Y} および \mathbf{Z} が循環対称行列

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 & \cdots & Y_3 & Y_2 \\ Y_2 & Y_1 & Y_2 & Y_3 & \cdots & Y_3 \\ Y_3 & & & & & Y_3 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ Y_3 & & & & & Y_2 \\ Y_2 & Y_3 & \cdots & Y_3 & Y_2 & Y_1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 & \cdots & Z_3 & Z_2 \\ Z_2 & Z_1 & Z_2 & Z_3 & \cdots & Z_3 \\ Z_3 & & & & & Z_3 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ Z_3 & & & & & Z_2 \\ Z_2 & Z_3 & \cdots & Z_3 & Z_2 & Z_1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

で与えられる場合には、行列積 \mathbf{YZ} は \mathbf{Y} , \mathbf{Z} の要素に無関係に、ユニタリ行列 \mathbf{T} :

$$[\mathbf{T}]_{im} = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{j\left\{\frac{2\pi}{n}(m-1)(i-1)\right\}} \quad (11)$$

で対角化されることが保証されている。これは $n=3$ の場合、対称座標変換として知られているものである。

3. 外部電磁界の等価分布電圧源としての取り扱い

本章では、外部電磁界の伝送線路への寄与を独立した分布電圧源として評価する。これによって、線路媒質の不均質性も含めた解析が可能となる。

図-1に示すような、基準導体と i 番目導体、および両導体を x と $x+\Delta x$ で結ぶ2直線によってつくられる、平面 ΔS_i を考える。 ΔS_i を鎖交する磁束の時間変化は電圧源 $\Delta V_{S_i}^{inc}(x)$ を生ぜしめる。すなわち、

$$\Delta V_{S_i}^{inc}(x) = -j\omega \int_{\Delta S_i} \vec{B}^{inc} \cdot \vec{n} dS \quad (12)$$

ここに \vec{n} は ΔS_i に垂直な単位ベクトルである。積分形の Faraday の法則によって (12) は

$$\Delta V_{S_i}^{inc}(x) = \oint_{C_i} \vec{E}^{inc} \cdot d\vec{C}_i \quad (13)$$

と書き換えられる。ここに C_i は ΔS_i の周囲を \vec{n} に対して右ねじの正方向に回る積分路である。図-1に示す C_i について積分を行なえば、

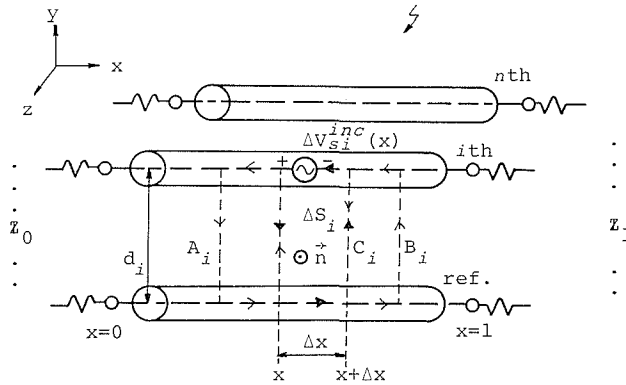


図-1

$$\begin{aligned} \Delta V_{S_i}^{inc}(x) = & - \int_x^{x+\Delta x} \left[E_i^{inc}(x, d_i) - E_i^{inc}(x, 0) \right] dx \\ & - \int_0^{d_i} E_i^{inc}(x, \xi_i) d\xi_i + \int_0^{d_i} E_i^{inc}(x+\Delta x, \xi_i) d\xi_i \end{aligned} \quad (14)$$

となる。 E_i^{inc} は外部電磁界の導体に沿った電界成分、 E_i^{inc} は2導体を結ぶ積分路 ξ_i に沿った電界成分である。いま C_i に隣接した閉路 A_i , B_i を考えると、(14)の右辺第2, 3項の積分は、 C_i と A_i , B_i の積分の方向が逆であることから、消去される。ただ、線路端 $x=0$ と $x=l$ においてのみ、それらは次のように残る。

