



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	体積型位相ホログラムの再生像の角度および波長選択性
Author(s)	章, 恩耀; 石井, 行弘; 村田, 和美
Citation	北海道大學工學部研究報告, 100, 73-85
Issue Date	1980-10-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41633
Type	departmental bulletin paper
File Information	100_73-86.pdf



体積型位相ホログラムの再生像の角度および波長選択性

章 恩 耀** 石 井 行 弘* 村 田 和 美*

(昭和 55 年 6 月 30 日受理)

Angular and Wavelength Sensitivity of Image Reconstructed from Volume Phase Hologram

En Yao ZHANG, Yukihiro ISHII and Kazumi MURATA

(Received June 30, 1980)

Abstract

The angular and wavelength sensitivity in the reconstructed image of a volume phase hologram are studied in terms of Kirchhoff diffraction integral. The Bragg conditions are described when the thickness of dichromated gelatin hologram is increased after exposure. The angular and wavelength sensitivities of the illuminating and diffracting waves are calculated and evaluated.

1. は じ め に

重クロム酸ゼラチン (DCG)¹⁾はホログラム感光材料として用いた場合、銀塩感光材料にくらべて回折効率が低い、透明度がよい、分解能が高い、雑音が少ない、そして繰り返し現像することができるなどの利点があるので、すぐれた感光材料である。DCG は反射型ボリュームホログラムに広汎に應用されており、ディスプレイ用感光材料として実用されている。

一方、いろいろな原因により、例えば体積型ホログラムの再生像光の波長選択性と角度選択にひろがりがあるため、再生像がぼける。また再生光源とする白色光源の広がりも像ぼけの原因となる。このほか、一般に DCG ホログラムの現像処理により乳剤の厚みが増して干渉縞の方向と間隔が変化するため、再生像の波長選択性と角度選択性に対して、大きな影響をもたらす。本研究は再生照明光の Bragg の条件を満足する入射角度からのずれがあり、さらに DCG ホログラムの現像処理により乳剤の厚みが増す場合²⁾について、Bragg 角度 (ϕ')、再生像光の波長選択性 ($\Delta\lambda$)、再生像光の角度選択性 ($\Delta\theta_i$) の許容範囲を Kirchhoff 回折積分より^{3,4)}検討したものである。

2. 反射型ボリュームホログラムの形成

まず反射型ボリュームホログラムの形成を考える。乳剤の一つの断面をとり、図 1 に示すように座標系の原点は乳剤の中心にあるとする、 X 軸は乳剤面に垂直、 Y 軸は乳剤面に平行とする。一般に任意の物体の回折波は方向の異なる平面波の合成となり、その一つの成分の解析を行う場合を考える。いま物体光、参照光をすべて平面波とし、それらの波面が Z 軸に平行になるとす

* 応用物理学科 応用光学講座

** 工学部研究生 (中国清華大学より留学中)

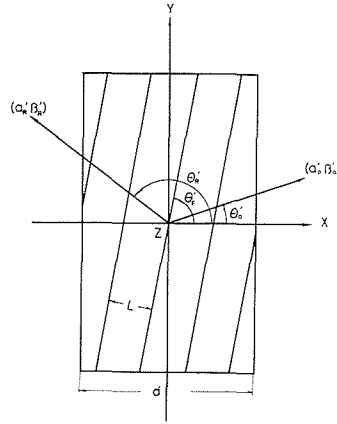


図1 反射型ボリュームホログラムの記録

る。また乳剤の屈折率を n 、厚さを d 、そして乳剤内外の物体光、参照光の方向余弦をそれぞれ (α'_o, β'_o) , (α'_R, β'_R) , (α_o, β_o) , (α_R, β_R) とおき、乳剤内での物体光、参照光の X 軸となす角度を θ'_o , θ'_R とすると

$$\begin{cases} \alpha'_o = \cos \theta'_o & \alpha'_R = \cos \theta'_R \\ \beta'_o = \sin \theta'_o & \beta'_R = \sin \theta'_R \end{cases} \quad (1)$$

と書ける。また物体光と参照光は次の式のように表わすことができる。

$$\begin{cases} A'_o = a_o \exp[ik'(\alpha'_o x + \beta'_o y)] \\ A'_R = a_R \exp[ik'(\alpha'_R x + \beta'_R y)] \end{cases} \quad (2)$$

ただし a_o , a_R は振幅、 k' は波数で、 $k' = 2\pi/\lambda'$ 、 λ' は乳剤中の波長とする。物体光と参照光の乳剤外の方角余弦と波数との関係は屈折の法則により

$$\begin{cases} \alpha_o = \sqrt{n^2 \alpha'^2_o - n^2 + 1}, & \beta_o = n\beta'_o \\ \alpha_R = \sqrt{n^2 \alpha'^2_R - n^2 + 1}, & \beta_R = n\beta'_R, & k = \frac{k'}{n} \end{cases} \quad (3)$$

となる。反射型ボリュームホログラムとは図1のごとく物体光と参照光をそれぞれ乾板の表および裏から入射させて記録する三次元ホログラムである。乳剤内の物体光と参照光の干渉による干渉縞の強度分布は

$$I(x, y) = |A'_o + A'_R|^2 = a_o^2 + a_R^2 + 2a_o a_R \cos\{k'[(\alpha'_R - \alpha'_o)x + (\beta'_R - \beta'_o)y]\} \quad (4)$$

となる。この式を見れば干渉縞の X 方向と Y 方向の空間周波数はそれぞれ

$$f'_x = \frac{\alpha'_R - \alpha'_o}{\lambda'}, \quad f'_y = \frac{\beta'_R - \beta'_o}{\lambda'} \quad (5)$$

であることがわかる。また干渉縞の間隔は

$$L = \frac{1}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}} = \frac{\lambda'}{\sqrt{(\alpha'_R - \alpha'_o)^2 + (\beta'_R - \beta'_o)^2}} \quad (6)$$

となる。(4) 式によって

$$k'[(\alpha'_R - \alpha'_o)x + (\beta'_R - \beta'_o)y] = 2m\pi \quad (m: \text{整数}) \quad (7)$$

の条件を満たすところに明るい縞ができる。(7) 式は直線群（実際は XY 面に垂直な面の群である）を示す。この直線群の X 軸となす角度 θ'_R の勾配は (7) 式より

$$\tan \theta'_F = -\frac{\alpha'_R - \alpha'_o}{\beta'_R - \beta'_o} = \tan \frac{\theta'_R + \theta'_o}{2} \quad (8)$$

となる。即ち干渉縞の X 軸となす角度 θ'_F は $(\theta'_R + \theta'_o)/2$ である。いま (4) 式の示すような干渉縞の強度分布を DCG を用いて記録する。DCG の感光特性によって入射光の強度が屈折率の変化に変換されるので位相型ホログラムになる。現像された DCG ホログラムの複素振幅透過率は

$$T_a = \exp[i\phi] = \exp[i(\phi_o + \Delta\phi)] = \exp[i(\phi_o + \mu I(x, y))] \quad (9)$$

