



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2次元導波系における弾性波伝搬の有限要素シミュレーション
Author(s)	小柴, 正則; Koshiba, Masanori; 鈴木, 道雄 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 101, 109-116
Issue Date	1980-12-25
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41650">https://hdl.handle.net/2115/41650</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	101_109-116.pdf



## 2次元導波系における弾性波伝搬の有限要素シミュレーション

小柴 正則\* 鈴木 道雄\*

(昭和55年6月30日受理)

### Finite Element Simulation of Acoustic Wave Propagation in Two-dimensional Waveguide

Masanori KOSHIBA and Michio SUZUKI

(Received June 30, 1980)

#### Abstract

A finite element approach utilizing one-dimensional elements is presented for the analysis of the eigenmodes of a layered piezoelectric waveguide, and the conditions for real representation for the fields within each element are found. The first step is a discretization of the layered waveguide into a number of line elements, in each of which the field variables are defined by second order polynomial trial functions, and then one arrives at the matrix eigenvalue problem by using the variational principle.

#### 1 ま え が き

最近、弾性表面波の電子デバイスへの応用に関する話題が各方面で取り上げられており、VIFフィルタなど、一部は商品化の段階にまで発展してきている。

さて、弾性表面波デバイスには層状構造のものが通常よく用いられるので、このような2次元導波系における弾性波の伝搬特性を理論的に明らかにしておくことは表面波デバイスの設計上重要である。ところで、このような2次元導波系の伝搬問題は原理的には厳密な解析が可能であるが、多層、特に異方性、更には圧電性を有する場合には解析の手順が複雑となり、たとえ計算機を用いても具体的に解を得るのはかなり困難であると思われる。

そこで本論文では、2次元導波系における弾性波伝搬を計算機によって容易にシミュレートすることが可能な手法を開発することを目的として、線要素を用いた有限要素法<sup>(1)</sup>による数値解析法を提案し、異方性、圧電性を考慮して一般的な定式化を行っている<sup>(2)</sup>。結果として、2次元導波系の伝搬問題は固有値問題に帰着されており、結晶の切断方位、並びに伝搬方向によらず、任意の層状媒質系をシミュレートすることが可能になっている。この場合、一般的には要素内における内部界、すなわち粒子変位、電位などの導波路断面上の分布を複素量として取り扱う必要があるが、弾性定数、誘電率、圧電定数などの媒質定数が適当な条件を満足する場合には、この内部界の導波路断面上の分布を実数として取り扱うことが可能になる。ここでは、このように内部界の導波路断面上の分布を実数として取り扱うことが可能であるための条件、並びにその場合の内部界の表示法を明確にした定式化を行っている。更に、立方結晶を例に、その表面波の伝搬特性をcopperの場合についてシミュレートし、厳密解<sup>(3),(4)</sup>とよく一致した結果が得られることを示して本手法の妥当性を確認している。ところで、本手法は閉じた導波系を対象にして定式化された

\* 電子工学科 電波応用工学講座

ものである。エネルギーを媒質の内部に漏洩し伝搬方向にわずかに減衰しながら伝搬する、いわゆる擬似表面波<sup>(3),(4)</sup>に対しては、本手法は適用できない。しかしながら、実際には普通の表面波モードに対応する解の他にこの擬似表面波に対応する解も求められており、伝搬方向への減衰がそれほど大きくなければ、このような擬似表面波の位相速度についても本手法によるシミュレーションが可能であると考えられる。

## 2 基本方程式

圧電媒質中の基本方程式は

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}\mathbf{S} - \mathbf{e}^T \mathbf{E}, \quad \mathbf{c}^T = \mathbf{c} \quad (1)$$

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E} + \mathbf{e} \mathbf{S}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^T = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

ここに $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ はそれぞれ応力、ひずみ、電束密度、電界、 $\mathbf{c}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\mathbf{e}$ はそれぞれ弾性定数テンソル、誘電率テンソル、圧電定数テンソルであり、 $T$ は転置することを意味する。