$$- \int_0^{d_i} E_i^{inc}(0, \xi_i) d\xi_i \quad \text{at } x=0 \quad (15)$$

$$\int_0^{d_i} E_i^{inc}(l, \xi_i) d\xi_i \quad \text{at } x=l \quad (16)$$

(14)の右辺第1項の積分は、被積分関数の原始関数を $F(x)$ とすれば、

$$\int_x^{x+\Delta x} \left[E_l^{inc}(x, d_i) - E_l^{inc}(x, 0) \right] dx \quad (17)$$

$$= F(x+\Delta x) - F(x)$$

と書ける。 $F(x+\Delta x)$ を x のまわりで Taylor 展開すると、

$$\int_x^{x+\Delta x} \left[E_l^{inc}(x, d_i) - E_l^{inc}(x, 0) \right] dx \quad (18)$$

$$= \left[E_l^{inc}(x, d_i) - E_l^{inc}(x, 0) \right] \Delta x + O(\Delta x^2)$$

となる。 $\Delta x \rightarrow 0$ の極限を取って、高次項を無視すると、 $\Delta V_{S_i}^{inc}(x)$ は最終的に次式で与えられる $dV_{S_i}^{inc}(x)$ になる。

$$dV_{S_i}^{inc}(x) = - \left[E_l^{inc}(x, d_i) - E_l^{inc}(x, 0) \right] dx \quad (19)$$

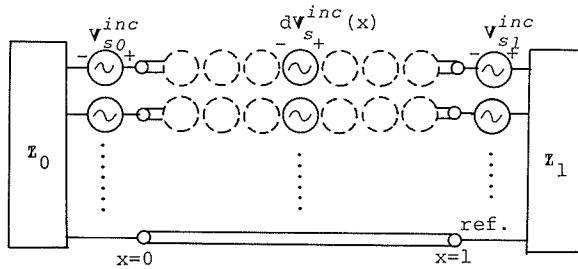


図-2

(15), (16), (19) を n 個の導体について評価してやれば、外部電磁界の伝送線路への影響として、図-2に示すような等価電圧源分布が得られる。図中、 $\mathbf{V}_{S_0}^{inc}$ 、 $\mathbf{V}_{S_1}^{inc}$ 、 $d\mathbf{V}_S^{inc}(x)$ はいずれも n 行 1 列の縦ベクトルでありそれぞれ次式で与えられる。

$$\left[\mathbf{V}_{S_0}^{inc} \right]_{i1} = \int_0^{d_i} E_l^{inc}(0, \xi_i) d\xi_i \quad (20)$$

$$\left[\mathbf{V}_{S_1}^{inc} \right]_{i1} = - \int_0^{d_i} E_l^{inc}(l, \xi_i) d\xi_i \quad (21)$$

$$\left[d\mathbf{V}_S^{inc}(x) \right]_{i1} = \left[E_l^{inc}(x, d_i) - E_l^{inc}(x, 0) \right] dx \quad (22)$$

等価分布電圧源 (20), (21), (22) は、線路導体を取りまく媒質の均質、不均質に関係なく表示できるものであり、以後の解析が統一的に行なえる。ただ、媒質が不均質な場合には、3つの式中の E^{inc} を厳密に評価することは難しい問題となる。しかし、線路の伝搬モードを“quasi-TEM”と仮定している範囲では、均質媒質の場合と同じに評価しても、大きな誤差はないと考えられる。

4. 理想的多導体系への外部電磁界結合

本章では、理想的多導体系すなわち、無損失、媒質均質を仮定した伝送線路への外部電磁界の結合問題の解析を行なう。本章、および第4章ともに、第3章で決定した分布電圧源から線路に誘起する電流分布を求めることが目的である。本章においては、状態変数解析法によって Paul がすでに求めている結果^{2),3)}と一致することを示し、解析方法が正しいことを示す。

まず、解析の際に重要な役割を果たす等価インピーダンス行列を導出する。理想的多導体系

の電信方程式は、(2), (3) 中, $\mathbf{R}=\mathbf{G}=\mathbf{0}_n$ であるから, (1) は

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \mathbf{V}(x) = -j\omega \mathbf{L}\mathbf{I}(x) \\ \frac{d}{dx} \mathbf{I}(x) = -j\omega \mathbf{C}\mathbf{V}(x) \end{cases} \quad (23 \text{ a})$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \mathbf{V}(x) = -j\omega \mathbf{L}\mathbf{I}(x) \\ \frac{d}{dx} \mathbf{I}(x) = -j\omega \mathbf{C}\mathbf{V}(x) \end{cases} \quad (23 \text{ b})$$