と書ける。ただし ϕ_o は未露光部分の一定の位相、 $\Delta\phi$ は露光によって生じる位相変調である。DCG ホログラムの位相変調 $\Delta\phi$ と露光量 I (t は露光時間) の間に図 2 のような関係がある^{6,7)}。露光量のある範囲において位相変調 $\Delta\phi$ と露光量 I はほぼ線型関係があるので露光時間 t を一定とし、比例定数を μ とすると、 $\Delta\phi = \mu I(x, y)$ と書ける。

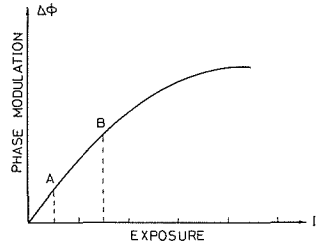


図 2 露光量の関数としての DCG ホログラムの位相変調幅 $\Delta\phi$. AB は線形な領域を示す。

3. 反射型ポリュームホログラムの像再生

つぎにポリュームホログラムの再生像光の振幅分布の計算を行う。また再生照明光も平面波とし、その乳剤での再生時の波数を k'_c 、方向余弦を α'_c 、 β'_c とすると、再生照明光は

$$A'_c = a_c \exp[ik'_c(\alpha'_c x + \beta'_c y)] \quad (10)$$

と書ける。さらに乳剤内での微小面素 S_m を考えると、この微小面素の再生像光の光分布は

$$dA_s = A'_c \exp(i\phi) dxdy = A'_c \exp[i(\phi_o + \mu I(x, y))] dxdy \quad (11)$$

で表わすことができる。また図 3 の如く観測点を $Q(x_1, y_1)$ 、観測光の方向余弦を α'_i 、 β'_i とし、面素 S_m から観測点 $Q(x_1, y_1)$ までの回折波は

$$dA_q = \frac{dA_s}{r_i} \exp(i\vec{k}'_c \cdot \vec{r}) = \frac{A'_c \exp\{i[\phi_o + \mu I(x, y)]\}}{r_i} \cdot \exp\{ik'_c[(x_1 - x) \cos \theta'_m + (y_1 - y) \sin \theta'_m]\} dxdy \quad (12)$$

で与えられる。ただし r_i は面素 S_m から観測点 $Q(x_1, y_1)$ までの距離、 θ'_m は r_i の X 軸となす角度である。この場合、各微小面素 S_m による回折は小さく、各面素へ入射する再生照明光は等しいとする。もし観測点から乾板までの距離が十分長いとすれば r_i 、 $\cos \theta'_m$ 、 $\sin \theta'_m$ の代りに r 、 α'_i 、 β'_i を使っても差し支えない。ただし r は観測点から座標原点までの距離、 (α'_i, β'_i) は観測点の方向余弦である。この場合に (12) 式は

$$dA_q = \frac{A'_c}{r} \exp\{i[\phi_o + \mu I(x, y)]\} \exp\{ik'_c[(x_1 - x)\alpha'_i + (y_1 - y)\beta'_i]\} dxdy \quad (13)$$

と書ける。乳剤の厚みを d 、 Y 方向の大きさを a とすれば乳剤全体による観測点の振幅分布は

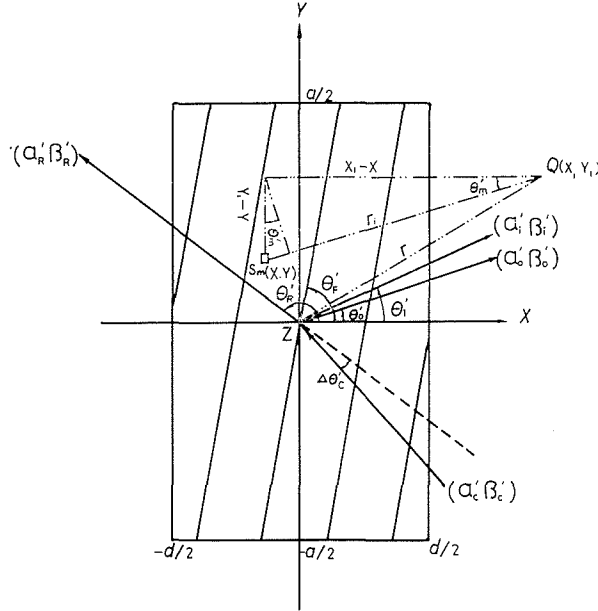


図3 薄い面素 S_m の拡張による厚い乳剤層からの回折。

$$A_Q = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{A'_c}{r} \exp\{i[\phi_o + \mu I(x, y)]\} \cdot \exp\{ik'_c[(x_1 - x)\alpha'_i + (y_1 - y)\beta'_i]\} dx dy \quad (14)$$

となる。また (4) 式と (10) 式を (14) 式に代入すれば、観測点 $Q(x_1, y_1)$ の振幅分布 A_Q は

$$\begin{aligned} A_Q &= \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-d/2}^{d/2} C \exp\{ik'_c(\alpha'_c x + \beta'_c y)\} \exp\{i(\phi_o + \mu(a_o^2 + a_R^2))\} \exp\{i2\mu a_o a_R \cos\{k'[(\alpha'_R - \alpha'_o)x \\ &\quad + (\beta'_R - \beta'_o)y]\}\} \exp\{ik'_c[(x_1 - x)\alpha'_i + (y_1 - y)\beta'_i]\} dx dy \\ &= \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-d/2}^{d/2} C \exp\{ik'_c(\alpha'_c x + \beta'_c y)\} \exp(i\phi_A) \exp(i\rho \cos \psi) \exp\{ik'_c[(x_1 - x)\alpha'_i \\ &\quad + (y_1 - y)\beta'_i]\} dx dy \\ &= \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-d/2}^{d/2} C \exp\{ik'_c(\alpha'_c x + \beta'_c y)\} \exp(i\phi_A) [J_0(\rho) + iJ_1(\rho) \exp(-i\psi) \\ &\quad + iJ_1(\rho) \exp(i\psi) + \dots] \exp\{ik'_c[(x_1 - x)\alpha'_i + (y_1 - y)\beta'_i]\} dx dy \\ &= G_0 + G_{-1} + G_1 + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

