



Title	空間フィルタを用いたレーザ速度計による音場中の粒子の運動測定
Author(s)	中島, 耀二; Nakajima, Yoji; 国枝, 正成 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 102, 1-11
Issue Date	1981-01-30
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41663">https://hdl.handle.net/2115/41663</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	102_1-12.pdf



## 空間フィルタを用いたレーザ速度計による音場中の粒子の運動測定

中島耀二\* 国枝正成\*\* 田中達夫\*

(昭和55年8月30日受理)

### Measurement of Particle Motion in Acoustic Field by Laser Velocimeter Equipped with Spacial Filter

Yoji NAKAJIMA, Masanari KUNIEDA and Tatsuo TANAKA

(Received August 30, 1980)

#### Abstract

A spacial filter is located at the focal plane of a fringe-mode laser velocimeter in such a way as to detect the motion of a particle whose diameter is several times larger than the fringe size. The spacial filter was designed taking into consideration the diffraction pattern at the focal plane, and was proved to be effective for improving the visibility of a beat signal.

The motion of a particle in an acoustic field is measured by the velocimeter, and the authors' theory concerning the fluid flow around a particle in an acoustic field was checked against the data. The results show that the theory predicts the particle motion more accurately than Stokes' or Basset's equation. The applicable limits of the theory are also revealed by the data.

#### 1. 緒 言

微粒子分散系に可聴域の低周波音波をかけると、粒子の凝集速度を著しく増加できることが報告されているし<sup>1)</sup>、筆者らもこれを観察したことがある。その凝集機構は超音波凝集の場合とは異なって、音波による粒子の運動そのものに関係する比較的単純なプロセスとしてとらえられているが、粒子の運動自体さえまだ十分には解明されていない。筆者らの最近の理論計算によると<sup>2)</sup>、音波の作用によって粒子のまわりには複雑な流れが誘導されることがわかった。この流れは遠方の微粒子を凝集の中心になる比較的大きな粒子のまわりに運ぶ作用をもつので粒子の凝集速度を増大させるであろうし、また粒子と流体間の熱や物質の移動速度にも影響を与えるはずである。こうした推論を定量的に評価する目的に筆者らの理論計算の結果は有用であると考えているが、その結果はいわゆる matched asymptotic expansion 法<sup>3)</sup> を利用した摂動近似解であるから、解に含まれる各種のパラメータがどの程度の大きさになるまでよい近似になるかを実験的に検討しておかねばならない。この実験のために空間フィルタ付のフリンジモードレーザ速度計を新たに考案し、音場中を沈降する数十ミクロンの粒子の速度振幅を実測したところ、十分な精度で理論が確認でき、かつ理論式の適用範囲も明らかにできた。本報ではこの測定に用いたレーザ速度

\* 合成化学工学科 工業化学計測講座

\*\* 現在、住友エンジニアリング株式会社

計を紹介するとともに、実験結果についても報告する。

## 2. 音場中の粒子の運動に関する理論計算

筆者らの計算によれば<sup>2)</sup>、速度が

$$u_f = A\omega_a \cos \omega_a t \quad (1)$$

で振動する流体中を、半径  $r_o$ 、密度  $\rho$  の球形粒子が

$$u_p = aA\omega_a \cos(\omega_a t + \phi_p) + u_s \quad (2)$$

なる速度で流体の振動方向と平行に運動する場合、この粒子が流体から受ける抗力は、速度を  $A\omega_a$  で、時間を  $1/\omega_a$  で、また抗力を  $6\pi\mu r_o A\omega_a$  ( $\mu$  は流体の粘度) で無次元化すると、

$$\bar{Z}_0 = -(\varepsilon/\beta)[1 + 0.177\lambda K\beta^2 - 0.0663\lambda K\beta^2\varepsilon^2 - 0.011\lambda K^2\beta^4] \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{Z}_1 = & (1 - ae^{i\phi_p})e^{i\varepsilon}[1 + \lambda(0.707 + 0.265\varepsilon^2 - 0.0166\varepsilon^4) + \lambda K\beta^2(0.0647 - 0.0275\varepsilon^2) \\ & - 0.00206\lambda K^2\beta^4 + i\lambda\{0.707 - 0.265\varepsilon^2 - 0.0166\varepsilon^4 \\ & - K\beta^2(0.0293 - 0.0388\varepsilon^2) + 0.00193K^2\beta^4\}] \end{aligned} \quad (4)$$