となる。また, \mathbf{L} と \mathbf{C} に関しては (4 a) が成り立つ。線路端の電圧, 電流すなわち $\mathbf{V}(0), \mathbf{I}(0)$ あるいは, $\mathbf{V}(l), \mathbf{I}(l)$ を既知とすると, (23) の解として, 任意点 x の電圧, 電流は,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(x) \\ \mathbf{I}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta x \mathbf{I}_n & -j \sin \beta x \mathbf{Z}_c \\ -j \sin \beta x \mathbf{Z}_c^{-1} & \cos \beta x \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(0) \\ \mathbf{I}(0) \end{bmatrix} \quad (24)$$

あるいは,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(x) \\ \mathbf{I}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta (l-x) \mathbf{I}_n & j \sin \beta (l-x) \mathbf{Z}_c \\ j \sin \beta (l-x) \mathbf{Z}_c^{-1} & \cos \beta (l-x) \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(l) \\ \mathbf{I}(l) \end{bmatrix} \quad (25)$$

で与えられる^{2),3)}。ここに

$$\mathbf{Z}_c = \left(\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right) \mathbf{L} \quad (26)$$

$$\beta = \sqrt{\mu\varepsilon} \omega \quad (27)$$

である。(24) において $x=l$ とし, 左辺に線路端境界条件

$$\mathbf{V}(l) = \mathbf{Z}_l \mathbf{I}(l) \quad (28)$$

を代入し, $\mathbf{I}(l)$ を消去すると, $\mathbf{V}(0)$ と $\mathbf{I}(0)$ の関係式

$$\mathbf{V}(0) = \left[\cos \beta l \mathbf{I}_n + j \sin \beta l \mathbf{Z}_l \mathbf{Z}_c^{-1} \right]^{-1} \left[\cos \beta l \mathbf{Z}_l + j \sin \beta l \mathbf{Z}_c \right] \mathbf{I}(0) \quad (29)$$

が得られる。ここに, \mathbf{Z}_l は線路端 $x=l$ に接続されている端末回路網を表す n 行 n 列の対称行列である。(29) の $\mathbf{I}(0)$ の係数行列は, $x=0$ において, 線路の $+x$ 方向を見た等価インピーダンス行列を意味する。それをいま $\mathbf{Z}_+(0)$ と書く。すると, $\mathbf{Z}_+(x)$ すなわち, 任意点 x において線路の $+x$ 方向を見た等価インピーダンス行列は, $\mathbf{Z}_+(0)$ の x を $l-x$ で置き換えた,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_+(x) &= \left[\cos \beta (l-x) \mathbf{I}_n + j \sin \beta (l-x) \mathbf{Z}_l \mathbf{Z}_c^{-1} \right]^{-1} \\ &\quad \left[\cos \beta (l-x) \mathbf{Z}_l + j \sin \beta (l-x) \mathbf{Z}_c \right] \end{aligned} \quad (30)$$

で与えられることは容易に理解される。次に (24) 右辺に, 境界条件

$$\mathbf{V}(0) = -\mathbf{Z}_0 \mathbf{I}(0) \quad (31)$$

を代入し, $\mathbf{I}(0)$ を消去すると, $\mathbf{V}(x)$ と $\mathbf{I}(x)$ との関係式

$$\mathbf{V}(x) = - \left[\cos \beta x \mathbf{Z}_0 + j \sin \beta x \mathbf{Z}_c \right] \left[\cos \beta x \mathbf{I}_n + j \sin \beta x \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_0 \right]^{-1} \mathbf{I}(x) \quad (32)$$

を得る。ここに \mathbf{Z}_0 は, 線路端 $x=0$ に接続されている端末回路網を表す n 行 n 列の対称行列である。(31) が成り立つ場合には, $\mathbf{V}(x)$ と $\mathbf{I}(x)$ の関係は, 線路上の任意点 x において, 線路の $-x$ 方向を見た等価インピーダンス行列 $\mathbf{Z}_-(x)$ によって

$$\mathbf{V}(x) = -\mathbf{Z}_-(x) \mathbf{I}(x) \quad (33)$$

と表わせる。したがって (32), (33) より

$$\mathbf{Z}_-(x) = \begin{bmatrix} \cos \beta x \mathbf{Z}_0 + j \sin \beta x \mathbf{Z}_c \\ \left[\cos \beta x \mathbf{I}_n + j \sin \beta x \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_0 \right]^{-1} \end{bmatrix} \quad (34)$$