ただし、 $\phi_A = \phi_o + \mu(a_o^2 + a_R^2)$, $\rho = 2\mu a_o a_R$, $\psi = k'[(\alpha'_R - \alpha'_o)x + (\beta'_R - \beta'_o)y]$, $C = \frac{a_c}{r}$ とした。(15) 式の第二項は直接像の再生に寄与するもので、直接像の振幅分布 G_{-1} は

$$\begin{aligned} G_{-1} &= iC \exp(i\phi_A) J_1(\rho) \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-d/2}^{d/2} \exp\{ik'_c(\alpha'_c x + \beta'_c y)\} \exp\{-ik'[(\alpha'_R - \alpha'_o)x \\ &\quad + (\beta'_R - \beta'_o)y]\} \exp\{ik'_c[(x_1 - x)\alpha'_i + (y_1 - y)\beta'_i]\} dx dy \\ &= iC \exp(i\phi_A) J_1(\rho) \exp[ik'_c(x_1 \alpha'_i + y_1 \beta'_i)] \cdot \int_{-a/2}^{a/2} \exp\{i[k'_c(\beta'_c - \beta'_i) \\ &\quad - k'(\beta'_R - \beta'_o)]y\} dy \cdot \int_{-d/2}^{d/2} \exp\{i[k'_c(\alpha'_c - \alpha'_i) - k'(\alpha'_R - \alpha'_o)]x\} dx \\ &= iC \exp(i\phi_A) J_1(\rho) \exp[ik'_c(x_1 \alpha'_i + y_1 \beta'_i)] a \cdot \text{sinc}(af_y) d \cdot \text{sinc}(df_x) \end{aligned} \quad (16)$$

で与えられる。ただし

$$f_y = -\frac{k'_c(\beta'_c - \beta'_i) - k'(\beta'_R - \beta'_o)}{2\pi}, \quad f_x = -\frac{k'_c(\alpha'_c - \alpha'_i) - k'(\alpha'_R - \alpha'_o)}{2\pi} \quad (17)$$

とおいた。従って直接像の強度分布は (16) 式より

$$I_i = |G_{-1}|^2 = [CdJ_1(\rho)]^2 \cdot [a \operatorname{sinc}(af_y)]^2 \cdot \operatorname{sinc}^2(df_x) \quad (18)$$

となる。普通三次元ホログラム乾板としての乳剤の厚み d はおよそ $15\mu m \sim 25\mu m$ 位であり、ホログラム面の大きさ a は乳剤の厚み d に比して非常に大きい。よって $a \gg d$ より (18) 式は

$$I_i = [CdJ_1(\rho)]^2 \delta^2(f_y) \operatorname{sinc}^2(df_x) \quad (19)$$

と書ける。そのうちの $\delta^2(f_y)$ はホログラム面の大きさの寄与に相当する。 $\operatorname{sinc}^2(df_x)$ は乳剤の厚みの寄与に相当する。(19) 式が最大値をとるためには (17) 式において、 $f_x = 0$, $f_y = 0$, 即ち

$$\begin{cases} k'_c(\beta'_c - \beta'_i) - k'(\beta'_R - \beta'_o) = 0 \\ k'_c(\alpha'_c - \alpha'_i) - k'(\alpha'_R - \alpha'_o) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

の条件をみたす必要がある。いま $k'_c = k'$ とすれば (20) 式を満足する解として

$$(\alpha'_c, \beta'_c) = (\alpha'_R, \beta'_R), \quad (\alpha'_i, \beta'_i) = (\alpha'_o, \beta'_o) \quad (21)$$

が得られる。(21) 式は再生照明光の方向が参照光のそれと一致し、再生像の方向が物体光の方向と一致する場合に相当する。(20) 式を同時に満足すれば (19) 式が最大値をとるので (21) 式は Bragg の法則に従ってホログラムが回折されるための条件である。 $k'_c = k' + \Delta k'$ の場合については第 5 章で述べる。

4. 乳剤の膨脹による Bragg 角度の変化

第 3 章での議論は感光乳剤層の厚みの変化を考慮してない。一般に DCG ホログラムの現像処理により乳剤の厚みは未処理のそれと比較して増すので記録のときの干涉縞の間隔と傾きが変化する。この乳剤層の膨脹はホログラムの再生角度、波長選択性、角度選択性に対して影響を与える。記録時の干涉縞の間隔は (6) 式で与えられ、現像処理後の X , Y 方向の乳剤層の膨脹率を M_x , M_y とすれば $x' = M_x x$, $y' = M_y y$ となる。これらの変換式を (4) 式に代入して (6) 式に相当する膨脹後の干涉縞の間隔は

$$L_1 = \frac{M_x M_y \lambda'}{\sqrt{[M_y(\alpha'_R - \alpha'_o)]^2 + [M_x(\beta'_R - \beta'_o)]^2}} \quad (22)$$

となる。干涉縞が X 軸となす角度を θ'_{F1} とすると θ'_{F1} は

$$\tan \theta'_{F1} = \frac{M_y}{M_x} \tan \frac{\theta'_R + \theta'_o}{2} \quad (23)$$

で与えられる。膨脹により干涉縞の間隔と傾きが変わるため、再生の時、波長 λ の光波をもとの参照光の方向に入射させると Bragg の条件を満足しない。Bragg の条件を満足するための二つの補正方法が考えられる。一つの方法は再生照明光の角度による補正である。照明光の波長は記録波長と同じと仮定し、再生照明光の入射方向を変えることにより補正を行う。もう一つの方法は再生照明光の入射方向は記録時の参照光の方向と同じとして、Bragg の条件を満足する再生照明光の波長 λ を変化させる方法である。

再生照明光の入射角度による補正方法を述べる。図 4 に示すように現像処理後の干涉縞の法線方向が X 軸となす角度を θ'_N , Bragg の条件を満足する再生照明光の方向 $\vec{OC}$ は X 軸となす角度を θ'_c , $\vec{OC}$ が干涉縞の法線となす角度を σ' とし、一般に乳剤層がガラス面に接しているのて Y 方向の膨脹は無視しても差し支えない。 $M_y = 1$ とすれば θ'_N , σ' , は

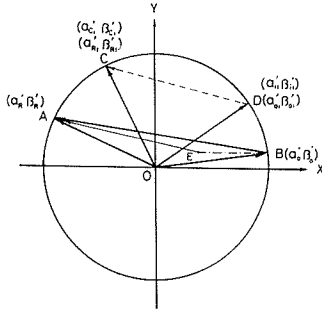


図5 乳剤の膨脹前後のベクトル図。Bragg の条件を満足するため、再生照明光の角度とその結果として再生像の方向が変化したときのベクトル図。 $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ は記録時の参照光と物体光の波数ベクトルである。 $\vec{OC}$, $\vec{OD}$ は乳剤の膨脹後の再生照明光と再生像光の波数ベクトルである。再生波長と記録波長が同じとする。