Auldの表記法<sup>(5)</sup>により、粒子変位を $\mathbf{u}$ とすると、ひずみは

$$\mathbf{S} = \nabla_s \mathbf{u} \quad (3)$$

運動の方程式は

$$\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (4)$$

ここに $\rho$ は媒質の密度、 $t$ は時間である。

準静電近似したマクスウェルの方程式は

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi \quad (5)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 0 \quad (6)$$

ここに $\phi$ は電位である。

## 3 線要素を用いた有限要素法による定式化

いま、図1に示す $z$ 軸を伝搬軸とする無損失の圧電性層状媒体を考え、時間因子を $\exp(j\omega t)$ 、 $\partial/\partial x = 0$ ,  $z$ 方向の位相定数を $\beta$ として粒子変位、電位を次式で表す。

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \{U_x^R(y) + jU_x^I(y)\} e^{j(\omega t - \beta z)} \\ u_y &= \{U_y^R(y) + jU_y^I(y)\} e^{j(\omega t - \beta z)} \\ u_z &= -j\{U_z^R(y) + jU_z^I(y)\} e^{j(\omega t - \beta z)} \\ \phi &= \{\Phi^R(y) + j\Phi^I(y)\} e^{j(\omega t - \beta z)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで図2に示す線要素を考え、要素内における任意の点( $y$ )での粒子変位、電位を2次関数で近似すると、試験関数 $U_i^R(y) + jU_i^I(y)$  ( $i = x, y, z$ )、 $\Phi^R(y) + j\Phi^I(y)$ は節点1, 2, 3における値

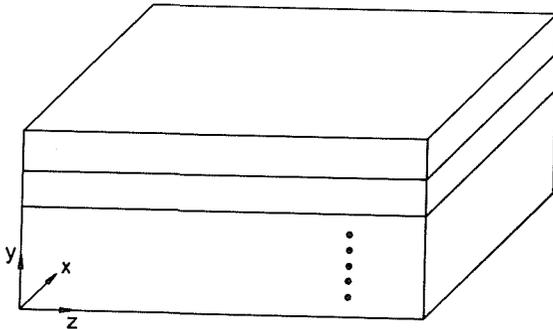


Fig.1 Layered piezoelectric waveguide.

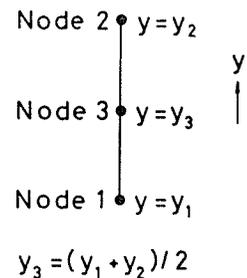


Fig.2 One-dimensional element.

$\delta_x^R + j\delta_x^I$ ,  $\delta_y^R + j\delta_y^I$ によって次式のように与えられる。

$$U_i^R(y) + j U_i^I(y) = \mathbf{N}(\delta_x^R + j\delta_x^I) \quad i = x, y, z \quad (8)$$

$$\Phi^R(y) + j\Phi^I(y) = \mathbf{N}(\delta_y^R + j\delta_y^I) \quad (9)$$

ここに  $y_1, y_2, y_3$  はそれぞれ節点1, 2, 3の座標,  $\mathbf{N}$ は

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ N_3] \quad (10)$$

であり,  $N_1, N_2, N_3$ は

$$\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

なる  $L_1, L_2$ を定義すると

$$N_1 = L_1(2L_1 - 1), \quad N_2 = L_2(2L_2 - 1), \quad N_3 = 4L_1 L_2 \quad (12)$$

粒子変位, 電位の導波路断面上の分布がそれぞれ式(8), (9)で与えられることに注意すると, ひずみ, 電界はそれぞれ式(3), (5)から

$$\mathbf{S} = \{ \mathbf{B}_x(\delta_x^R + j\delta_x^I) + \mathbf{B}_y(\delta_y^R + j\delta_y^I) + \mathbf{B}_z(\delta_z^R + j\delta_z^I) \} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (13)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{B}_\phi(\delta_\phi^R + j\delta_\phi^I) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (14)$$

ここに,  $\mathbf{B}_x, \mathbf{B}_y, \mathbf{B}_z, \mathbf{B}_\phi$ はそれぞれ

$$\mathbf{B}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -j\beta N \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ -j\beta N \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\beta N \\ -j b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ -j\beta N \end{bmatrix} \quad (15)$$