この他に2次以上の高調波抗力があるが、強度が弱く粒子の運動には影響が少ないと思われるので省略した。なお(4)式は複素表示のまま示したが、抗力はその実数部で与えられる。また式中のパラメータは次式で定義されたものである。

$$\left. \begin{aligned} \lambda = r_o\sqrt{\omega_a/\nu}, \quad \beta = A\sqrt{\omega_a/\nu}, \quad \varepsilon = \beta\delta = u_s/\sqrt{\omega_a\nu}, \quad \delta = u_s/A\omega_a \\ K = (1 - ae^{i\phi_p})(1 - ae^{-i\phi_p}) = 1 - 2a\cos\phi_p + a^2; \nu \text{ は流体の動粘度} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

更にこれらのパラメータと従来からよく使われているパラメータの関係を示すと

$$\left. \begin{aligned} \lambda = \sqrt{R_v(r_o/A)}, \quad \beta = \sqrt{R_v(A/r_o)}, \quad \beta/\lambda = A/r_o \\ \lambda\beta = r_o A\omega_a/\nu = R_v, \quad \lambda\varepsilon = r_o u_s/\nu = R_s \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで  $R_v$  は振動レイノルズ数、 $R_s$  は定常速度に対するレイノルズ数であるが、代表長さは粒子の半径  $r_o$  にとってある。(3)、(4)式はナビエ・ストークス式の  $\lambda$ 、 $\beta$ 、 $\delta$  に関する摂動近似解の inner expansion から算出したものをまとめ直したものであるが、(6)式の関係からも推察できるように、通常の  $R_v^{1/2}$  に関する展開法<sup>4)</sup> と本質的には同じであって、ただ  $A/r_o \gg 1$  の条件で matching を良好にさせ、かつ主要となる項が先に計算できるように工夫したものすぎない。

さて、音波の波長が粒子径に比較して十分に長く、音圧の空間的分布が粒子の運動に影響しないと仮定すれば、音場中をその振動軸と平行に重力沈降する粒子の運動方程式は

$$\frac{d\bar{u}_p}{dt} = H\bar{Z} + \bar{G} \quad (7)$$

ただし  $H = 9\mu/2r_o^2\rho\omega_a$ 、 $\bar{G} = g/A\omega_a^2$  ( $g$  は重力の加速度)、 $\bar{Z}$  は無次元化した抗力であり、粒子速度  $u_p$  も、時間  $t$  も前述の基準値  $A\omega_a$ 、 $1/\omega_a$  によって無次元化してある。いま粒子の運動の高調波成分を無視すると

$$\bar{u}_p = ae^{i\phi_p}e^{i\varepsilon t} + (u_s/A\omega_a), \quad \bar{Z} = \bar{Z}_0 + \bar{Z}_1 \quad (8)$$

と書けるから(7)式に代入し、定常項と振動項に分解すれば、

$$0 = H\bar{Z}_0 + \bar{G} \quad \therefore \varepsilon = \beta\bar{G}/Z_0^*H \quad (9)$$

$$iae^{i\phi_p}e^{i\varepsilon t} = H\bar{Z}_1 \quad \therefore ae^{i\phi_p} = HZ_1^*/(HZ_1^* + i)$$

あるいは

$$a = |HZ_1^*|/|HZ_1^* + i|, \quad \phi_p = \angle Z_1^* - \angle(HZ_1^* + i) \quad (10)$$

ここで  $Z_0^*$  および  $Z_1^*$  は(3)、(4)式の大カッコの中味であって、(10)式の誘導過程からわかるように  $Z_1^*$  については虚数部も含めて計算しなければならない。(9)(10)式から  $\varepsilon$ 、 $a$ 、 $\phi_p$  を

求めれば粒子の運動が計算できるのであるが、 $Z_0^*$ 、 $Z^*$ は直接あるいは間接にこれらの未知量を含んでいるので、実際の計算では次のような反復法を用いる。まず第0近似として Stokes の抵抗則から  $Z_0^*$ 、 $Z^*$  を決定し、(9) (10) 式より  $\varepsilon$ 、 $\alpha$ 、 $\phi_p$  の第1近似値を求める。つぎにそれらを用いて  $Z_0^*$  と  $Z^*$  を計算しなおし、(9) (10) 式から第2近似値を求める。このプロセスを逐次反復して第5近似値まで計算すると、通常は有効数字4桁まで収束した解がえられる。しかし(3) (4) 式はベキ級数で展開された近似式であるから、近似領域を大幅に超えた条件で用いると無意味な解を与えたり発散したりすることがある。勿論、後章で実験的に明らかにする領域内ではこうした不都合は生じない。

このようにして  $\alpha$ 、 $\phi_p$ 、 $\varepsilon$  が計算されると粒子の速度振幅  $aA\omega_a$ 、音波との位相ずれ  $\phi_p$ 、沈降速度  $\varepsilon\sqrt{\nu\omega_a}$  の理論値が求められる。理論値と実験値の比較はこれらの量の総てについて行うことができれば理想的であるが、沈降速度の測定は沈降管内の空気対流のために高い精度が期待できず、また位相ずれの検出はかなりやっかいである。この実験ではさしあたり粒子の速度振幅をできるだけ高精度で測定し、理論値と比較することにした。