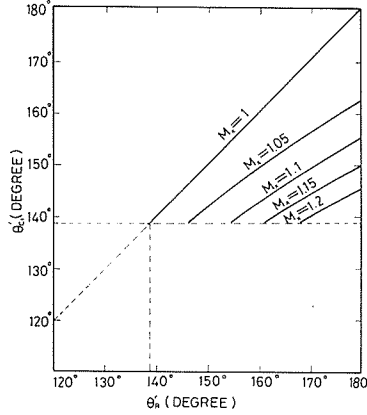


図6 乳剤の膨脹による再生角度で補正した場合の再生角度 θ'_c の変化。曲線は $\theta'_o = 0^\circ$, 種々の M_x に対してプロットされている。 $\lambda = 4880 \text{ \AA}$, $n = 1.52$, 点線以下の角度領域では実現不可能である。乳剤内の 138.8° は乳剤外での 90° に相当する。

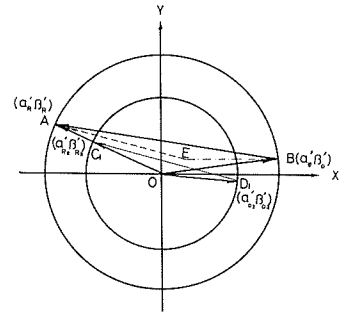


図7 乳剤の膨脹前後のベクトル図。Bragg の条件を満足するため、再生波長とその結果として再生像光の方向が変化したときのベクトル図。 $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ は記録時の参照光と物体光の方向で、 $\vec{OC}_1$, $\vec{OD}_1$ は乳剤の膨脹後の再生照明光と物体光の方向である。 $\vec{OC}_1$ と $\vec{OA}$ の方向が同じとする。大、小円の半径はそれぞれ記録光波と再生光波の波数を示す。

方向の膨脹後の格子ベクトル $\vec{BA}$ は $\vec{EA}$ に変化し、新たに Bragg の条件を満足する再生照明光、再生像光の各々の波数ベクトルは $\vec{OC}$, $\vec{OD}$ である。 $\vec{OC} = \vec{OD} + \vec{DC} (= \vec{EA})$ のベクトル関係式が成立する。円の半径は波数ベクトルの大きさを示している。

特殊な場合として参照光と物体光を X 軸に対称になるように入射させれば ($\theta'_R = -\theta'_o$) (28) 式により $\phi'_1 = \theta'_R$ になり、Bragg 角度は乳剤の膨脹率 M_x と無関係になる。この場合、干渉縞は X 軸に平行になるので Bragg 角度が X 方向の膨脹率 M_x と無関係になることから理解できる。物体光が乳剤面に垂直に入射した時、 $\theta'_o = 0^\circ$ となり、(26) 式から M_x をパラメーターとして再生照明光の入射角度 θ'_c と参照光の角度 θ'_R との関係が求まり、その結果を図6に示す。図6の横軸は参照光の角度、縦軸は Bragg の条件を満足する再生照明光の入射角度 θ'_c を表わす。 M_x が大きくなるに従って θ'_c は小さくなる。また参照光の入射角度 θ'_R の増加に伴い θ'_c の変化も大きくなる。

次に波長による補正の方法を述べる。再生照明光の入射方向は記録時の参照光の方向と同じと仮定する。この場合、Bragg の条件を満足する再生波長 λ_1 と再生像光の方向は図7のベクトル図によって決められる。図7のベクトル $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ はそれぞれ作製時の参照光と物体光の波数ベクトルである。 $\vec{BA}$ は記録された干渉縞の格子ベクトルとなり、 $\vec{OA} = \vec{BA} + \vec{OB}$ のベクトル関係式が成立する。現像処理後、乳剤の膨脹により格子ベクトル $\vec{BA}$ は $\vec{EA}$ に変化し、 $\vec{EA} = \vec{D}_1\vec{C}_1$ である。作製時の波長より長い波長 λ_1 を用いて、Bragg の条件を満足する再生照明光と再生像光の波数ベクトルはそれぞれ $\vec{OC}_1$, $\vec{OD}_1$ となる。よってベクトル関係式 $\vec{OC}_1 = \vec{OD}_1 + \vec{D}_1\vec{C}_1$ が成立する。この場合の Bragg 角度 ϕ'_2 は図4に示すように

$$\phi'_2 = \theta'_R - \theta'_{F1} = \theta'_R - \tan^{-1} \left[\frac{1}{M_x} \tan \frac{\theta'_R + \theta'_o}{2} \right] \quad (29)$$

と書ける。再生像光の X 軸となす角度 $\theta'_{i2}(\theta'_{o2})$ とすれば θ'_{i2} は

$$\theta'_{i2} = \theta'_o - 2(\theta'_F - \theta'_{F1}) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{1}{M_x} \tan \frac{\theta'_R + \theta'_o}{2} \right] - \theta'_R \quad (30)$$

で与えられる。また Bragg の条件を満足する再生照明光の波長 λ_1 は (22), (25), (29) 式により

$$\lambda_1 = \frac{2M_x \lambda}{\sqrt{(\cos \theta'_R - \cos \theta'_o)^2 + [M_x (\sin \theta'_R - \sin \theta'_o)]^2}} \cdot \sin \left\{ \theta'_R - \tan^{-1} \left[\frac{1}{M_x} \tan \frac{\theta'_R + \theta'_o}{2} \right] \right\} \quad (31)$$

と書ける。(31) 式を用いて物体光の角度 $\theta'_o = 0^\circ$, 記録波長 $\lambda = 4880 \text{ \AA}$ とし, M_x をパラメーターとして θ'_R と λ_1 との関係を計算した結果を図 8 に示す。 M_x が大きくなるに伴い Bragg の条件を満足するような再生入射光の波長も長くなる。しかし同じ M_x として θ'_R の変化による再生波長 λ_1 の変化はあまり大きくない。図 6, 図 8 とともに θ'_R は乳剤内の参照光の角度であり, $n = 1.52$ として, 図の点線で示す 138.8° から小さい角度範囲では実現不可能な領域である。また図 6 と図 8 を比較することにより角度 θ'_{c1} で補正する場合, $\theta'_{R1}, \theta'_{c1}$ とも 138.8° 以内の領域では実現不可能であるが, 再生波長で補正する場合, $\theta'_{c1} = \theta'_R$ が 138.8° 以内は実現不可能である制限が加わるだけで実現領域が広い。

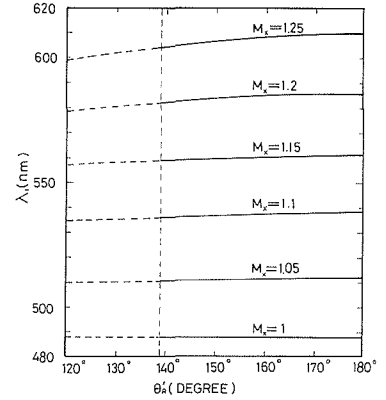


図 8 乳剤の膨脹による再生波長の变化。曲線は $\theta'_o = 0^\circ$, 種々の M_x に対してプロットされている。 $\lambda = 488 \text{ nm}$, $n = 1.52$, 点線以下の領域では実現不可能である。

