北海道大学工学部研究報告
第101号（昭和55年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 101 (1980)

セールス巡回路の問題に関する二・三の事実

榊原　勝昭*

（昭和55年6月30日受理）

A Few Geometrical Properties on the Traveling Salesman Problam

Katsuaki SAKAKIBARA

(Received June 30, 1980)

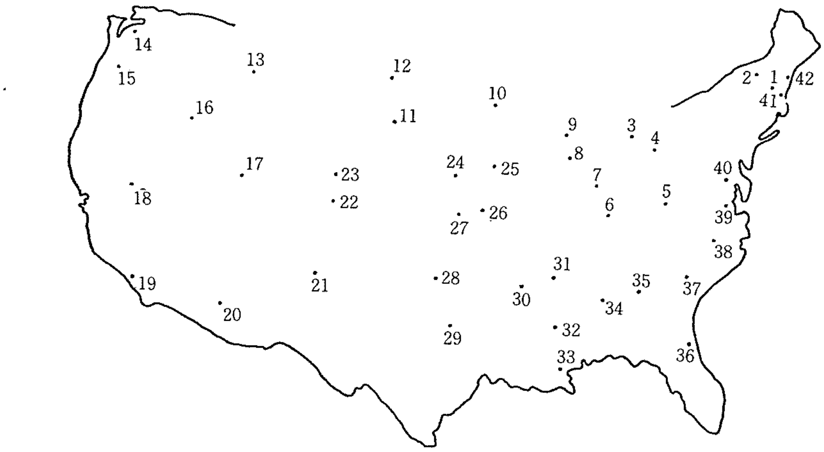
Abstract

On the traveling salesman problem, the route of the example of capital cities in U. S. A. was found only by electronic computer.

In this work, two geometrical properties are found from that route.

1. は　じ　め　に

第1図は合衆国の州都の位置を幾何学化したものであり，この分野では知られた例題である。以下，この例題で説明する。



第1図

平面に与えられたこれら42点を一度づつ通過して戻って来る周回路の中で，最短のものを見つけ出そうと云うのが問題であるが，この解答を得る事の出来る原理は既にある。即ち，有り得る全ての周回路を一つ残らず書き出し，各々の距離を実測し，それらの長短を順に比較すれば所望の回路は確実に見い出されるであろうと云う原理である。ところで，与えられた42点の並べ方

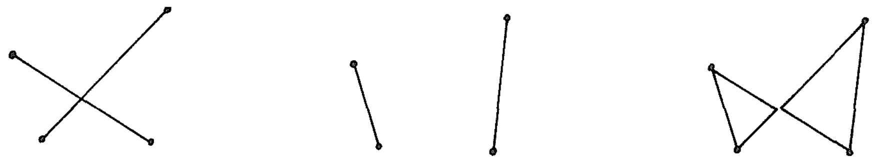
* 電子工学科　電波応用工学講座

によって，有り得る周回路の数は決まるが，本例題の場合その数は，(42－1)！／2通りある事になる。然るに，(42－1)！／2 ＞＞ 11！× 10^{30} × 1／2であり，これだけの数の周回路の長短を較べるまでには，これらの各々について42回づつの加え算を要するわけで，この作業量は，人間の生活ペースにも寿命にもとてもとても馴染める類のものではないのである。この種の作業に対する必殺仕事人たる電算機のペースをもってくても，この作業量は実用の域を遙かに越えているのである。こうした事情で，解き得るはずの確実な原理があるにもかかわらず，実際の解答を手に出来ないと云うのが，このセールス巡回路の問題の特徴なのである。

そこで，有り得る全ての周回路の中から，明らかに長めの回路を大いにフルイに掛け，上記の作業量を大幅に減らす事が必要となる。以下に述べる事は，多分，この必要性を多少賄なう事になるであろうと思われる。

2．本　　文

明らかに長めである事が判かっている回路に，〝交岐点を持つ回路〃がある．もし回路の途中に第2図（イ）の様な交岐点があったら，その回路は，その部分が第2図（ロ）の様になっているだけで他の部分はすっかり同じ回路よりも長くなっている。それは第2図(ハ) を眺めれば明らかである。従がって，交岐点を持った回路は決して最短の回路にはなり得なく，有り得る全ての