### 3. 実験装置

#### 3.1 装置の概略

実験装置を模式的に Fig. 1 に示した。内径 150 mm $\phi$ 、肉厚 5 mm、長さ 1220 mm のアクリル製沈降管の頂部には口径 16 cm のスピーカをとりつけ、これにより沈降管内に強力な音場をつくる。スピーカの直下には振動オリフィス型の単分散エアロゾル発生器<sup>5)</sup> の粒子発生部を下向きに取付けた。この装置の原理は、微小なオリフィス孔からの定速ジェット液流をオリフィスにかけた振動により千切るという素朴なものであるが、運転条件の適切な選定により、発生粒子の大き

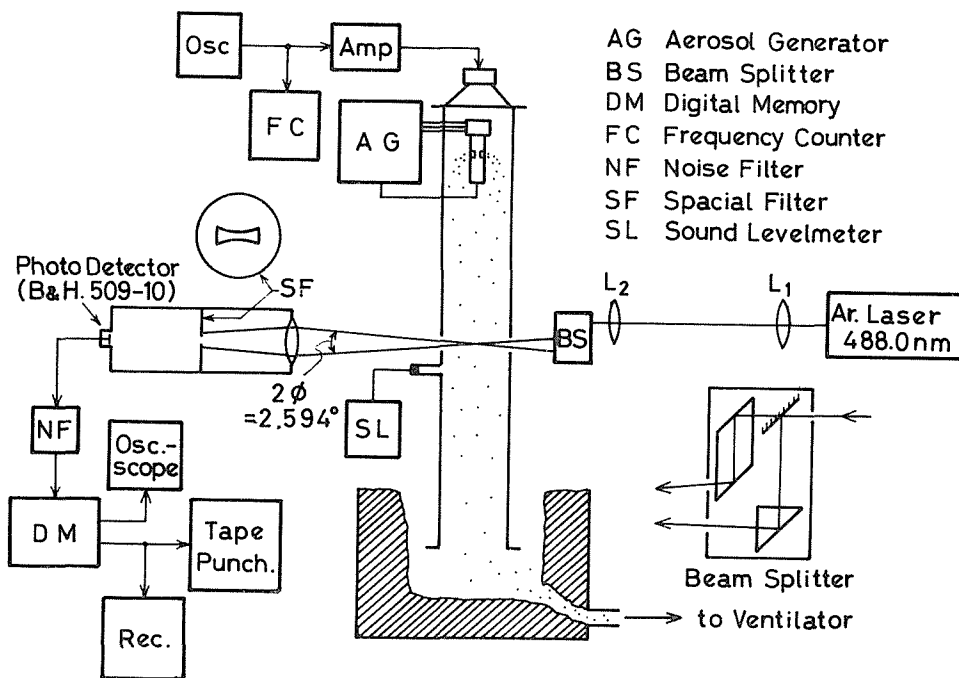


Fig. 1 Experimental apparatus

さの計算値からのずれは0.1%程度にできると言われている。筆者らはオリフィス加振用のセラミック振動体の共振周波数にも注意を払い、光散乱式の粒子計数器(リオン KC-01 改)を用いて最適な運転条件を決定した。したがって実際の粒子径は装置の運転条件から計算される値から1%もずれることはないと考えられる。

粒子発生部から約50 cm 下方の沈降管中心部にはレーザービーム交叉部があり、ここで粒子の運動が測定される。**Fig. 1**のレンズ  $L_1$ ,  $L_2$  は一種のコリメータを構成しており、 $L_1$ の焦点距離をかえるとビーム径が調節でき、この実験では1.2 mm $\phi$ あるいは3.0 mm $\phi$ とした。また  $L_2$ の位置はビーム交叉部にビームウエスト<sup>6)</sup>ができるように選定したので、この部分での光波面は平面波であるとみなせる。もしこの条件が満足されないと測定値に相当な誤差が含まれる可能性があるため<sup>7)</sup>、照射光の光学系の配置にはKogelnikらの解説<sup>6)</sup>にしたがい、十分に注意を払った。なお光源は10 mWのアルゴンイオンレーザー(波長=0.4880  $\mu$ m)である。

ここに用いたレーザー速度計はフリンジモードのものであるが、フリンジモードの速度計にとっては非常に粗い粒子の非定常速度が計測できるように特別な工夫を加えたものなので、次節でやや詳しく説明することにする。

