HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Riemann幾何学モデルによるある錯視について
Author(s)	山ノ井, 高洋; 工藤, 司; 成田, 雅博 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 100, 107-112
Issue Date	1980-10-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41632
Type	departmental bulletin paper
File Information	100_107-112.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第100号（昭和55年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 100 (1980)

Riemann 幾何学モデルによるある錯視について

山ノ井高洋* 工藤 司** 成田雅博* 河口至商*

（昭和55年6月30日受理）

On some visual illusions as a model of Riemannian geometry

Takahiro YAMANOI, Tsukasa KUDO, Masahiro NARITA
and Michiaki KAWAGUCHI

(Received June 30, 1980)

Abstract

Some visual space involving illusions are discussed from the point of Riemannian geometry. Assuming that each local visual space is furnished with paralell line fields, Riemannian metric in visual space of concentric circles and of radial lines is obtained. By this metric tensor, the equations of geodesics are derived, and solved numerically. Further, Riemann-Christoffel curvature of the visual space is determined.

Consequently, a straight line in this visual space is considered to be one of the geodesics in Riemannian spaces.

1. 緒　　言

二次元，三次元の空間内における光の時間空間的に変化するパターンに対する視覚反応は視知覚反応と呼ばれる。このパターンは種々多様に変化するので，視知覚の起っている空間，視空間を統一的に捉えることは非常に困難である。このうちの錯視図形に関しては，その発見者の名が付された研究がある。その中に Köhler[1] らにより視知覚の場 (field) の仮説が導入されたものがあり，それ以来，横瀬[2]による光刺激閾法，本川[3]の電気閃光法（ζ-法）による現象的な研究がなされた。理論的な面からは，網膜視神経の側抑制効果から藤井ら[4]による Müller-Lyer 錯視図形の相互抑制モデル，川端[5]による視知覚場ポテンシャルの関数としての距離の研究がある。しかしながら両者は視神経の抑制作用にのみ注目し，視知覚全体を統一的に捉えてはいない。

我々は視覚による心理物理的認識過程を1つの幾何学的変換とみなし統一的に論ずる。この立場から，これまでに等間隔平行線場の視空間の indicatrix について考察してきた[6,7,8]。しかしながら我々の眺める視空間は必ずしも一様な場であるとは限らない。本研究では，さらに同心円模様・放射線模様の場について先の結果に基づいて考察し，視空間において直線と認識されるものは Riemann 的視空間の測地線として捉えられる事を具体的に示す。

2. 視空間と物理空間との局所的対応

同心円模様並びに放射線模様の場合においては，任意の1点の近傍について考える限り模様は

* 情報工学専攻　情報数理工学第一講座
** 三菱電機　中央研究所

平行線であると考えてよい。したがって視空間中の各点においてその近傍に等間隔平行線場と同様な indicatrix を仮定できる。以下視空間とは同心円模様並びに放射線模様の場合に限る。

視空間において曲線座標系を，物理空間において直交座標系をとる。視空間の1点 P において局所座標系を考え物理空間の局所座標系を X^1, X^2 とすれば，視空間の indicatrix の方程式は物理空間の局所座標を用いて

$$(X^1)^2+k^2(X^2)^2=1 \tag{2・1}$$

で表わされる。ここで，この indicatrix は非常に小さなものと考えて，$X^1\equiv du^1$, $X^2\equiv du^2$ とおく。また X^1 軸の方向は模様の線の接方向である。

さらに X^1, X^2 は点 P における局所座標と考えているので一般には global な座標の線素 (dx^1, dx^2) とは方向が異なる。したがって dx^i と du^i $(i=1, 2)$ の関係は x^1 軸から du^1 への回転角を α と置いて

$$\left.\begin{aligned} X^1\equiv\ du^1&=dx^1\cos\alpha+dx^2\sin\alpha\\ X^2\equiv\ du^2&=-dx^1\sin\alpha+dx^2\cos\alpha\end{aligned}\right\} \tag{2・2}$$