5. 乳剤の膨脹がある場合の波長選択性と角度選択性

現像処理後の DCG ホログラムを白色光で再生する場合の波長選択性と角度選択性について計算する。第 4 章に述べたように現像した後の干渉縞に対してもし再生波長と記録波長が同じとすれば Bragg の条件を満足する再生照明光の角度と再生像光の角度はそれぞれ (26), (27) 式で与えられる。よって現像処理後の干渉縞は波長 λ , 角度 $\theta'_{R1} = \theta'_{c1}$ の参照光と角度 θ'_{o1} の物体光を干渉させて記録されたものと見なすことができる。この干渉縞の強度分布は

$$I(x, y) = a_o^2 + a_R^2 + 2a_o a_R \cos \{ k' [(\alpha'_{R1} - \alpha'_{o1})x + (\beta'_{R1} - \beta'_{o1})y] \} \quad (32)$$

と書ける。 α'_{R1} , β'_{R1} と α'_{o1} , β'_{o1} はそれぞれ (26) 式と (27) 式で決められる。

像を再生するために (10) 式で与えられる再生照明光を用いる時, 観測点 $Q(x_1, y_1)$ での回折波の振幅分布は (10) 式と (32) 式を (14) 式に代入すれば

$$A_Q(x_1, y_1) = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-M_x d/2}^{M_x d/2} C \exp[ik'_c(\alpha'_c x + \beta'_c y)] \exp\{i[\phi_o + \mu(a_o^2 + \alpha_R^2)]\} \\ \times \exp\{i2\mu a_o a_R \cos \{ k' [(\alpha'_{R1} - \alpha'_{o1})x + (\beta'_{R1} - \beta'_{o1})y] \} \exp\{ik'_c[(x_1 - x)\alpha'_i + (y_1 - y)\beta'_i]\} dx dy \quad (33)$$

となる。第三章と同じような計算を行って, $\phi_A = \phi_o + \mu(\alpha_o^2 + \alpha_R^2)$, $\rho = 2\mu a_o a_R$, $\psi = k'[(\alpha'_{R1} - \alpha'_{o1})x + (\beta'_{R1} - \beta'_{o1})y]$, $C = \frac{a_c}{r}$ とおいてさらに (33) 式を展開し, そしてそのうちの -1 次回折波即ち直接像の振幅分布は

$$G_{-1} = C \cdot \exp(i\phi_A) J_1(\rho) \exp[ik'_c(x_1 \alpha'_i + y_1 \beta'_i)] \int_{-a/2}^{a/2} \exp\{i[k'_c(\beta'_c - \beta'_i) - k'(\beta'_{R1} - \beta'_{o1})]y\} dy \\ \times \int_{-M_x d/2}^{M_x d/2} \exp\{i[k'_c(\alpha'_c - \alpha'_i) - k'(\alpha'_{R1} - \alpha'_{o1})]x\} dx$$

$$= C \cdot \exp(i\phi_A) J_1(\rho) \exp[ik'_c(x_1\alpha'_i + y_1\beta'_i)] a \cdot \text{sinc}(af_y) M_x d \text{sinc}(M_x df_x) \quad (34)$$

となる。ただし

$$f_x = \frac{k'_c(\alpha'_i - \alpha'_c) - k'(\alpha'_{o1} - \alpha'_{R1})}{2\pi}, \quad f_y = \frac{k'_c(\beta'_i - \beta'_c) - k'(\beta'_{o1} - \beta'_{R1})}{2\pi} \quad (35)$$

とおき、ホログラムの大きさ a が乳剤の厚み d にくらべて非常に大きいとすれば直接像の強度分布は

$$I_i(x_1, y_1) = [C J_1(\rho) M_x d]^2 \delta^2(f_y) \text{sinc}^2(M_x df_x) \quad (36)$$

で与えられる。(36) 式により $f_y=0$, $f_x=0$ のとき再生像の強度は最大値をとり、図 9 に示す、 $f_y=0$, $M_x df_x=0.44$ の場所において再生像は最大強度の半分の値で再生可能である。再生照明光の波数が $k'_c = k' - \Delta k'$, 入射の方向が $\alpha'_c = \alpha'_{R1} + \Delta\alpha'_c$, $\beta'_c = \beta'_{R1} + \Delta\beta'_c$ に変化したとき、再生像の方向が $\alpha'_i = \alpha'_{o1} + \Delta\alpha'_i$, $\beta'_i = \beta'_{o1} + \Delta\beta'_i$ に変化したとし、これらを $f_y=0$, $M_x df_x=0.44$ に代入すると次の式が成り立つ。

$$\begin{cases} k'(\Delta\beta'_i - \Delta\beta'_c) - \Delta k'(\beta'_{o1} - \beta'_{R1}) = 0 \\ k'(\Delta\alpha'_i - \Delta\alpha'_c) - \Delta k'(\alpha'_{o1} - \alpha'_{R1}) = 0.44 \frac{2\pi}{M_x d} \end{cases} \quad (37)$$

ただし $\Delta\alpha'_c$, $\Delta\beta'_c$, $\Delta\alpha'_i$, $\Delta\beta'_i$, $\Delta k'$ を何れも小さいと仮定し

ている。また $\Delta\beta'_i = \alpha'_i \Delta\theta'_i \cong \alpha'_{o1} \Delta\theta'_i$, $\Delta\alpha'_i = -\beta'_i \Delta\theta'_i \cong -\beta'_{o1} \Delta\theta'_i$, $\Delta\beta'_c \cong \alpha'_{R1} \Delta\theta'_c$, $\Delta\alpha'_c \cong -\beta'_{R1} \Delta\theta'_c$ の関係を (37) 式に代入すれば

$$\begin{cases} k' \alpha'_{o1} \Delta\theta'_i - \Delta k'(\beta'_{o1} - \beta'_{R1}) = k' \alpha'_{R1} \Delta\theta'_c \\ -k' \beta'_{o1} \Delta\theta'_i - \Delta k'(\alpha'_{o1} - \alpha'_{R1}) = -k' \beta'_{R1} \Delta\theta'_c + \frac{0.88\pi}{M_x d} \end{cases} \quad (38)$$

となる。(38) 式を $\Delta k'$, $\Delta\theta'_i$ について解き、そして $\Delta k' = -(2\pi/\lambda'^2) \Delta\lambda'$ の関係を考えて、 $\Delta\lambda'$ と $\Delta\theta'_i$ は

$$\Delta\lambda' = \frac{\lambda'^2}{2\pi} \frac{k'(\alpha'_{R1}\beta'_{o1} - \beta'_{R1}\alpha'_{o1})\Delta\theta'_c + 0.88\pi/M_x d}{1 - \beta'_{o1}\beta'_{R1} - \alpha'_{o1}\alpha'_{R1}} \quad (39)$$

$$\Delta\theta'_i = \frac{\alpha'_{R1}}{\alpha'_{o1}} \Delta\theta'_c + \frac{[(\alpha'_{R1}\beta'_{o1} - \beta'_{R1}\alpha'_{o1})\Delta\theta'_c + (0.88\pi/M_x d)](\beta'_{R1} - \beta'_{o1})}{\alpha'_{o1}(1 - \beta'_{o1}\beta'_{R1} - \alpha'_{o1}\alpha'_{R1})} \quad (40)$$