粒子速度測定部から約5 cm 下方の管壁には内径13 mm $\phi$ の塩ビパイプを音圧測定用の分岐管として接続しており、これの他端に精密音圧計(リオン NA61, デジタル表示)のマイクロフォンを密着して固定した。この音圧計の指示値と粒子速度測定部における空気速度振幅  $A\omega_a$  の関係は、オレイン酸微粒子(直径=4  $\mu$ m,  $\rho=0.9$  g/cc)を沈降管内に浮遊させ、後述のレーザー速度計を用いて校正した。校正周波数は25, 50, 125 Hzであるが、各周波数に対して実測値の不偏標準偏差はそれぞれ平均値の0.4, 0.6, 0.9%にすぎず、音圧計の指示精度が $\pm 0.05$  dB (0.6%)であることを考えれば、マイクを粒子速度検出位置に設置できない事による測定精度の劣下は殆んどないといえる。なおオレイン酸微粒子の運動追従性は125 Hzにおいても99.9%以上であり、事実上空気と一緒に運動しているとみなしてよい。したがって音圧計による空気速度振幅の測定誤差は、温度と大気圧の補正を加えれば1%以下にできる。また音波の周波数はユニバーサルカウンタ(岩通 UC6141)により正確に測定することにした。

### 3. 2 空間フィルタを用いたレーザー速度計

いわゆるレーザドブラ流速計(以下LDVと略す)には多数の型式があるが<sup>8)</sup>、粒子の個数濃度が希薄な場合の測定に適し、かつ調整が容易な型式はフリンジモードLDVである。この型式のLDVでは、1本のレーザービームから分割した2本の等強度のビームを適当な角度をもたせて交叉させ、そこにフリンジ(干渉縞)を形成する。このフリンジ間隔はレーザー光の波長と交叉角から正確に計算できる。光散乱粒子がフリンジを通過するとフリンジの明暗に応じて光を散乱するので、散乱光の強度変化の周波数(ビート周波数)とフリンジ間隔の積が、粒子速度のフリンジ面に垂直な成分を与えることになる。しかしこの型式のLDVも流体の速度測定が本来の目的であるから、光散乱粒子は数ミクロン以下であることが前提であり、もし粒子径がフリンジ間隔より大きくなると、粒子に当る光の強度が平均化されるため、ビート信号が得にくくなる。これについてFarmer<sup>9)</sup>は理論的な解析を行い、粒子の直径が大きくなるにつれビート信号が相対的に弱まり、とくにフリンジ間隔の1.22倍, 2.23倍, 3.24倍, 4.24倍, 5.24倍……の直径ではビート信号が完全に消滅することを予測した。筆者らは受光レンズの焦平面上に特殊な形状のスリット(空間フィルタ)を設けることにより、この欠点が大幅に改善できることを見出したので本節で説明する。

この型式のLDVの機能を正しく理解するためには上記の説明は不十分であって誤解をまねく。正しくはAdrianら<sup>10)</sup>の一般的な解析によるべきであって、要するに2本のビームによって照射された粒子からの散乱光が干渉し、粒子速度に対応するビート信号が得られるのである。しかしAdrianらの解析をそのままここで利用するならば、Mieの光散乱理論によって粒子からの散乱光を受光器全面にわたって詳細に計算しなければならないが、Mieの理論では閉じた解が得られていないため、粒子径が大きくなる程、計算項数が増加する<sup>11)</sup>。したがってここで問題にするような数十ミクロンの大きさの粒子にMie理論を用いることは実際的でない。そこで筆者らはMie理論のかわりにそれよりもはるかに簡単な回折理論を用いることにした。回折理論では偏光現象が取扱えないし、粒子からの反射光、透過光、回折光の間の相互干渉効果も評価できないのでMie理論ほど精密ではないが、粒子径が光の波長より十分大きく、かつ光軸付近の前方散乱光を問題にする限り、実用上十分に正確な結果が期待できる。特に大きな利点は、受光レンズの焦平面上の回折光の強度分布がFraunhoferの回折として直接的に計算できることである。これは空間フィルタの形状決定にとって重要なことである。

さて、ここで計算しようとするものは、2本の等強度のビームで照射された粒子からの回折光が、受光レンズの焦平面上でどのように分布するかという事である。2本の照射ビームの中心線を含む平面を $x-z$ 平面とし、中心線の交点を原点に、また中心線の2等分線を $z$ 軸に選ぶ。