となる。(2・2) 式を (2・1) 式に代入して整理すると，indicatrix の方程式は

$$\{(dx^1)^2+k^2(dx^2)^2\}\cos^2\alpha+\{k^2(dx^1)^2+(dx^2)^2\}\sin^2\alpha+2(1-k^2)dx^1dx^2\cos\alpha\sin\alpha=1 \tag{2・3}$$

と表わせる (図-1)。各接空間においてこの方程式は成り立っている。しかしながら模様の線の接方向は各点で異なるので (2.3) 式の α は global な座標 (x^1, x^2) の関数である。また k も線の密度によるので (x^1, x^2) の関数と考えられる。

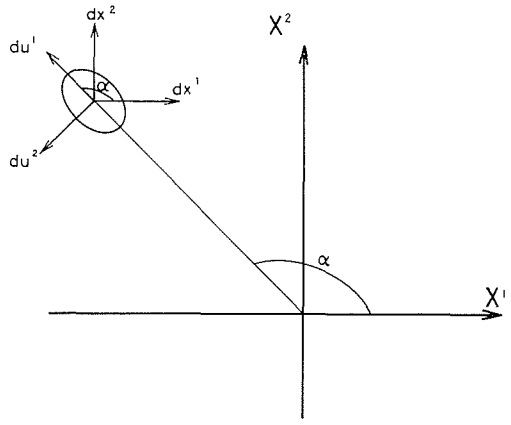

図-1 局所的な indicatrix

α については，同心円模様の場合は同心円の中心を原点とする直交座標系 (x^1, x^2) を用いて

$$\cos\alpha=\frac{-x^2}{\{(x^1)^2+(x^2)^2\}^{1/2}},\qquad \sin\alpha=\frac{x^1}{\{(x^1)^2+(x^2)^2\}^{1/2}} \tag{2・4}$$

と表わすことができ，放射線模様の場合は直線群の交点を原点とする直交座標系 (x^1, x^2) を用いて

$$\cos\alpha=\frac{x^1}{\{(x^1)^2+(x^2)^2\}^{1/2}},\qquad \sin\alpha=\frac{x^2}{\{(x^1)^2+(x^2)^2\}^{1/2}} \tag{2.5}$$

と表わせる。したがって (2・3) 式に (2・4) 式を代入することにより，同心円模様の場合の indicatrix の方程式は

$$(x^1)^2\{k^2(dx^1)^2+(dx^2)^2\}+(x^2)^2\{(dx^1)^2+k^2(dx^2)^2\}+2(k^2-1)x^1x^2dx^1dx^2=(x^1)^2+(x^2)^2 \tag{2・6}$$

となる。また放射線模様の場合の indicatrix の方程式は (2・3) 式と (2・5) 式から同様に

$$(x^1)^2\{(dx^1)^2+k^2(dx^2)^2\}+(x^2)^2\{k^2(dx^1)^2+(dx^2)^2\}+2(1-k^2)x^1x^2dx^1dx^2=(x^1)^2+(x^2)^2$$

と表わせる。

3. 視空間の基本計量関数と計量テンソル

我々は視空間が局所的には Minkowski 空間であるとの立場から議論を進めて indicatrix の方程式を導びいた。以下ではこれを基に視空間の計量的性質について論じる。

一般に，indicatrix の方程式が $f(x^i, dx^i)=0$ と与えられている場合に基本計量関数 L を求めるには，dx^i の斉次性により dx^i を dx^i/L で置き換えて $f(x^i, dx^i/L)=0$ を L について解けばよい事が知られている。

同心円模様の場合の基本計量関数を (2・6) 式より求めると

$$L^2=\frac{(x^1)^2\{k^2(dx^1)^2+(dx^2)^2\}+(x^2)^2\{(dx^1)^2+k^2(dx^2)^2\}+2(k^2-1)x^1x^2dx^1dx^2}{(x^1)^2+(x^2)^2}$$