であり,  $\mathbf{0}$ は零ベクトルである。又,  $\mathbf{b}$ は

$$\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3] \quad (16)$$

であり,  $b_1, b_2, b_3$ は線要素の長さを  $h$ とすると

$$b_1 = (1 - 4L_1)/h, \quad b_2 = (4L_2 - 1)/h, \quad b_3 = 4(L_1 - L_2)/h \quad (17)$$

ここでは式(7)の解を仮定しているので,  $x, z$ 方向には単位長をとると, 系の汎関数  $L$ は

$$L = \sum_e L_e \quad (18)$$

$$L_e = \frac{1}{2} \int_e \mathbf{S}^\dagger \mathbf{T} dy - \frac{1}{2} \int_e \rho \frac{\partial \mathbf{u}^\dagger}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dy - \frac{1}{2} \int_e \mathbf{E}^\dagger \mathbf{D} dy \quad (19)$$

ここに  $L_e$ は線要素の汎関数,  $\sum_e$ は各要素についての和,  $\int_e dy$ は線要素の領域での積分, †は複素共役をとり転置することを意味する。

ひずみ, 電界がそれぞれ式(13), (14)のように節点における粒子変位, 電位によって表されること, 及び応力, 電束密度が構成方程式(1), (2)によってひずみ, 電界と結びつけられていることに注意すること, 線要素の汎関数も又, 節点における粒子変位, 電位で与えられることが分かる。

従って系全体の汎関数が全節点における粒子変位  $X_i^R + j X_i^I$  ( $i = x, y, z$ ), 電位  $X_\phi^R + j X_\phi^I$  によって表されることになり, 更に変分原理を適用して

$$\delta L = 0 \quad (20)$$

から, 圧電性層状媒体における弾性波の伝搬問題は, 結局次のような固有値問題に帰着される。

$$\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} & \bar{K}_{xx} & \bar{K}_{xy} & \bar{K}_{xz} & P_{x\phi} & \bar{P}_{x\phi} \\ K_{xy}^\dagger & K_{yy} & K_{yz} & -\bar{K}_{xy}^\dagger & \bar{K}_{yy} & \bar{K}_{yz} & P_{y\phi} & \bar{P}_{y\phi} \\ K_{xz}^\dagger & K_{yz}^\dagger & K_{zz} & -\bar{K}_{xz}^\dagger & -\bar{K}_{yz}^\dagger & \bar{K}_{zz} & P_{z\phi} & \bar{P}_{z\phi} \\ \bar{K}_{xx}^\dagger & -\bar{K}_{xy} & -\bar{K}_{xz} & K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} & -\bar{P}_{x\phi} & P_{x\phi} \\ \bar{K}_{xy}^\dagger & \bar{K}_{yy}^\dagger & -\bar{K}_{yz} & K_{xy}^\dagger & K_{yy} & K_{yz} & -\bar{P}_{y\phi} & P_{y\phi} \\ \bar{K}_{xz}^\dagger & \bar{K}_{yz}^\dagger & \bar{K}_{zz}^\dagger & K_{xz}^\dagger & K_{yz}^\dagger & K_{zz} & -\bar{P}_{z\phi} & P_{z\phi} \\ P_{x\phi}^\dagger & P_{y\phi}^\dagger & P_{z\phi}^\dagger & -\bar{P}_{x\phi}^\dagger & -\bar{P}_{y\phi}^\dagger & -\bar{P}_{z\phi}^\dagger & G_{\phi\phi} & \bar{G}_{\phi\phi} \\ \bar{P}_{x\phi}^\dagger & \bar{P}_{y\phi}^\dagger & \bar{P}_{z\phi}^\dagger & P_{x\phi}^\dagger & P_{y\phi}^\dagger & P_{z\phi}^\dagger & \bar{G}_{\phi\phi} & G_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_x^R \\ X_y^R \\ X_z^R \\ X_x^I \\ X_y^I \\ X_z^I \\ X_\phi^R \\ X_\phi^I \end{bmatrix}$$