(Fig. 2)ここでは簡単のため、粒子が $x$ 軸に沿ってビームの交点(原点)付近を通過する場合だけを扱うが、これは空間フィルタの機能の説明にとって本質的な仮定ではない。本来、回折理論では平面遮蔽の場合しか取扱えないのであるが<sup>12)</sup>、球形粒子に対してはそれを入射光軸に直交する円板とみなして計算することが習慣になっている。今の場合、2本の照射光 $u_1, u_2$ に対して別々の円板 $S_1, S_2$ を考えることになる。さらに、Babinetの定理<sup>13)</sup>によって、円板からの回折光はそれと等しい直径をもつ円形開口を通り抜けた光波として計算できる。(ただし位相は $\pi$ だけずれるがここでは問題にならない。)そこでこの計算では、 $z$ 軸に対して角 $\phi$ をなす十分に太い平面波 $u_1$ が光軸に直交する円形開口 $S_1$ を通過して受光レンズの焦平面上の一点 $P$ に達したときの $P$ 点上の波動 $u_{p1}$ を求める。この計算に必要な次式はSommerfeldの回折理論<sup>12)</sup>を筆者らの目的に利用し易い形に変形したものである<sup>14)</sup>。

$$u_{p1} = \frac{k \cos^2 \theta}{2\pi i f} \iint_{S_1} u_{s1} \exp(ikl) dS_1 \quad (11)$$

ここで $k$ は光の波数(=  $2\pi/\lambda$ ),  $f$ は受光レンズの焦点距離,  $i$ は虚数単位,  $u_{s1}$ は開口 $S_1$ 内

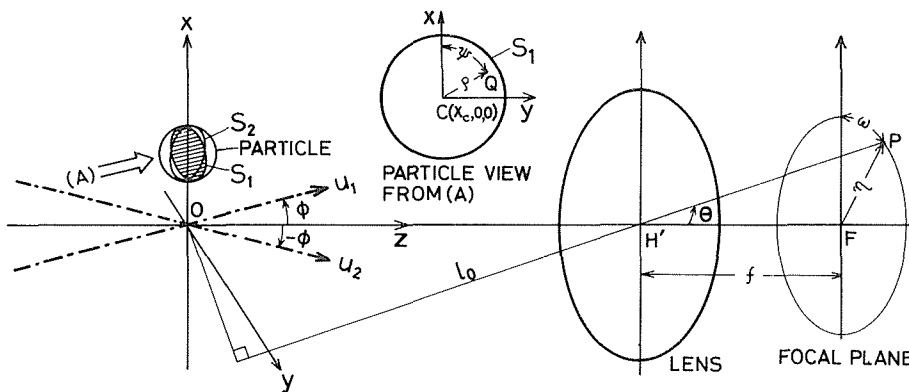


Fig. 2 Coordinate systems for analyzing a fringe-mode LVD by diffraction theory

での入射光の波動を示す。また  $l$  は開口  $S_1$  内の任意の点  $Q$  から  $P$  までの光学距離であって、原点から  $P$  までの光学距離を  $l_0$  とすれば、空气中で

$$l = l_0 - \sin \theta \cos \omega (\rho \cos \phi \cos \psi + x_c) - \rho (\sin \theta \sin \omega \sin \psi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi) \quad (12)$$

となる。ただし  $\rho$  は点  $Q$  と開口の中心  $C(x_c, 0, 0)$  の間の距離、 $\psi$  は点  $Q$  の光軸のまわりの回転角、つまり線分  $CQ$  が  $x-z$  平面となす角である。また  $\theta$  は  $P$  とレンズの中心  $H'$  (厳密には像主点) を結ぶ直線が  $z$  軸となす角であり、 $\omega$  は  $P$  の  $z$  軸のまわりの回転角である。いま原点における照射光の波動を

$$u_1(0, 0, 0) = u_2(0, 0, 0) = \sqrt{T_0} \exp(-i\Omega t) = T$$

とすれば、開口  $S_1$  内の波動はいたる所で同位相であるから

$$u_{s1} = T \exp(ikx_c \sin \phi) \quad (13)$$

となる。(12), (13) 式を (10) 式に代入し、 $S_1$  に関して面積分すると次式が得られる。

$$u_{p1} = G \cdot \exp(ikx_c \sin \phi) \cdot \Lambda_1(\xi_1) \quad (14)$$

照射光  $u_2$  に対しては  $\phi$  を  $(-\phi)$  で置きかえればよく、

$$u_{p2} = G \cdot \exp(-ikx_c \sin \phi) \cdot \Lambda_1(\xi_2) \quad (15)$$

ここで

$$\xi_1 = r_0 k \{ \sin^2 \theta \sin^2 \omega + (\sin \theta \cos \omega \cos \phi - \cos \theta \sin \phi)^2 \}^{1/2} \quad (16)$$

$$\xi_2 = r_0 k \{ \sin^2 \theta \sin^2 \omega + (\sin \theta \cos \omega \cos \phi + \cos \theta \sin \phi)^2 \}^{1/2} \quad (17)$$

$$G = \frac{r_0^2 k \cos^2 \theta}{if} \sqrt{T_0} \exp\{ik(l_0 - x_c \sin \theta \cos \omega) - i\Omega t\} \quad (18)$$

$$\Lambda_1(\xi) = J_1(\xi)/\xi \quad J_1: 1\text{次} \text{の Bessel 関数} \quad (19)$$