が得られる。 $\mathbf{Z}_+(x)$, $\mathbf{Z}_-(x)$ は, (25), (28), (31) から, 異なった表示として次のように求めることができる。

$$\mathbf{Z}_+(x) = \begin{bmatrix} \cos \beta (l-x) \mathbf{Z}_l + j \sin \beta (l-x) \mathbf{Z}_c \\ \left[\cos \beta (l-x) \mathbf{I}_n + j \sin \beta (l-x) \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_l \right]^{-1} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\mathbf{Z}_-(x) = \begin{bmatrix} \cos \beta x \mathbf{I}_n + j \sin \beta x \mathbf{Z}_0 \mathbf{Z}_c^{-1} \\ \left[\cos \beta x \mathbf{Z}_0 + j \sin \beta x \mathbf{Z}_c \right]^{-1} \end{bmatrix} \quad (36)$$

(30) と (35) および (34) と (36) が同じ等価インピーダンスを示していることは, 一方の行列と他方の行列の逆行列との行列積が単位行列となることからわかる。(30) と (34) あるいは (35) と (36) を組み合わせて使うことにより, 電流分布を簡潔な形として求めることができる。以下の解析においては, (30) と (34) を用いることにする。

まず, (20) の \mathbf{V}_{SO}^{inc} によって生ずる電流分布を求める。 $x=0$ において一般化された Thevenin の定理^{2),3)}

$$\mathbf{V}(0) = \mathbf{V}_{SO}^{inc} - \mathbf{Z}_0 \mathbf{I}(0) \quad (37)$$

が成り立つ。 $\mathbf{V}(0)$ と $\mathbf{I}(0)$ を知ることができれば, 線路上の任意点の電流は (24) から求まる。ところが $\mathbf{V}(0)$ は $\mathbf{Z}_+(0)$ を用いて

$$\mathbf{V}(0) = \mathbf{Z}_+(0) \mathbf{I}(0) \quad (38)$$

と表わせるから, 結局, 必要なのは $\mathbf{I}(0)$ だけである。 $\mathbf{I}(0)$ は (37) と (38) および (30) から \mathbf{V}_{SO}^{inc} の関数として

$$\mathbf{I}(0) = \mathbf{D}^{-1} [\cos \beta l \mathbf{I}_n + j \sin \beta l \mathbf{Z}_l \mathbf{Z}_c^{-1}] \mathbf{V}_{SO}^{inc} \quad (39)$$

$$\mathbf{D} = \cos \beta l [\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_l] + j \sin \beta l [\mathbf{Z}_c + \mathbf{Z}_l \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_0] \quad (40)$$

と求まる。 $\mathbf{V}(0)$ は (38) から直ちに求まるから, それを $\mathbf{I}(0)$ とともに, (24) に代入すれば,

$$\mathbf{I}(x) = \begin{bmatrix} [\cos \beta x \mathbf{I}_n + j \sin \beta x \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_0] \mathbf{D}^{-1} \\ [\cos \beta l \mathbf{I}_n + j \sin \beta l \mathbf{Z}_l \mathbf{Z}_c^{-1}] - j \sin \beta x \mathbf{Z}_c^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{V}_{SO}^{inc} \quad (41)$$

が得られる。

次に, (21) の \mathbf{V}_{Sl}^{inc} による電流を求める。 $x=l$ において一般化された Thevenin の定理

$$\mathbf{V}(l) = -\mathbf{V}_{Sl}^{inc} + \mathbf{Z}_l \mathbf{I}(l) \quad (42)$$

が成り立つ。また, $\mathbf{V}(l)$ と $\mathbf{I}(l)$ には次の関係

$$\mathbf{V}(l) = -\mathbf{Z}_-(l) \mathbf{I}(l) \quad (43)$$

があるから, $\mathbf{I}(l)$ は (42), (43) から \mathbf{V}_{Sl}^{inc} の関数として

$$\mathbf{I}(l) = [\cos \beta l \mathbf{I}_n + j \sin \beta l \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_0] \mathbf{D}^{-1} \mathbf{V}_{Sl}^{inc} \quad (44)$$