で与えられる。反射型ホログラムにおいて $\alpha'_{o1}\alpha'_{R1} < 0$ の関係があり、また $\Delta\theta_c = \frac{\Delta\beta_c}{\alpha_c} \cong \frac{n\alpha'_{R1}}{\alpha_c} \Delta\theta'_c$ の関係を考えて、DCG ホログラムの乳剤外の波長選択性 $\Delta\lambda$ と角度選択性 $\Delta\theta_i$ は屈折の法則により次の式に書き直すことができる。

$$\Delta\lambda = n\Delta\lambda' = \frac{\lambda\alpha_{R1} \left(\beta_{o1} + \frac{\beta_{R1}\sqrt{\alpha_{o1}^2 + n^2 - 1}}{\sqrt{\alpha_{R1}^2 + n^2 - 1}} \right) \Delta\theta_c + \frac{0.44\lambda^2}{M_x d} \sqrt{\alpha_{o1}^2 + n^2 - 1}}{n^2 - \beta_{o1}\beta_{R1} + \sqrt{\alpha_{o1}^2 + n^2 - 1} \sqrt{\alpha_{R1}^2 + n^2 - 1}} \quad (41)$$

$$\Delta\theta_i = \frac{\alpha_{R1}}{\alpha_{o1}} \Delta\theta_c + \frac{\alpha_{R1} \left(\beta_{o1} + \frac{\beta_{R1}\sqrt{\alpha_{o1}^2 + n^2 - 1}}{\sqrt{\alpha_{R1}^2 + n^2 - 1}} \right) \Delta\theta_c + \frac{0.44\lambda}{M_x d} \sqrt{\alpha_{o1}^2 + n^2 - 1}}{\alpha_{o1}(n^2 - \beta_{o1}\beta_{R1} + \sqrt{\alpha_{o1}^2 + n^2 - 1} \sqrt{\alpha_{R1}^2 + n^2 - 1})} (\beta_{R1} - \beta_{o1}) \quad (42)$$

同様に (38) 式を $\Delta k'$, $\Delta\theta'_c$ について解き、さらにそれらを乳剤外の値に書き直すと、

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda\alpha_{o1} \left(\beta_{R1} + \frac{\beta_{o1}\sqrt{\alpha_{R1}^2 + n^2 - 1}}{\sqrt{\alpha_{o1}^2 + n^2 - 1}} \right) \Delta\theta_i + \frac{0.44\lambda^2}{M_x d} \sqrt{\alpha_{R1}^2 + n^2 - 1}}{n^2 - \beta_{o1}\beta_{R1} + \sqrt{\alpha_{o1}^2 + n^2 - 1} \sqrt{\alpha_{R1}^2 + n^2 - 1}} \quad (43)$$

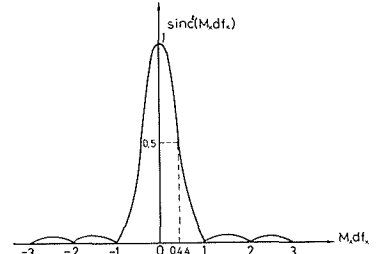


図 9 Bragg の条件を満足するときの再生像の強度分布 sinc 関数, $M_x df_x=0.44$ のところの強度は最大値の半分の値になる。

$$\Delta\theta_c = \frac{\alpha_{o1}}{\alpha_{R1}} \Delta\theta_i - \frac{\left[\alpha_{o1} \left(\beta_{R1} + \frac{\beta_{o1} \sqrt{\alpha_{R1}^2 + n^2 - 1}}{\sqrt{\alpha_{o1}^2 + n^2 - 1}} \right) \Delta\theta_i + \frac{0.44\lambda}{M_x d} \sqrt{\alpha_{R1}^2 + n^2 - 1} \right]}{\alpha_{R1}(n^2 - \beta_{o1}\beta_{R1} + \sqrt{\alpha_{o1}^2 + n^2 - 1} \sqrt{\alpha_{R1}^2 + n^2 - 1})} (\beta_{R1} - \beta_{o1}) \quad (44)$$

となる。

6. 考 察

a) もし適当な方法（例えば現像処理後の DCG ホログラムをペーキング⁷⁾する）を用いて乳剤の厚みをもとの状態に戻したとすれば、 $M_x=1$ を (26), (27) 式に代入して

$$\theta'_{R1} = \theta'_{c1} = \theta'_R, \quad \theta'_{o1} = \theta'_o, \quad \alpha_{R1} = \alpha_R, \quad \beta_{R1} = \beta_R, \quad \alpha_{o1} = \alpha_o, \quad \beta_{o1} = \beta_o \quad (45)$$

の関係が成り立つ。この場合の (41) 式は

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda \alpha_R \left(\beta_o + \frac{\beta_R \sqrt{\alpha_o^2 + n^2 - 1}}{\sqrt{\alpha_R^2 + n^2 - 1}} \right) \Delta\theta_c}{n^2 - \beta_o\beta_R + \sqrt{\alpha_o^2 + n^2 - 1} \sqrt{\alpha_R^2 + n^2 - 1}} + \frac{0.44\lambda^2 \sqrt{\alpha_o^2 + n^2 - 1}}{d(\sqrt{\alpha_o^2 + n^2 - 1} \sqrt{\alpha_R^2 + n^2 - 1} - \beta_o\beta_R + n^2)} \quad (46)$$

と書き改められる。(46) 式の第一項は再生照明光の角度ずれ $\Delta\theta_c$ によって生じる波長選択性を表わす。第二項は乳剤の厚み d により生じる波長選択性を表わす。

特殊な場合として (46) 式から反射型ホログラムにおいて参照光を反対方向に入射させるとき、 $(\alpha_R = -\alpha_o, \beta_R = -\beta_o)$ (46) 式の第一項は 0 になる。この場合の $\Delta\lambda$ は再生照明光の角度ずれ $\Delta\theta_c$ と無関係になる。