なお  $r_0$  は円形開口の半径であるが、粒子の半径に等しいとおける。したがって  $P$  点における回折光のエネルギー流束は\*)

$$\begin{aligned} I_p &= |u_{p1} + u_{p2}|^2 \\ &= I_0 \left( \frac{r_0^2 k \cos^2 \theta}{f} \right)^2 \{ \Lambda_1^2(\xi_1) + \Lambda_1^2(\xi_2) + 2\Lambda_1(\xi_1)\Lambda_1(\xi_2)\cos(2kx_c \sin \phi) \} \end{aligned} \quad (20)$$

さて粒子の中心  $x_c$  が移動すると、 $I_p$  は最後の項の寄与により周期的に変動することがわかる。これが回折理論によって解釈されたビート信号の由来である。もし  $x_c = vt$  ならば、その変動の周波数は  $vk \sin \phi / \pi$  となるが、これは  $v$  をフリンジの間隔  $\pi/k \sin \phi$  (= 波長 /  $2 \sin \phi$ ;  $2\phi$  がビーム交叉角) で除した値に等しい。その他の項は  $x_c$  に関係せず、ペDESTAL と呼ばれる直流成分を与える。

関数  $\Lambda_1(\xi)$  は  $\xi$  の増加に伴ない正負の領域を振動しながら減衰する。ところでビート信号を表わす (20) 式第3項は係数として  $\Lambda_1(\xi_1)\Lambda_1(\xi_2)$  を含んでいるから、 $\Lambda_1(\xi_1)$  と  $\Lambda_1(\xi_2)$  が同符号の場合と異符号の場合ではビート信号の位相が逆転することがわかる。このことがフリンジモードの LDV では大きな粒子に対してビート信号が得にくくなる原因と考えられるから、ここで少し詳しく調べることにする。

(20) 式は、受光レンズの焦平面での  $u_1$  による粒子の回折光 (第1項) と  $u_2$  による回折光 (第2項) および2つの回折光の干渉効果 (第3項) を表わしている。いま個々の回折光の中心を  $P_1$ ,

\*) 円形開口の場合には (20) 式で正しいが、球形粒子の回折光では  $u_{p1}$ ,  $u_{p2}$  以外に照射光も焦平面に達するのでそれらの間に複雑な干渉が起る。しかし照射光を十分に太くしておけば照射光との干渉が起る領域は非常に狭く、しかもその領域は下記の空間フィルタによって完全に除外されることになるので、ここでは回折光同志の干渉だけを考えればよい。

$\mathbf{P}_2$  とすると、それらの点の位置はそれぞれ  $\zeta_1 = 0$ ,  $\zeta_2 = 0$  を満足する点であるので、(16), (17) 式から ( $0 \leq \phi, \theta \ll \pi/2$  に注意して)

$$\mathbf{P}_1 \text{ に対して } \theta_1 = \phi, \omega_1 = 0; \mathbf{P}_2 \text{ に対して } \theta_2 = \phi, \omega_2 = \pi$$

であることがわかる。更に、 $z$  軸と焦平面の交点を原点にした極座標  $(\eta, \omega)$  でこれらを表わせば、

$$\mathbf{P}_1 \text{ に対して } \eta_1 = f \tan \phi, \omega_1 = 0; \mathbf{P}_2 \text{ に対して } \eta_2 = f \tan \phi, \omega_2 = \pi \quad (21)$$

これらの点は 2 本の照射ビームの幾何光学的な像位置に一致している。ここで回折理論が光軸付近の前方散乱光に対してのみよい近似になる事を思い起せば、上記の解析は  $\phi$  と  $\theta$  が小さな角であることが前提になる。また実際の装置でもそれらは  $5^\circ$  以下の角であることが多い。そこで

$$\cos \theta = \cos \phi = 1, \sin \theta = \tan \theta, \sin \phi = \tan \phi$$

なる近似が許されるとすれば (16), (17) 式は

$$(f \zeta_1 / r_0 k) = \{f^2 \tan^2 \theta + f^2 \tan^2 \phi - 2f \tan \theta \cdot f \tan \phi \cos \omega\}^{1/2} \quad (22)$$

$$(f \zeta_2 / r_0 k) = \{f^2 \tan^2 \theta + f^2 \tan^2 \phi + 2f \tan \theta \cdot f \tan \phi \cos \omega\}^{1/2} \quad (23)$$