（イ）　　（ロ）　　（ハ）

第2図

回路の中から，考慮の外に押し出してしまってもかまわない事になると云うのである。即ち，「回路が交岐点を持たない」と云う事は，「最短の巡回路である」ための必要条件となっているのである。

さて，交岐点を持たない周回路の作り方は色々あるだろうが次の様にしても出来る。

先づ，与えられた点の中から，それらを結び合わせると凹みのない多角形となり，しかも残りの全ての点がその多角形の内部に入いる様な数点を選ぶ。そして実際にそれらの点を結んで凹みのない多角形を描く。与えられた全ての点が一直線上に並んでいなければ，その様な多角形は一義的に必ず描ける。実際にそれを描いた時，その内部に点が残らなければ，即ち，全ての点がこの多角形の周辺上にのみ位置しているのであれば，その多角形が取りもなおさず，最短の回路となるのは明らかである。何故なら，この多角形には凹みがない事になっているので，点のこの順序以外の結び方をすると必ず交岐点を持ってしまうからである。

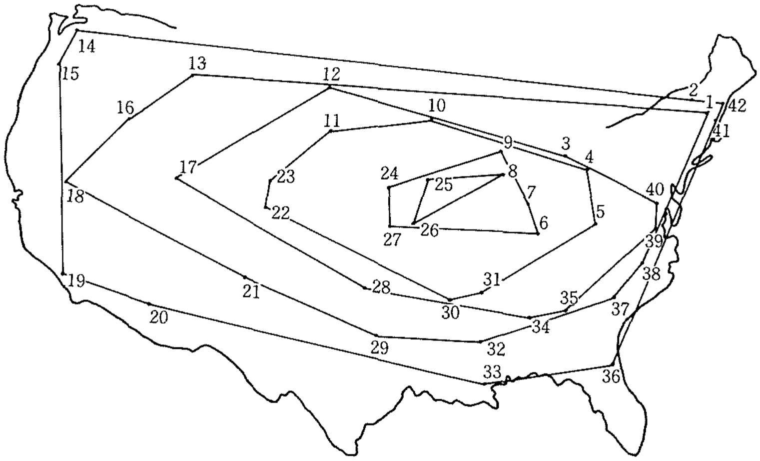
次に内部に点が残っていれば，それらについて上記の多角形作りを更に行なう。この手順を繰り返えして，与えられた点を外側から順に多角形の頂点に採用し続けて行く。すると一般には，何重かの多角形の層が出来，遂には一番内側の多角形の中に，多くても一直線上に並んでいる点

が残るだけとなる。これをUSA州都の例題に施したものが第3図である。どの様な例題に於いても，こうして作られる多角形の層は，それぞれにおいて一義的にしか出来ない。

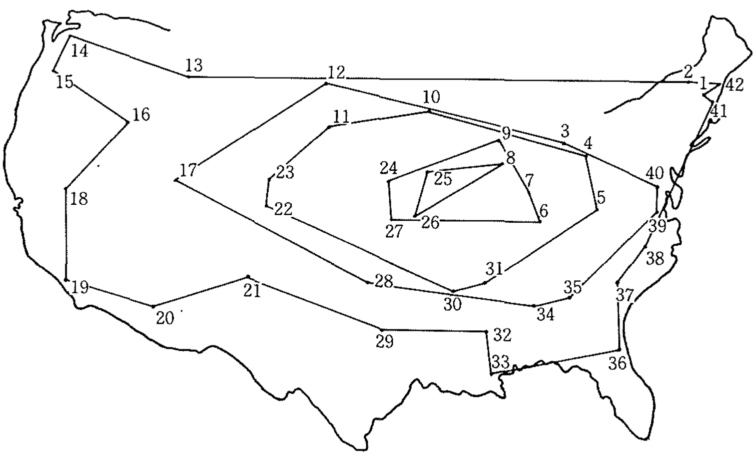
与えられた点を，それぞれの頂点とする多角形の層を描いたら，次の要領で回路を描く。