となる。ここで $dx^i\equiv y^i$ $(i=1, 2)$ とおいて

$$L^2=\frac{\{k^2(x^1)^2+(x^2)^2\}(y^1)^2+\{(x^1)^2+k^2(x^2)^2\}(y^2)^2+2(k^2-1)x^1x^2y^1y^2}{(x^1)^2+(x^2)^2} \tag{3・1}$$

を得る。基本計量関数により計量テンソル g_{ij} $(i, j=1, 2)$ は

$$g_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2L^2}{\partial y^i\partial y^j} \tag{3・2}$$

で与えられる。したがってこの場合の計量テンソルは (3・1) 式と (3・2) 式から

$$g_{11}=\frac{k^2(x^1)^2+(x^2)^2}{(x^1)^2+(x^2)^2},\quad g_{12}=g_{21}=\frac{(k^2-1)x^1x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2},\quad g_{22}=\frac{(x^1)^2+k^2(x^2)^2}{(x^1)^2+(x^2)^2} \tag{3・3}$$

となり，y^i が消えてしまうから Riemann 計量である。

同様に放射線模様の場合の基本計量関数は

$$L^2=\frac{\{(x^1)^2+k^2(x^2)^2\}(y^1)^2+\{k^2(x^1)^2+(x^2)^2\}(y^2)^2+2(1-k^2)x^1x^2y^1y^2}{(x^1)^2+(x^2)^2}$$

であるから計量テンソルは

$$g_{11}=\frac{(x^1)^2+k^2(x^2)^2}{(x^1)^2+(x^2)^2},\quad g_{12}=g_{21}=\frac{(1-k^2)x^1x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2},\quad g_{22}=\frac{k^2(x^1)^2+(x^2)^2}{(x^1)^2+(x^2)^2} \tag{3・4}$$

なる Riemann 計量テンソルとして得られる。

さらに k については，等間隔平行線模様の場において模様となる線の密度は各点において一様であるとした。しかし同心円・放射線模様の場合には，線の密度は一様ではなく模様の中心から離れるにしたがい疎となる。したがって無限遠で $k=1$ (模様の効果はない)，中心で $k=\infty$ の値をとる関数として，定数 A, B, C を用いて

$$k=\mathrm{B}\cdot\coth\left[\frac{\{(x^1)^2+(x^2)^2\}^{1/2}}{\mathrm{A}}\right]+\mathrm{C} \tag{3・5}$$

と仮定する。(3・3) 式に (3・5) 式を代入して同心円の場合の計量テンソルは

$$\left.\begin{aligned}
g_{11}&=\frac{(x^1)^2\coth^2\left[\dfrac{\{(x^1)^2+(x^2)^2\}^{1/2}}{\mathrm{A}}\right]+(x^2)^2}{(x^1)^2+(x^2)^2},\\
g_{12}=g_{21}&=\frac{\left(\coth^2\left[\dfrac{\{(x^1)^2+(x^2)^2\}^{1/2}}{\mathrm{A}}\right]-1\right)x^1x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2},\\
g^{22}&=\frac{(x^1)^2+(x^2)^2\coth^2\left[\dfrac{\{(x^1)^2+(x^2)^2\}^{1/2}}{\mathrm{A}}\right]}{(x^1)^2+(x^2)^2}
\end{aligned}\right\} \tag{3・6}$$

となり，同様に放射線の場合の計量テンソルは (3・4) 式に (3・5) 式を代入することになり

$$\left.\begin{aligned} g_{11}&=\frac{(x^1)^2+(x^2)^2\coth^2\left[\dfrac{\{(x^1)^2+(x^2)^2\}^{1/2}}{\mathrm{A}}\right]}{(x^1)^2+(x^2)^2},\\ g_{12}=g_{21}&=\frac{\left(1-\coth^2\left[\dfrac{\{(x^1)^2+(x^2)^2\}^{1/2}}{\mathrm{A}}\right]\right)x^1x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2},\\ g_{22}&=\frac{(x^1)^2\coth^2\left[\dfrac{\{(x^1)^2+(x^2)^2\}^{1/2}}{\mathrm{A}}\right]+(x^2)^2}{(x^1)^2+(x^2)^2}\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot7)$$