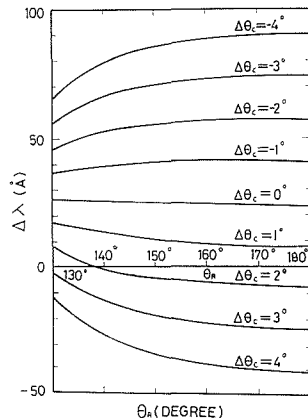


図 10 角度による補正の場合での θ_R の関数としての再生像光の波長選択性 ($\Delta\lambda$), $M_x=1.05$, $d=15\mu\text{m}$, $\lambda=4880\text{\AA}$, $n=1.52$ とし、種々の $\Delta\theta_c$ をパラメーターとしてプロットされている。

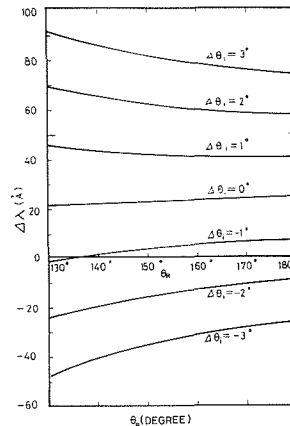


図 11 (43) 式により、 θ_R の関数として $\Delta\lambda$ の変化図、条件は図 10 と同じとして、曲線は種々の $\Delta\theta_i$ をパラメーターとしてプロットされている。

膨脹がある場合の例として、 $M_x=1.05$, $n=1.52$, $d=15\mu\text{m}$, 記録波長 $\lambda=4880\text{\AA}$ とおいて、(3), (26), (27) 式を用いて (41) 式と (43) 式を計算した結果をそれぞれ図 10, 図 11 に示す。図 10, 図 11 の横軸は参照光の乳剤外での入射角度 θ_R , 縦軸は波長選択性 $\Delta\lambda$ を示す。二つの図のパラメーターはそれぞれ $\Delta\theta_c$ と $\Delta\theta_i$ である。図 10 により、参照光の入射角度 θ_R を決めれば $\Delta\theta_c$ を変化させることにより $\Delta\lambda$ の値を小さくさせることができる。

b) $M_x=1$ の場合, (45) 式により (42) 式は

$$\Delta\theta_i = \left[\frac{\alpha_R}{\alpha_o} + \frac{\alpha_R(\beta_R - \beta_o) \left(\beta_o + \frac{\beta_R \sqrt{\alpha_o^2 + n^2 - 1}}{\sqrt{\beta_R^2 + n^2 - 1}} \right)}{\alpha_o(n^2 - \beta_o\beta_R + \sqrt{\alpha_o^2 + n^2 - 1} \sqrt{\alpha_R^2 + n^2 - 1})} \right] \Delta\theta_c + \frac{0.44\lambda \sqrt{\alpha_o^2 + n^2 - 1} (\beta_R - \beta_o)}{d\alpha_o(n^2 - \beta_o\beta_R + \sqrt{\alpha_o^2 + n^2 - 1} \sqrt{\alpha_R^2 + n^2 - 1})} \quad (47)$$

となる。(47) 式の第一項は再生照明光の角度が参照光からのずれ $\Delta\theta_c$ により角度選択性 $\Delta\theta_i$ への寄与に相当する。第二項は乳剤の厚み d により再生像の角度選択性 $\Delta\theta_i$ への寄与に相当する。

特殊な場合として物体光と参照光が乳剤層に对称に入射した場合, 即ち $\beta_o = \beta_R$, $\alpha_R = -\alpha_o$ のとき, $\Delta\theta_i$ は (47) 式により

$$\Delta\theta_i = -\Delta\theta_c \quad (48)$$

となる。これは参照光と物体光を乳剤に關し対称に入射させる場合に像光線の角度ずれ量は再生照明光の角度ずれ量に等しく, 乳剤の膨脹率 M_x と無関係になることを意味する。さらにこの場合もし再生照明光と参照光との方向が一致している ($\Delta\theta_c = 0^\circ$) とすれば, $\Delta\theta_i$ は 0° になる。しかし(46)式により, $\Delta\lambda$ は乳剤の厚み d の影響により 0 にならない。この場合, 干渉縞は乳剤面に平行になることに相当する。回折方向は干渉縞の Y 方向の格子間隔 L_y により決まり, (3) 式と (20) 式により

$$L_y(\beta_c - \beta_i) = \lambda \quad (49)$$

が成立する。(49) 式を微分すると

$$L_y(\alpha_c \Delta\theta_c - \alpha_i \Delta\theta_i) = \Delta\lambda \quad (50)$$

となる。格子の Y 方向の間隔は無限に広い ($L_y \rightarrow \infty$) ことから $\Delta\theta_i = -\Delta\theta_c$ となり, (48) 式と一致する。

一般に $\Delta\theta_i$ のため再生像のぼけが生じる。一つの点に対してその再生像は点像でなく, 広がり

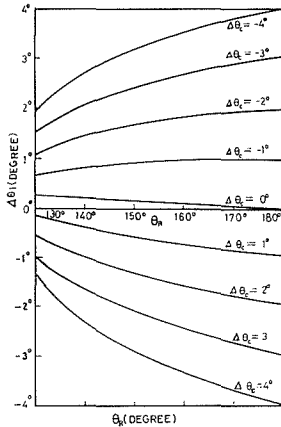


図 12 角度による補正の場合での θ_R の関数としての再生像光の角度選択性 ($\Delta\theta_i$), $M_x=1.05$, $\theta_o=0^\circ$, $d=15\mu\text{m}$, $n=1.52$, $\lambda=4880\text{\AA}$ とし, $\Delta\theta_c$ をパラメーターとしてプロットしている, 再生波長と記録波長と同じとする。

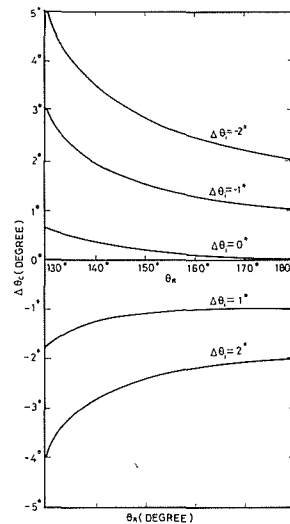


図 13 (44) 式により, θ_R の関数として $\Delta\theta_c$ の変化の図。条件は図 12 と同じとして, 曲線は $\Delta\theta_i$ をパラメーターとしてプロットされている。

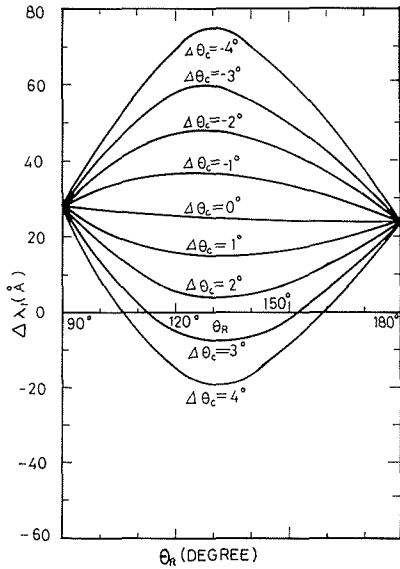


図 14 波長による補正する場合での θ_R の関数としての再生像光の波長選択性 ($\Delta\lambda_1$), $M_x=1.05$, $\theta_o=0^\circ$, $d=15\mu m$, $n=1.52$ とし, θ_R の変化により再生波長 λ_1 は (31) 式により決定される。曲線は種々の $\Delta\theta_c$ をパラメータとしてプロットされている。