(21) ~ (23) 式をよく見ると、第 2 余弦法則から  $\zeta = \text{const}$  にする  $\eta (= f \tan \theta)$  と  $\omega$  の焦平面上での軌跡は、それぞれ  $\mathbf{P}_1$  および  $\mathbf{P}_2$  を中心にした半径  $f \zeta / r_0 k$  の円であることがわかる。 $\Lambda_1(\zeta)$  には無数の零点  $\zeta_n^0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) があるが、それらの零点の前で  $\Lambda_1(\zeta)$  の符号が逆転する。そこで  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  を中心にして半径  $f \zeta_n / r_0 k$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) の同心円を描けば、 $\Lambda_1(\zeta_1)$  と  $\Lambda_1(\zeta_2)$  が同符号の領域と逆符号の領域を簡単に識別することができる。なお零点  $\zeta_n^0$  に対しては

$$\zeta_n^0 = \pi \left\{ n + \frac{1}{4} - \frac{0.151982}{(4n+1)} + \frac{0.015399}{(4n+1)^3} - \frac{0.245270}{(4n+1)^5} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

なる近似式が成立する。

**Fig. 3** は  $\phi = 1.297^\circ$ ,  $r_0 k = 386.3$  ( $r_0 = 30 \mu\text{m}$ ),  $f = 210 \text{ mm}$  の条件に対して作図した例である。図の塗りつぶした部分では  $\Lambda_1(\zeta_1)$  と  $\Lambda_1(\zeta_2)$  は同符号であり白ヌキ部では逆符号である。したがって黒塗り部と白ヌキ部ではビート信号の位相が逆になり、焦平面を通過する回折光を無制限に光検出器に入射させるとビート信号はかえって弱まることわかる。同心円の半径は  $r_0$  に逆比例するから、その間隔は  $r_0$  が大きな程狭くなるため、上記の不都合は粒子径が大きくなるにしたがい著しく現われる。筆者らは (20) 式を十分に広い焦平面 ( $\theta_{\text{max}} = 5^\circ$  とした) に関して数値積分したところ、Farmer<sup>9)</sup> の解析結果と同様に、粒子径が大きくなるにつれビート信号が得にくくなり、とくにフリンジ間隔の 1.22 倍, 2.24 倍……付近の直径をもつ粒子ではビート信号が完全に消滅することがわかった。この不都合を軽減するための対策は **Fig. 3** を見れば明らかである。すなわち、焦平面に空間フィルタを設け、 $\Lambda_1(\zeta_1)$  と  $\Lambda_1(\zeta_2)$  が同符号 (あるいは異符号) の領域だけを光が通過できるようにすればよいわけである。こうした考えにより、**Fig. 3** の点線を境に  $y$  軸に近い部分を切り抜いたスリットを製作し、これを空間フィルタとして用いることにした。これの使用により、直径  $60 \mu\text{m}$  (フリンジ間隔の約 5.5 倍) 以下の粒子に対してはビート信号が消滅することなく、かつペDESTAL 成分に対するビート成分の相対強度 (これをビジビリティと称する) は強められるものと期待できる。

### 3. 3 LDV 信号の処理

通常の LDV では非常に狭い領域を通過する粒子の瞬間的な速度の計測が目的なので、測定領域内での粒子速度の変動はあまり問題にしない。しかしここでの測定では音場中で振動する粒子の、ほぼ一周分運動を追跡しなければならないので、例えば周波数トラックのような通常の処理装置は利用できない。この装置では LDV からの信号を 4 Kwords のデジタルメモリに一旦記