$$-\omega^2 \rho \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_x^R \\ X_y^R \\ X_z^R \\ X_x^I \\ X_y^I \\ X_z^I \\ X_\phi^R \\ X_\phi^I \end{bmatrix} = 0 \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{xx} &= \sum_e \int_e B_x^\dagger c^{(1)} B_x dy & K_{xy} &= \sum_e \int_e B_x^\dagger c^{(2)} B_y dy & K_{xz} &= \sum_e \int_e B_x^\dagger c^{(2)} B_z dy \\ K_{yy} &= \sum_e \int_e B_y^\dagger c^{(1)} B_y dy & K_{yz} &= \sum_e \int_e B_y^\dagger c^{(1)} B_z dy \\ K_{zz} &= \sum_e \int_e B_z^\dagger c^{(1)} B_z dy \\ \bar{K}_{xx} &= j \sum_e \int_e B_x^\dagger c^{(3)} B_x dy & \bar{K}_{xy} &= j \sum_e \int_e B_x^\dagger c^{(4)} B_y dy & \bar{K}_{xz} &= j \sum_e \int_e B_x^\dagger c^{(4)} B_z dy \\ \bar{K}_{yy} &= j \sum_e \int_e B_y^\dagger c^{(3)} B_y dy & \bar{K}_{yz} &= j \sum_e \int_e B_y^\dagger c^{(3)} B_z dy \\ \bar{K}_{zz} &= j \sum_e \int_e B_z^\dagger c^{(3)} B_z dy \\ P_{x\phi} &= \sum_e \int_e B_x^\dagger e^{(2)T} B_\phi dy & P_{y\phi} &= \sum_e \int_e B_y^\dagger e^{(1)T} B_\phi dy & P_{z\phi} &= \sum_e \int_e B_z^\dagger e^{(1)T} B_\phi dy \\ P_{x\phi} &= j \sum_e \int_e B_x^\dagger e^{(4)T} B_\phi dy & \bar{P}_{y\phi} &= j \sum_e \int_e B_y^\dagger e^{(3)T} B_\phi dy & \bar{P}_{z\phi} &= j \sum_e \int_e B_z^\dagger e^{(3)T} B_\phi dy \\ G_{\phi\phi} &= -\sum_e \int_e B_\phi^\dagger \epsilon^{(1)} B_\phi dy & \bar{G}_{\phi\phi} &= -j \sum_e \int_e B_\phi^\dagger \epsilon^{(2)} B_\phi dy \\ M &= \sum_e \int_e N^T N dy & \mathbf{0} & \text{零行列} \end{aligned} \right\} (22)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{c}^{(1)} &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, & \mathbf{c}^{(2)} &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{26} \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{36} \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & C_{45} & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & C_{45} & 0 & 0 \\ \cdot & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{c}^{(3)} &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & C_{24} & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & C_{34} & 0 & 0 \\ \cdot & C_{24} & C_{34} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{56} \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & C_{56} & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{c}^{(4)} &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & C_{25} & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & C_{35} & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{46} \\ \cdot & C_{25} & C_{35} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & C_{46} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{e}^{(1)} &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & e_{22} & e_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & e_{34} & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{e}^{(2)} &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{26} \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & e_{35} & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{e}^{(3)} &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ \cdot & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{e}^{(4)} &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & e_{25} & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{36} \end{bmatrix} \\
 \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \varepsilon_{22} & 0 \\ \cdot & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, & \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \varepsilon_{23} \\ \cdot & \varepsilon_{23} & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right\} (23)$$

ここに $\cdot$ は任意であることを意味する。

式(21)~(23)から明らかなように、弾性定数、誘電率、圧電定数が次のように、式(24)、(26)、(28)、(30)で与えられる場合には、そのそれぞれの場合に対して粒子変位、電位を式(25)、(27)、(29)、(30)とおけばよいことになる。