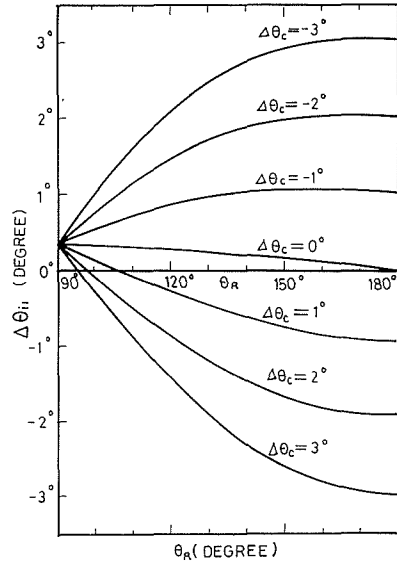


図 15 波長による補正する場合での θ_R の関数としての再生像光の角度選択性 ($\Delta\theta_i$), $M_x=1.05$, $\theta_o=0^\circ$, $d=15\mu m$, $n=1.52$ とし, θ_R の変化により再生波長 λ_1 は (31) 式により決定される。曲線は種々の $\Delta\theta_c$ をパラメータとしてプロットされている。

のある斑点となる。その斑点の直径 D は $D=2r\Delta\theta_i$ で与えられる。ただし r はホログラムから像までの距離である。物体のホログラムからの距離が大きい、そして $\Delta\theta_i$ が大きい程像のぼけも大きくなる。乳剤層の膨脹がある例として、 $M_x=1.05$, $n=1.52$, 物体光 $\theta_o=0^\circ$, 記録波長 $\lambda=4880 \text{ \AA}$ とし, (3), (26), (27) 式を用いて (42) と (44) 式を計算した結果を図 12, 図 13 に示す。図 12 の横軸は参照光の角度 θ_R , 縦軸は再生像光の角度選択性 $\Delta\theta_i$ を表わし, パラメータは $\Delta\theta_c$ である。図 13 の横軸は参照光の角度, 縦軸は再生照明光の角度ずれ $\Delta\theta_c$ であり, パラメータは $\Delta\theta_i$ である。図 12 に示すように再生照明光の角度ずれ $\Delta\theta_c=0^\circ$ とし, 参照光の角度 θ_R の増加に従って $\Delta\theta_i$ が小さくなる。 $\Delta\theta_c$ が 0° でないとき, $\Delta\theta_i$ は θ_R の増加に伴って増加する。図 13 から適当な $\Delta\theta_c$ を選ぶと, 任意の参照光の角度 θ_R に対して再生像光の角度ずれ $\Delta\theta_i$ を 0° になることを示している。よって像のぼけは任意の θ_R に於いて再生照明光の角度ずれ $\Delta\theta_c$ によって補正することができる。

c) 第 4 章の第二の方法により, Bragg の条件を満足するように再生波長を変化させた場合, 再生照明光は参照光と同じ方向に入射するので $\alpha_{R2}=\alpha_R$, $\beta_{R2}=\beta_R$ となる。 α_{o2} , β_{o2} と λ_1 は (30) 式と (31) 式で求められる。次に (41) 式と (42) 式の α_{o1} , β_{o1} , α_{R1} , β_{R1} , λ の代りに α_{o2} , β_{o2} , α_{R2} , β_{R2} , λ_1 を用いて (41) 式と (42) 式を計算した結果を図 14 と図 15 で示す。この図 14 と図 15 は $M_x=1.05$, $n=1.52$, 物体光 $\theta_o=0^\circ$ の場合での (31) 式により決定される再生波長による補正後における再生光の波長選択性と角度選択性を示している。図 14 の横軸は参照光の角度 θ_R , 縦軸は再生像光の波長選択性 $\Delta\lambda_1$ である。図 15 の横軸は参照光の角度 θ_R , 縦軸は再生像光の角度選択性 $\Delta\theta_i$ である。図 14, 15 のパラメータは $\Delta\theta_c$ で, Bragg の条件を満足する再生照明光の方向からのずれである。図 14 と図 15 から図 10 と図 12 の結果と同様に参照光の入射角度 θ_R

めれば適当な $\Delta\theta_c$ を選ぶと $\Delta\lambda_1$ および $\Delta\theta_{i1}$ は補償され、0 になることができる。また図 15 より参照光 $\theta_R=130^\circ$ の近くに於いて $\Delta\lambda_1$ は極値をとることがわかる。

7. む す び

本研究に於いては再生照明光の Bragg の条件を満足する入射方向からのずれがあり、さらに DCG ホログラムが現像処理された後、乳剤の厚さが増す場合について、Bragg 角度 (ϕ')、再生像の波長選択性 ($\Delta\lambda$) および再生像光の角度選択性 ($\Delta\theta_i$) を計算した。計算を通して参照光の入射角度 θ_R が大きい場合に乳剤の膨脹率 M_x により Bragg 角度は大きく変化されること、再生像光の波長選択性 ($\Delta\lambda$)、または再生像光の角度選択性 ($\Delta\theta_i$) は再生照明光の Bragg の条件を満足する入射方向からのずれ量により補償されることができ、また参照光と物体光を乳剤面に対称に入射させた場合、 $\Delta\theta_i$ は乳剤の膨脹率と無関係になることが判明した。

これらの計算結果は、乳剤の膨脹後の DCG ホログラムの再生に際し、Bragg の条件を満足する再生角度や再生波長を求めるのに有効であり、Bragg の条件を満足した後の再生後のぼけや再生波長範囲を決定するのに有用であろう。

参 考 文 献

- 1) D. Meyerhofer: "Topics in Applied Physics (Holographic Recording Materials)", Vol. 20, (1977), p. 75, Springer-Verlag.
- 2) H. M. Smith: "Principles of Holography", (1968), p. 54, Wiley-Interscience.
- 3) 辻内順平, 金子隆司: 光学工業技術研究組合技術資料, (1971), 16, p. 6.
- 4) E. N. Leith et al.: Appl. Opt., 5 (1966), 8, p. 1303.
- 5) 久保田敏弘: 光学, 4 (1975), 6, p. 278.
- 6) S. K. Case and R. Alferness: Appl. Phys. 10 (1976), 1, p. 41.
- 7) B. J. Chang and C. D. Leonard: Appl. Opt. 18 (1979), 14, p. 2407.