と求まる。(43)から $V(l)$ を求め(44)とともに、(25)に代入すると、任意点 x の電流分布

$$\mathbf{I}(x) = [\cos \beta x \mathbf{I}_n + j \sin \beta x \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_0] \mathbf{D}^{-1} \mathbf{V}_{SI}^{inc} \quad (45)$$

が得られる。

最後に(22)の $d\mathbf{V}_{SI}^{inc}(x)$ による電流は、(41)、(45)を適当に変形することで容易に求めることができる。まず、 $x=u$ にある電圧源 $d\mathbf{V}_{SI}^{inc}(u)$ によって、線路上 $u < x$ なる点 x に現われる電流は、(41)中の x, l, \mathbf{Z}_0 および \mathbf{V}_{SI}^{inc} をそれぞれ、 $x-u, l-u, \mathbf{Z}_-(u)$ および $d\mathbf{V}_{SI}^{inc}(u)$ に置き換えることにより、

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(x) = & \left[[\cos \beta x \mathbf{I}_n + j \sin \beta x \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_0] \mathbf{D}^{-1} \right. \\ & [\cos \beta (l-u) \mathbf{I}_n + j \sin \beta (l-u) \mathbf{Z}_l \mathbf{Z}_c^{-1}] \\ & \left. - j \sin \beta (x-u) \mathbf{Z}_c^{-1} \right] d\mathbf{V}_{SI}^{inc}(u) \end{aligned} \quad (46)$$

と求まる。同様に、 $d\mathbf{V}_{SI}^{inc}(u)$ によって線路上 $x < u$ なる点 x に現われる電流は、(45)中の l, \mathbf{Z}_l および \mathbf{V}_{SI}^{inc} を、それぞれ、 $u, \mathbf{Z}_+(u)$ および $d\mathbf{V}_{SI}^{inc}(u)$ に置き換えて、

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(x) = & [\cos \beta x \mathbf{I}_n + j \sin \beta x \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_0] \mathbf{D}^{-1} \\ & [\cos \beta (l-u) \mathbf{I}_n + j \sin \beta (l-u) \mathbf{Z}_l \mathbf{Z}_c^{-1}] d\mathbf{V}_{SI}^{inc}(u) \end{aligned} \quad (47)$$

と与えられる。

全分布電圧源によって線路上任意点 x に現われる電流は、(41)、(45)、(46)、(47)を重ね合わせて求められる。 $d\mathbf{V}_{SI}^{inc}(x)$ に関しては、(46)を0から x 迄、(47)を x から l 迄、いずれも u について積分する。全電流は次式で与えられる。

$$\mathbf{I}(x) = [-j \sin \beta x \mathbf{Z}_c^{-1} \quad \cos \beta x \mathbf{I}_n] \begin{bmatrix} -\mathbf{Z}_0 \mathbf{I}(0) \\ \mathbf{I}(0) \end{bmatrix} + \hat{\mathbf{I}}_S(x) \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(0) = & \mathbf{D}^{-1} \left[[\cos \beta l \mathbf{I}_n + j \sin \beta l \mathbf{Z}_l \mathbf{Z}_c^{-1}] \mathbf{V}_{SI}^{inc} + \mathbf{V}_{SI}^{inc} \right. \\ & \left. + \int_0^l [\cos \beta (l-u) \mathbf{I}_n + j \sin \beta (l-u) \mathbf{Z}_l \mathbf{Z}_c^{-1}] \mathbf{K}(u) du \right] \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{I}}_S(x) = & -j \sin \beta x \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{V}_{SI}^{inc} \\ & -j \mathbf{Z}_c^{-1} \int_0^x \sin \beta (x-u) \mathbf{K}(u) du \end{aligned} \quad (50)$$

$$\mathbf{K}(u) = \begin{bmatrix} \vdots \\ E_l^{inc}(u, d_i) - E_l^{inc}(u, 0) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (51)$$