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}^{(1)} + \mathbf{c}^{(2)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}^{(1)} + \mathbf{e}^{(2)} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned}
 u_x &= U_x(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\
 u_y &= U_y(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\
 u_z &= -j U_z(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\
 \phi &= \Phi(y) e^{j(\omega t - \beta z)}
 \end{aligned} \right\} (25)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}^{(1)} + \mathbf{c}^{(2)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}^{(3)} + \mathbf{e}^{(4)} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned}
 u_x &= U_x(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\
 u_y &= U_y(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\
 u_z &= -j U_z(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\
 \phi &= j \Phi(y) e^{j(\omega t - \beta z)}
 \end{aligned} \right\} (27)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}^{(1)} + \mathbf{c}^{(4)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}^{(1)} + \mathbf{e}^{(4)} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} u_x &= j U_x(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ u_y &= U_y(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ u_z &= -j U_z(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ \phi &= \Phi(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \end{aligned} \right\} (29)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}^{(1)} + \mathbf{c}^{(4)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}^{(2)} + \mathbf{e}^{(3)} \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} u_x &= j U_x(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ u_y &= U_y(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ u_z &= -j U_z(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ \phi &= j \Phi(y) e^{j(\omega t - \beta z)} \end{aligned} \right\} (31)$$

なお、式(22)の具体的な計算に必要な公式についてはまとめて付録に示すことにする。

#### 4 数 値 計 算 例

異方性結晶として立方結晶を例にとり、(001)面内を[100]方向から角度 $\theta$ の方向に伝搬する弾性表面波を考える。

( $x, y, z$ )軸に関する媒質定数は

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \dot{C}_{11} & \dot{C}_{12} & \dot{C}_{13} & 0 & \dot{C}_{15} & 0 \\ \dot{C}_{12} & \dot{C}_{22} & \dot{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \dot{C}_{13} & \dot{C}_{23} & \dot{C}_{33} & 0 & \dot{C}_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{C}_{44} & 0 & 0 \\ \dot{C}_{15} & 0 & \dot{C}_{35} & 0 & \dot{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{C}_{66} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e'_{14} & 0 & e'_{16} \\ e'_{21} & 0 & e'_{23} & 0 & e'_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e'_{34} & 0 & e'_{36} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_{11} &= \dot{C}_{33} = C_{11} - c \sin^2 2\theta \\ \dot{C}_{22} &= C_{11} \\ \dot{C}_{12} &= \dot{C}_{23} = C_{12} \\ \dot{C}_{13} &= C_{12} + c \sin^2 2\theta \\ \dot{C}_{15} &= -\dot{C}_{35} = c \sin 2\theta \cos 2\theta \\ \dot{C}_{44} &= \dot{C}_{66} = C_{44} \\ \dot{C}_{55} &= C_{44} + c \sin^2 2\theta \\ c &= (C_{11} - C_{12})/2 - C_{44} \\ e'_{14} &= e'_{25} = e'_{36} = e_{14} \cos 2\theta \\ e'_{23} &= e'_{34} = -e'_{21} = -e'_{16} = e_{14} \sin 2\theta \end{aligned}$$

ここに $C_{11}, C_{12}, C_{44}, \varepsilon_{11}, e_{14}$ は( $X, Y, Z$ )結晶軸に関する媒質定数である。

式(32)から、媒質定数は式(28)の条件を満足しているので、粒子変位、電位は式(29)の形で与えられることになる。

図3は、copperの場合における表面波モードの位相速度 $v = \omega/\beta$ についての計算結果を示したものであり、表面波モードであることの確認は固有ベクトルを評価することによって行っている。ここに $v_s = (C_{44}/\rho)^{1/2}$ であり、要素数は10、節点数は21で計算している。この図から、遅い横