と導ける。ただし B=1, C=0 とする。

4. 視空間における直線

接空間の indicatrix を楕円と仮定する事により視空間の Riemann 計量テンソルが導出できた。この計量をもとに視空間を Riemann 幾何学的に捉えることが可能である。(2・6) 式，(2・7) 式の indicatrix はそれぞれの視空間において円と認識される。これから導びいた計量テンソルによって2つの視空間を考察する。物理空間の座標によって視空間を Riemann 幾何学的に見ると，視空間での直線はこの Riemann 空間の測地線として認識されている。したがって視空間で直線と見える線の方程式は，Riemann 空間の測地線の方程式より，第2種の Christoffel の記号 $\left\{\begin{matrix} i \\ jl \end{matrix}\right\}$ を用いて

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\left\{\begin{matrix} i \\ jl \end{matrix}\right\}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^l}{ds}=0\qquad(i,j,l=1,2)\qquad(4\cdot1)$$

と表わされる。ただし s は弧長のパラメータを表わし，第2種の Christoffel の記号は第1種の Christoffel の記号 $[jl,h]$ を用いると

$$\left\{\begin{matrix} i \\ jl \end{matrix}\right\}=g^{ih}[jl,\ h]=\frac{1}{2}g^{ih}\left(\frac{\partial g_{hl}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^l}-\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^h}\right)\qquad(i,j,l,h=1,2)\qquad(4\cdot2)$$

であり，また g^{ih} は計量テンソル g_{ij} と

$$g^{ih}g_{ij}=\delta^h_j\qquad(i,j,h=1,2)$$

なる関係がある。ここでは指標に関して Einstein の規約を適用する。

同心円の場合の測地線の方程式は (3・6)，(4・1)，(4・2) 式を用いて

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{1}{k^2d^2}\Bigg[&\left\{kD(x^3y^2+x^5)-\frac{k^2-1}{d}(x^3y^2+xy^4)\right\}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\\&+\left(\frac{k^2-1}{d}-kD\right)(x^4y+x^2y^3)\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{dy}{ds}\right)\\&+\left\{kD(x^3y^2+xy^4)-\frac{k^2-1}{d}(x^5+x^3y^2)\right\}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\Bigg]\end{aligned}\qquad(4\cdot3)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{ds^2}=\frac{1}{k^2d^2}\Bigg[&\left\{kD(x^4y+x^2y^3)-\frac{k^2-1}{d}(x^2y^3+y^5)\right\}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\\&+\left(\frac{k^2-1}{d}-kD\right)(x^3y^2+xy^4)\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{dy}{ds}\right)\\&+\left\{kD(x^2y^3+y^5)-\frac{k^2-1}{d}(x^4y+x^2y^3)\right\}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\Bigg]\end{aligned}\qquad(4\cdot4)$$

となる。ただし，$x=x^1$，$y=x^2$，$D=(d^{1/2}\sinh^2 d^{1/2})^{-1}$，$d=(x^1)^2+(x^2)^2$ である。