(48)~(51)で与えられる電流分布は、Paul が状態変数解析法によって求めた解に全く一致していることがわかる^{2),3)}。

5. 不均質媒質線路への外部電磁界結合

本章では線路導体が誘電体被覆を持つような、線路断面内で線路導体を取り囲む媒質が不均質な場合を取り扱う。線路導体、媒質の損失はともに無視できるものとする。電流分布は、第3章で求めた分布電源の効果の重ね合わせによって第4章で述べた理想的多導体系の場合と全く同様にして求めることができる。

電信方程式は、 $\mathbf{R}=\mathbf{G}=\mathbf{0}_n$ を仮定しているから(23)と全く同じであるが、媒質が不均質であ

るから (4 a) は成り立たず、行列積 \mathbf{CL} は一般の行列となる。しかし、第 2 章で述べたように、ある実行列 \mathbf{T} によって対角行列に相似変換できることが保証されている。そのため、線路端の電圧、電流、 $\mathbf{V}(0)$ 、 $\mathbf{I}(0)$ あるいは $\mathbf{V}(l)$ 、 $\mathbf{I}(l)$ を与えると、線路上任意点 x の電圧、電流は、(24)、(25) に全く対応した形として

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(x) \\ \mathbf{I}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_c \mathbf{T} \cosh \gamma x \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} & -\mathbf{Z}_c \mathbf{T} \sinh \gamma x \mathbf{T}^{-1} \\ -\mathbf{T} \sinh \gamma x \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} & \mathbf{T} \cosh \gamma x \mathbf{T}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(0) \\ \mathbf{I}(0) \end{bmatrix} \quad (52)$$

あるいは

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(x) \\ \mathbf{I}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_c \mathbf{T} \cosh \gamma(l-x) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} & \mathbf{Z}_c \mathbf{T} \sinh \gamma(l-x) \mathbf{T}^{-1} \\ \mathbf{T} \sinh \gamma(l-x) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} & \mathbf{T} \cosh \gamma(l-x) \mathbf{T}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(l) \\ \mathbf{I}(l) \end{bmatrix} \quad (53)$$

と求めることができる³⁾。ここに \mathbf{T} は、 \mathbf{CL} を次のように対角化する n 行 n 列の実相似変換行列である。

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{CL} \mathbf{T} = \mathbf{A}^2 = -\frac{1}{\omega^2} \boldsymbol{\gamma}^2 \quad (54)$$

ここに、 \mathbf{A}^2 は \mathbf{CL} の固有値 $\lambda_i^2 (i=1, \dots, n)$ を主対角要素に持つ n 行 n 列の対角行列である。 $\boldsymbol{\gamma}$ もまた対角行列であり、その主対角要素は、 $\gamma_{ii} = \sqrt{-\omega^2 \lambda_i^2}$ である。相似変換行列 \mathbf{T} は、 λ_i^2 に対応する \mathbf{CL} の n 個の固有ベクトルで構成される。行列双曲線関数 $\cosh \gamma x$ 、 $\sinh \gamma x$ は、次のように定義される。

$$\cosh \gamma x = \frac{1}{2} \left[e^{\gamma x} + e^{-\gamma x} \right] \quad (55 a)$$

$$\sinh \gamma x = \frac{1}{2} \left[e^{\gamma x} - e^{-\gamma x} \right] \quad (55 b)$$

ここに $e^{\gamma x}$ ($e^{-\gamma x}$) は、 $\exp(\gamma_{ii} x)$ ($\exp(-\gamma_{ii} x)$) を主対角要素に持つ、 n 行 n 列の対角行列である。したがって $\cosh \gamma x$ 、 $\sinh \gamma x$ もまた対角行列である。最後に \mathbf{Z}_c は

$$\mathbf{Z}_c = \left[j\omega \mathbf{C} \right]^{-1} \mathbf{T} \boldsymbol{\gamma} \mathbf{T}^{-1} = j\omega \mathbf{L} \mathbf{T} \boldsymbol{\gamma}^{-1} \mathbf{T}^{-1} \quad (56)$$