先ず一番外側の多角形を仮の回路と見立て，その適当な辺を，二番目の多角形の頂点の一つに寄り道をする道程で置き替える。これを何度か繰り返えして一番目の多角形と二番目の多角形の頂点全てを通過する回路を得る。そして次に三番目の多角形の頂点となす点を更に，その回路に吸収させると云う具合にして，与えられた全ての点を一本の回路の中に組み入れていまうまで続ける。第4図は二番目の多角形まで吸収した図であり，第5図は全ての点を網羅するまで押し進めた例である。本筋を外れた末節の事であるが、第五図は出来るだけ大きな辺を取り崩し，且つ又，なるべく長い新たな道程が出来ない様に心掛けて作られたものである。

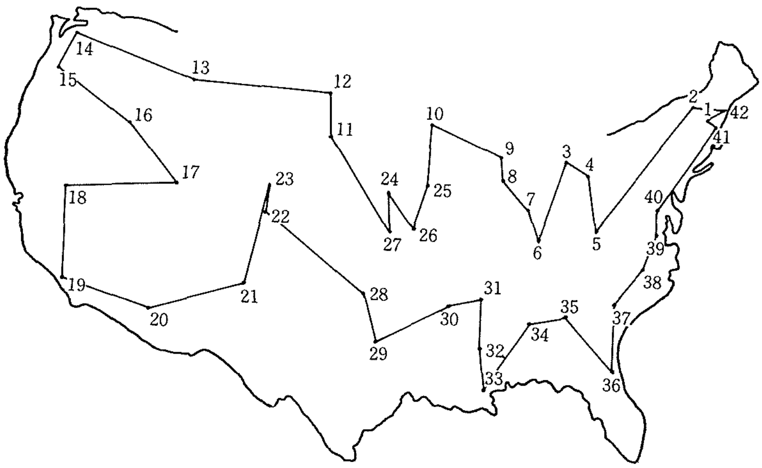
基本的にはこの要領で適切な細則を設定すれば交岐点のない回路の全てを自動的に列挙出来，そこから最短の回路を取り出す事も可能であろうと思われるがこれでもまだ，フルイの目は大き過ぎる様に思われる。産湯と共に赤子を流してしまわぬ様に気を配りながら，不要な巡回路を