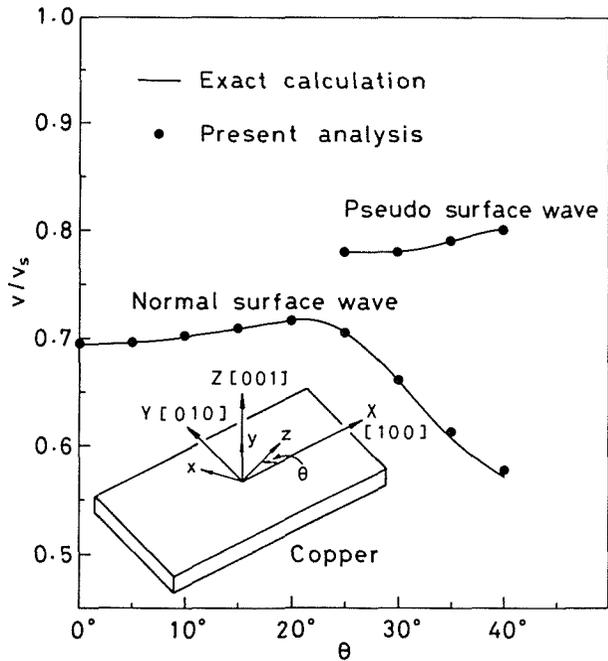


Fig.3 Normalized surface-wave velocities  
for propagation on the (001) plane of copper.

波 (Lower transverse bulk wave) よりも遅い速度で伝搬する、普通の表面波 (Normal surface wave) についての計算結果が厳密解<sup>(3)</sup> とよく一致していることが分かる。又、同時に擬似表面波 (Pseudo surface wave) に対応する解も求められており、この結果も厳密解<sup>(3)</sup> とよく一致している。ところで、本手法は閉じた導波系を対象にして定式化されたものであるので、エネルギーを媒質の内部に漏洩し伝搬方向にわずかに減衰しながら伝搬する、いわゆる擬似表面波に対しては本手法は適用できないわけであるが、伝搬方向への減衰がそれほど大きくない場合には (copper の(001)面内を伝搬する擬似表面波では1波長当りの減衰は $\theta=30^\circ, 40^\circ$  の場合においてそれぞれ  $0.005dB$ ,  $0.002dB$  程度である<sup>(4)</sup>)、このような擬似表面波の位相速度についても本手法によるシミュレーションが可能であると考えられる。

なお、圧電性を有する場合の普通の表面波モードをシミュレートした結果については文献(2)に示した。

## 5 む す び

2次元導波系における弾性波伝搬の計算機シミュレーション法として、異方性、圧電性を考慮し、内部界、すなわち粒子変位、電位などの導波路断面上の分布を実数として取り扱うことが可能な条件、並びにその場合の内部界の表示法を明確にした有限要素解析法の定式化を行った。更に、立方結晶を例にとり、copper の場合についてその表面波モードを対象とした数値計算を行い厳密解との良好な一致を示す計算値を得た。

擬似表面波を厳密にシミュレートし、その減衰定数をも評価することが可能なプログラムの開発については今後の課題とする。

## 謝 辞

本研究は昭和52, 53, 54年度文部省科学研究費（課題番号211701, 311001, 410501）の援助の下に行われたことを記し謝意を表する。

## 文 献

- (1) S. B. Dong and R. B. Nelson, "On natural vibrations and waves in laminated orthotropic plates," J. Appl. Mech. Series **E** **39**, p. 739 (Sep. 1972).
- (2) 林 幸成, 小柴正則, 鈴木道雄, "圧電性層状媒体における弾性波伝搬の線要素を用いた有限要素表示式," 電子通信学会論文誌, **J62-B**, p. 170 (Feb. 1979).
- (3) T. C. Lim and G. W. Farnell, "Search for forbidden directions of elastic surface-wave propagation in anisotropic crystals," J. Appl. Phys., **39**, p. 4319 (Aug. 1968).
- (4) T. C. Lim and G. W. Farnell, "Character of pseudo surface waves on anisotropic crystals," J. Acoust. Soc. Amer., **45**, p. 845 (Apr. 1969).
- (5) B. A. Auld, "Acoustic fields and waves in solids," Vol. I and II A Wiley-Interscience Publication (1973).

## 付 録

式(22)の計算に必要な公式

$$\int_{y_1}^{y_2} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dy = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \mathbf{b}^T \mathbf{b} dy = \frac{1}{3h} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dy = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \mathbf{b}^T \mathbf{N} dy = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$