で与えられる。

等価インピーダンス行列 $\mathbf{Z}_+(x)$ 、 $\mathbf{Z}_-(x)$ は、(52) あるいは (53) と線路端境界条件 (28)、(31) から (30)、(34)、(35)、(36) に対応して以下の 4 式のように求めることができる。

$$\mathbf{Z}_+(x) = \left[\mathbf{Z}_c \mathbf{T} \cosh \gamma(l-x) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} + \mathbf{Z}_l \mathbf{T} \sinh \gamma(l-x) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_l \mathbf{T} \cosh \gamma(l-x) \mathbf{T}^{-1} + \mathbf{Z}_c \mathbf{T} \sinh \gamma(l-x) \mathbf{T}^{-1} \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\mathbf{Z}_-(x) = \left[\mathbf{Z}_c \mathbf{T} \cosh \gamma x \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_c \mathbf{T} \sinh \gamma x \mathbf{T}^{-1} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{T} \cosh \gamma x \mathbf{T}^{-1} + \mathbf{T} \sinh \gamma x \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_0 \end{bmatrix}^{-1} \quad (58)$$

または、

$$\mathbf{Z}_+(x) = \left[\mathbf{Z}_c \mathbf{T} \cosh \gamma(l-x) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_c \mathbf{T} \sinh \gamma(l-x) \mathbf{T}^{-1} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{T} \cosh \gamma(l-x) \mathbf{T}^{-1} + \mathbf{T} \sinh \gamma(l-x) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_l \end{bmatrix}^{-1} \quad (59)$$

$$\mathbf{Z}_-(x) = \left[\mathbf{Z}_c \mathbf{T} \cosh \gamma x \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} + \mathbf{Z}_0 \mathbf{T} \sinh \gamma x \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \right]^{-1} \\ \left[\mathbf{Z}_0 \mathbf{T} \cosh \gamma x \mathbf{T}^{-1} + \mathbf{Z}_c \mathbf{T} \sinh \gamma x \mathbf{T}^{-1} \right] \quad (60)$$

(57) と (59) あるいは, (58) と (60) が同じ等価インピーダンス行列を表わしていることは, (30) と (35) および, (34) と (36) の場合と同様にして知ることができる。以下の解析においては, (57) と (58) を用いることにする。

電流分布についても, 第4章と全く同様の手順によって求めることができる。まず(20)の \mathbf{V}_{S0}^{inc} によって線路上任意点に現われる電流は, (37), (38), (52), (57) から, (41) に対応して,

$$\mathbf{I}(x) = \left[\mathbf{T} \cosh \gamma x \mathbf{T}^{-1} + \mathbf{T} \sinh \gamma x \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_0 \right] \mathbf{E}^{-1} \\ \left[\mathbf{Z}_c \mathbf{T} \cosh \gamma l \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} + \mathbf{Z}_l \mathbf{T} \sinh \gamma l \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \right] - \mathbf{T} \sinh \gamma x \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \right] \mathbf{V}_{S0}^{inc} \quad (61)$$

また \mathbf{E} は (40) に対応して,

$$\mathbf{E} = \mathbf{Z}_c \mathbf{T} \cosh \gamma l \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_l \mathbf{T} \cosh \gamma l \mathbf{T}^{-1} \\ + \mathbf{Z}_c \mathbf{T} \sinh \gamma l \mathbf{T}^{-1} + \mathbf{Z}_l \mathbf{T} \sinh \gamma l \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_0 \quad (62)$$

と与えられる。

次に (21) の \mathbf{V}_{Sl}^{inc} による電流は, (42), (43), (53), (58) から, (45) に対応するものとして

$$\mathbf{I}(x) = \left[\mathbf{T} \cosh \gamma x \mathbf{T}^{-1} + \mathbf{T} \sinh \gamma x \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_0 \right] \mathbf{E}^{-1} \mathbf{V}_{Sl}^{inc} \quad (63)$$

と求まる。

最後に, (22) の $d\mathbf{V}_S^{inc}(x)$ の線路電流への寄与は, $x=u$ にある電圧源 $d\mathbf{V}_S^{inc}(u)$ によるものとして, $u < x$ なる x に対しては, (46) に対応して,

$$\mathbf{I}(x) = \left[\mathbf{T} \cosh \gamma x \mathbf{T}^{-1} + \mathbf{T} \sinh \gamma x \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_0 \right] \mathbf{E}^{-1} \\ \left[\mathbf{Z}_c \mathbf{T} \cosh \gamma(l-u) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} + \mathbf{Z}_l \mathbf{T} \sinh \gamma(l-u) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \right] \\ - \mathbf{T} \sinh \gamma(x-u) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \right] d\mathbf{V}_S^{inc}(u) \quad (64)$$