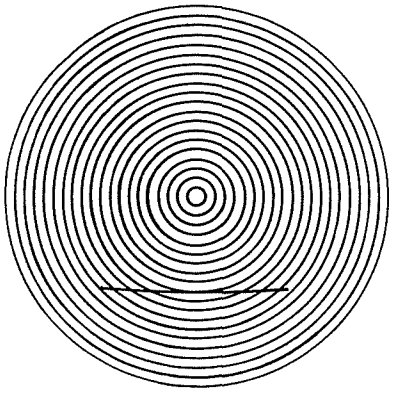

図-2 同心円模様の場の測地線

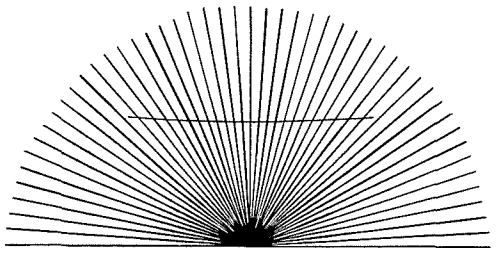

図-3 放射線模様の場の測地線

同様に放射線模様の場合の測地線の方程式は (3・7), (4・1), (4・2) 式より

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{1}{d^2}\left[\left\{\frac{k^2-1}{d}(x^3y^2+xy^4)-kD(x^3y^2+x^5)\right\}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(kD-\frac{k^2-1}{d}\right)(x^4y+x^2y^3)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\left\{\frac{k^2-1}{d}(x^5+x^3y^2)-kD(x^3y^2+xy^4)\right\}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right] \tag{4・5}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}=\frac{1}{d^2}\left[\left\{\frac{k^2-1}{d}(x^2y^3+y^5)-kD(x^4y+x^2y^3)\right\}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(kD-\frac{k^2-1}{d}\right)(x^3y^2+xy^4)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\left\{\frac{k^2-1}{d}(x^4y+x^2y^3)-kD(x^2y^3+y^5)\right\}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right] \tag{4・6}$$

と導ける。(4・3) 式と (4・4) 式, (4・5) 式と (4・6) 式の 2 階連立常微分方程式を Runge-Kutta-Gill 法を用い, $x=5.0$, $y=0.0$, $dx/ds=\pm1.0$, $dy/ds=0.0$ および $x=3.0$, $y=0.0$, $dx/ds=\pm1.0$, $dy/ds=0.0$ なるそれぞれの初期条件のもとで数値解を求め $X-Y$ プロッタにより図示したものが, 図-2, 図-3 である。

なおこれらの視空間の Riemann-Christoffel 曲率は

$$R_{hijl}=\frac{\partial}{\partial x^j}[il,h]-\frac{\partial}{\partial x^l}[ij,h]+[hl,a]\left\{\begin{matrix}a\\ij\end{matrix}\right\}-[hj,a]\left\{\begin{matrix}a\\il\end{matrix}\right\}\qquad(h,i,j,l,a=1,2)$$

と与えられる。2 次元 Riemann 空間の場合に本質的なのはこれらの曲率のうち R_{2112} のみである。同心円・放射線模様の場合, それぞれにこれを求めると前者の場合は $R_{2112}=D/k$, 後者の場合は $R_{2112}=D^2k^4/K-(k^2+1)kD$ となる。ただし $K\equiv(k^2-1)/d$, $D\equiv Kd^{1/2}/A$ である。

5. 結　　言

同心円模様・放射線模様の場合の視空間を等間隔平行線模様の場合の拡張であると見なして, 局所的な indicatrix を仮定し Riemann 的視空間を構成した。測地線の方程式を求め, ある初期条件のもとでの数値解を得た。結論として視空間において直線と認識されるものは, この Riemann 空間では測地線となることが言える。しかしながら一般には視空間の indicatrix はこのように単純なものだけとは限らない。他の場合の indicatrix から導いた計量による視空間の解析が今後の

課題である。

この研究にあたって多くの御助言を賜った本学新保勝教授，佐藤義治助手に深く感謝致します。なお，数値計算は本学情報工学計算センター ECLIPSE を用いた。

参 考 文 献

1) KÖHLHR, W. & WALLACH, H.: Proc. Amer. Philos. Soc,, 88 (1944), p. 269.
2) 横瀬善正：視覚の心理学，(1956)，共立出版.
3) 本川弘一：大脳生理学，(1964)，中山書店.
4) 藤井克彦・松岡　章・森田竜弥：医用電子と生体工学，5 (1967)，2，p. 117.
5) KAWABATA, N.: I. E. E. E. TRANSACTIONS, SMC-6 (1976), 12, p. 818.
6) 河口至商・山ノ井高洋・工藤　司・水田正弘・松井　茂：多変量解析研究会研究報告，9 (1979).
7) 河口至商・山ノ井高洋・工藤　司・新保　勝：電子通信学会情報・システム部門全国大会論文集，(1979)，p. 173.
8) 河口至商・山ノ井高洋・工藤　司・新保　勝：北大工学部研究報告，97 (1980)，p. 83.