第3図



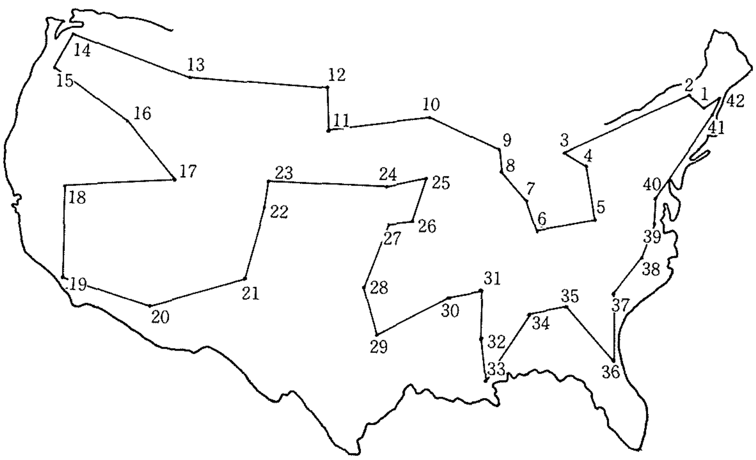
第4図



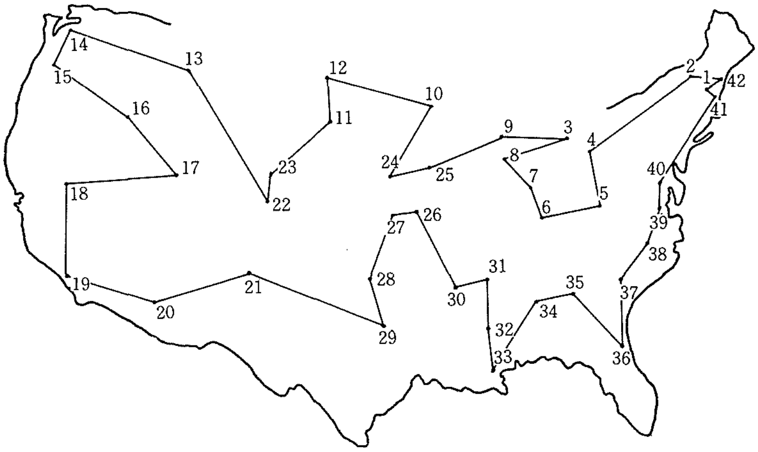
第5図

もっと大幅に減らす工夫が必要であると思われる。

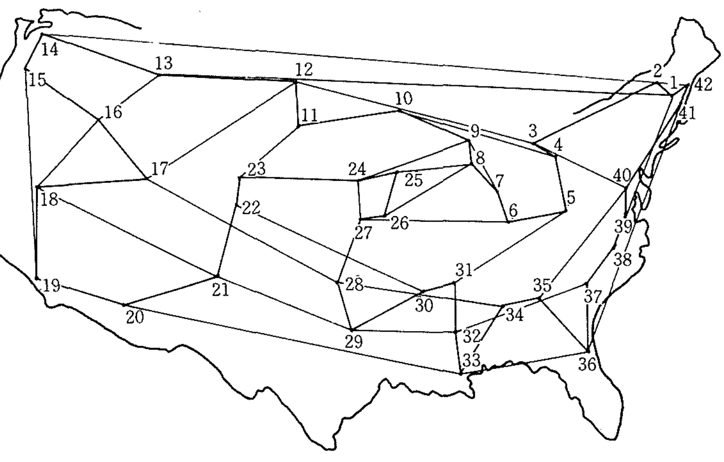
さて，例題に与えられた42点を番号順に連ねて出来る回路（第6図）は電算機で求められたものである。これは，それより短かいものが未だ見つけられていないと云う事を，唯一の寄り所にして，最短の回路であろうと信じられているものである。簡単な準備と大雑把な目安で求められた第5図の回路を，最短と信じられている第6図の回路を較べてみると，42辺のうち，32辺までが共通している事が判かる。この事にも驚かされるが，余談ながら，これと云った準備も法則もなく唯，新聞配達の経験を持つだけの少年がサラサラと描き上げた回路（第7図）が29もの共通辺を持っているのを見ると，人間の目の確かさ感の鋭さと云ったものには更に驚かされる。この様に，与えられた点の位置関係を眼下に一望しながら描いてゆくのであれば，回路に交岐点を持たせない様にする事は子供達にも容易に出来る。しかし，これを暗闇の箱の中で手探りで行う様な場合には，交岐点のない回路を得る事はそれ程容易な作業ではなく，なんらかの法則性に従がいながら系統だてて行なう必要がある。



第6図



第7図



第8図

上記の〝最短回路〟に多角形の網をかぶせると逆算的に，なにがしかの法則性を得る事が出来る。この多角形の網をかぶせた図が第8図である。以下の説明はこの図についてのものである。

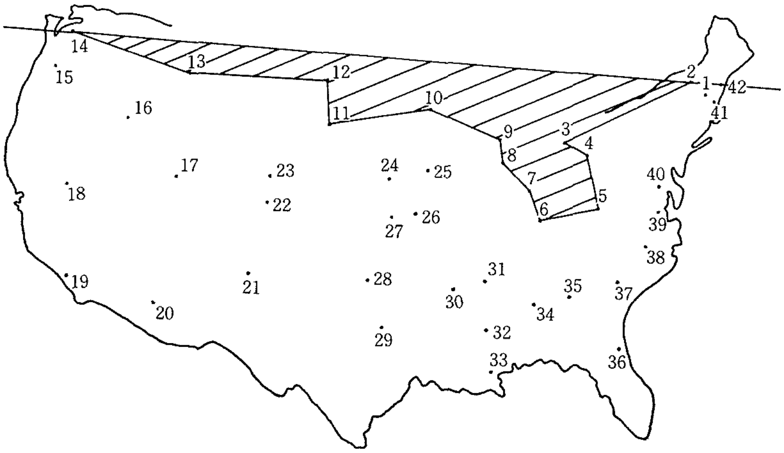
基本的には先づこの図を，一番外側の多角形を仮の回路として，この仮の回路の適当な辺を内側に折り曲げて行く過程で残りの点を吸収しつつ，最終的な回路が作り上げられたと云う視点から眺める。②と⑭を直結していた辺が内側に折り曲げられて，③から⑬までの11点を吸収し，⑮と⑲を直結していた辺が⑯から⑱までの3点を吸収したと云う風に眺めるわけである。