$x < u$ なる x に対しては, (47) に対応して

$$\mathbf{I}(x) = \left[\mathbf{T} \cosh \gamma x \mathbf{T}^{-1} + \mathbf{T} \sinh \gamma x \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_0 \right] \mathbf{E}^{-1} \\ \left[\mathbf{Z}_c \mathbf{T} \cosh \gamma(l-u) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} + \mathbf{Z}_l \mathbf{T} \sinh \gamma(l-u) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \right] d\mathbf{V}_S^{inc}(u) \quad (65)$$

と与えられる。全ての電圧源による電流は, (61), (63), (64), (65) 重ね合わせることによって, (48) ~ (50) に対応するものとして,

$$\mathbf{I}(x) = \left[-\mathbf{T} \sinh \gamma x \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \quad \mathbf{T} \cosh \gamma x \mathbf{T}^{-1} \right] \begin{bmatrix} -\mathbf{Z}_0 \mathbf{I}(0) \\ \mathbf{I}(0) \end{bmatrix} + \hat{\mathbf{I}}_S(x) \quad (66)$$

$$\mathbf{I}(0) = \mathbf{E}^{-1} \left[\mathbf{Z}_c \mathbf{T} \cosh \gamma l \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} + \mathbf{Z}_l \mathbf{T} \sinh \gamma l \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \right] \mathbf{V}_{S0}^{inc} + \mathbf{V}_{Sl}^{inc} \\ + \int_0^l \left[\mathbf{Z}_c \mathbf{T} \cosh \gamma(l-u) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} + \mathbf{Z}_l \mathbf{T} \sinh \gamma(l-u) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \right] \mathbf{K}(u) \, du \quad (67)$$

$$\hat{\mathbf{I}}_S(x) = -\mathbf{T} \sinh \gamma x \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{V}_{S0}^{inc} \\ - \int_0^x \mathbf{T} \sinh \gamma(x-u) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_c^{-1} (\mathbf{K})(u) \, du \quad (68)$$

と求まる。(66)~(68)は(48)~(50)と、電圧源の係数行列に媒質の不均質性が含まれている点異なるだけで、形式上は全く同じになっている。実際、(66)~(68)に媒質均質の条件を付加すると、 $\mathbf{r}=(j\omega\sqrt{\mu\epsilon})\mathbf{I}_n$ となり、(48)~(50)に全く一致することがわかる。

6. あとがき

電磁環境下における多導体伝送線路理論として、理想的多導体系と無損失な不均質媒質線路への外部電磁界結合問題について考察を行なった。解析方法は、2導体線路問題におけるSmithの方法を多導体線路へ拡張したものであり、外部電磁界の線路への影響を、独立した分布電源として評価し、初等的な電気回路理論の立場から問題をとらえ、Theveninの定理と重ね合わせの理という基本概念をよりどころとして解析を進めた。その結果、線路に誘起する電流を、媒質の均質、不均質に関わりなく、全く同様の手法で求めることができた。

参 考 文 献

- 1) C. D. Taylor, R. S. Satterwhite and C. W. Harrison: IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-13 (1965), pp. 987-989.
- 2) C. R. Paul: IEEE Trans. Electromag. Compact., vol. EMC-18 (1976), pp. 183-190.
- 3) C. R. Paul: Tech. Rep. RADC-TR-76-101, vol. I, Rome Air Development Center, Griffis AFB, NY (1976).
- 4) K. S. H. Lee: IEEE Trans. Electromag. Compat., vol. EMC-20 (1978), pp. 288-296.
- 5) C. W. Harrison, Jr.: IEEE Trans. Electromag. Compat., vol. EMC-14 (1972), pp. 56-63.
- 6) C. D. Taylor and J. P. Castillo: IEEE Trans. Electromag. Compat., vol. EMC-20 (1978), pp. 495-500.
- 7) A. A. Smith, Jr.: Coupling of external electromagnetic fields to transmission lines, (1977), New York Wiley.
- 8) C. R. Paul: IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-21 (1973), pp. 556-558.
- 9) 永井信夫: 信学論 (B), 60-B (昭52), 5, pp. 305-312.