又，②から⑭の道程で，②から⑧までを〝往き〟として，⑧から⑭までを〝帰り〟と呼ぶ事にする。⑧の特徴は，この道程の中で一番内側の多角形をなしている点であると云う事である。⑮から⑲までの道程では，⑮から⑰までが〝往き〟であり，⑰から⑲までが〝帰り〟である。更に，かぶせた多角形の辺がそのまま道程の一部として採用されている場合（例えば，⑭−⑮とか，㉒−㉓とかである）には，その両端の2点を合わせて〝点〟と呼んでしまう事にする。同様に，二辺，三辺が連続して道程になっている場合にも，それらはまとめて〝点〟と表現してしまう。

言葉の使い方をこの様に決めておくと，例題の〝最短回路〟は，層をなしている多角形の各辺

との関係において，次の規則に従がいつつ作られていると表現する事が出来る。即ち，「〝往き〟に横切られた辺は，〝帰り〟に又横切られる」と云う規則性を持っている。この場合，辺にはその両端の〝点〟が含まれ，横切る事には接する事も含まれるとする。この規則は第８図を眺めれば明らかである。例えば〝往き〟の②－③の道程によって横切られた辺①－⑬は，〝帰り〟の⑫－⑬の道程によって又横切られている。同様に，⑤－⑥によって横切られた辺⑦－⑨は，⑧－⑨によって帰りがけに又横切られているのである（多角形の辺⑥－⑦は，そのまま回路の一部に採用されているので〝点〟として扱い，辺⑦－⑨にはこの〝点〟が含まれる）。

回路形成の過程でこの規則性が守られる事は，回路に交岐点が出来ないための必要条件となっている。と云うのは，②から内側に折れ込み⑭に戻って来るまでの道程において，この規則は第９図の斜線を施した部分に点を残さない事を表現しているからである。即ち，もしこの部分に点が残っていれば，②－⑭の辺は一番外側の凹みのない多角形の辺であり，残りの全ての点は，この辺とその延長線で仕切られた平面の下側半分にある事になり，そうした点のどれと結ぶにせ



第９図

よ斜線を施こした部分に残っている点との間に出来る道程は必ず，②から⑭の道程と交岐してしまうからである。例えば，⑪と⑬を直結してしまい，⑫を取り残した図を想定してみればよりはっきりする。又，この規則は，回路が交岐点を持たないための充分条件をも表現している様にも思えるが詳細は未検討である。

この例題の場合，もう一つの規則性を見る事が出来る。

即ち，「各々の多角形毎に一番若い数の点を選び，それから反時計回りに各頂点の番号を書き並べると，それらの数はだんだん大きくなる」と云う規則性である。例えば，一番外側の多角形では，②－⑭－⑮－⑲－⑳－㉝－㊱－㊶－㊷となっており，二番目の多角形では，①－⑬－⑯－⑱－㉑－㉙－㉜－㊲－㊳となっているのである。外側から四番目の多角形では，④－⑩－⑪－㉓－㉒－㉚－㉛－⑤となっており，㉓－㉒の部分と㉛－⑤の部分で規則性が破れている様に見えるが，この部分は多角形の辺がそのまま回路の一部として採用されており，㉒－㉓及び④－⑤は共に各二点を合わせて〝点〟と呼ぶ事にしているので，通用していると云える。

この例題の〝最短回路〟はデジタル的に求められたものであり，それがどちらかと云えばアナログ的な幾何学模様との間に，こうした規則性を持っていると云う事はなかなかに興味深い。

さて，この規則性が回路にもたらしている効果は，「後戻りの傾向を避ける」と云う事である。即ち，任意の例題が与えられた時，それらの点を多角形の層としてグループ分けし，どの多角形に属する点でも，出来るだけ同方向に辿る事にする方が，無駄の少ない回路となるであろうと思われる。

3．おわりに

実用に至るまでには，まだまだ不充分と思われるが，与えられた任意の例題に対し，周回路形成の過程でのこうした規則性の集積は，列挙作業の量をそれなりに減らしてくれる。