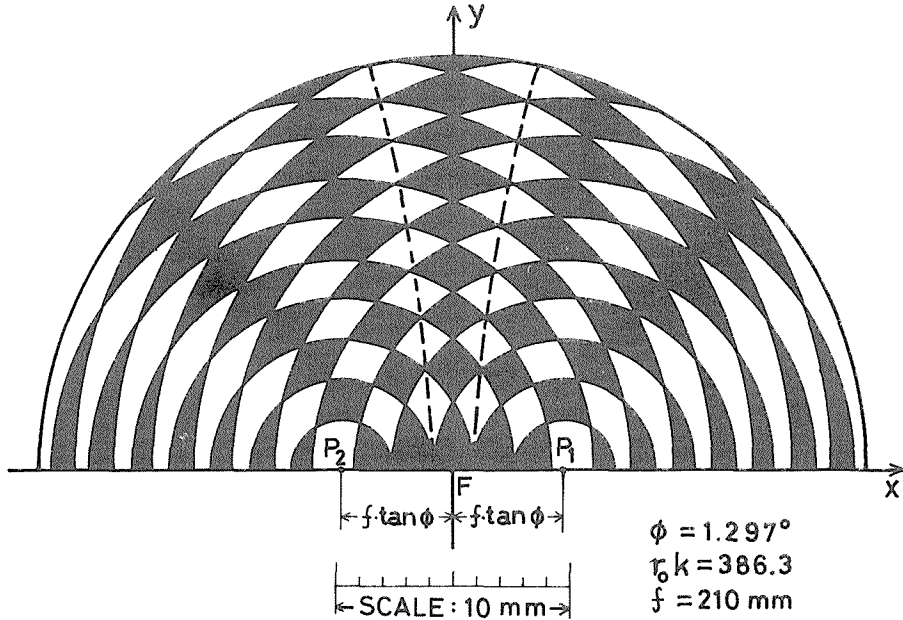


Fig. 3 Schematic representation of beat-signal phase at the focal plane

憶させた後、信号が音波の周期の75%以上にわたって記録されているものだけを紙テープに出力させ、それを次のようにしてミニコンで処理した。

この測定では刻々変化する粒子速度と時刻の関係を重視するので、ビート周波数はビート信号の半周期毎に求めることにした。LDVからの信号は、速度情報を含むビート成分（**B成分**と略記する）が、さしあたり利用価値のないペDESTAL成分（**P成分**と略記する）に重畳したものである。(20)式では、**P成分**は完全な直流であるような説明をしたが、実際には照射光に強度分布があるため時間的に変動する。このため出力信号（**B + P成分**）が極値になる時刻は**B成分**が極値をとる時刻と一致せず、出力信号の極値に着目してビート周波数を求めると誤差が大きくなる。そこでここでは出力信号の隣接する山と谷（あるいは谷と山）の間で、傾斜が最も強くなる時刻 $T_n$ を最小自乗法によって順次算出し、これからビート周波数 $f_b$ とそれに対応する時刻 $t_n$ を求めた。

$$f_b(t_n) = 0.5 / (T_{n+1} - T_n), \quad t_n = (T_{n+1} + T_n) / 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

$f_b(t_n)$ にフリッジ間隔（この装置では $10.78 \mu\text{m}$ ）を掛ければ粒子速度 $u_p(t_n)$ になるので、粒子速度と時刻の関係がビート信号の半周期毎に得られる。最後に粒子速度 $u_p(t_n)$ と $t_n$ の離散的な関係を最小自乗法によって次式で近似し、粒子の速度振幅 $aA\omega_a$ と定常速度 $u_0$ を求めた。

$$u_p(t) = aA\omega_a \sin(\omega_a t + \phi_p) + at + u_0 \quad (26)$$

なお音波の角周波数 $\omega_a$ はユニバーサルカウンタによって正確に測定できる。したがって上式で決定すべきパラメータは $aA\omega_a$ ,  $\phi_p$ ,  $\alpha$ ,  $u_0$ の4個であるが、これに対し $u_p(t_n) - t_n$ のデータは150~400組もとれるので、この方法によって決定されたパラメータの信頼性は相当に高いものと考えられる。また $\alpha$ の項は、沈降管内に生じる不安定な空気対流によって、見掛の沈降速度が時間的に変動する分を補償する目的に加えておいたが、この項を省略しても $aA\omega_a$ の値はあまり変化せず、最大で3%、通常は0.5%以下の影響しかみられなかった。

#### 4. 測定結果

Farmer<sup>9)</sup>によれば(また筆者らの計算でも), 通常のフリンジモード LDV ではビート信号が消滅してしまう粒子径が存在することはすでに述べた。この装置ではそれらは 13.2, 24.0, 34.9, 45.7, 56.5  $\mu\text{m}$ …の粒子直径に対応する。そこで空間フィルタの効果を確認する意味も含め, 45.46  $\mu\text{m}$  と 57.28  $\mu\text{m}$  の **DOP** (フタル酸ジオクチル,  $\rho=0.9861 \text{ g/cc}$ ) 液滴粒子および 35.34  $\mu\text{m}$  の **TBE** (1.1.2.2 テトラブロモエタン,  $\rho=2.964 \text{ g/cc}$ ) 液滴粒子の音場中での運動測定を行った。その結果は 2 章で述べた理論値とともに **Table 1** に示してある。

まずビート信号のビジビリティ (= **B** 成分の振幅/**P** 成分) については, 57.28  $\mu\text{m}$  の粒子に対してさえ 30%以上が確保でき, 35.34  $\mu\text{m}$  の粒子ではほぼ 100%に達するものも多数みられた。ビジビリティは粒子が Fig. 2 の  $x-y$  平面上を移動しない限り劣下するので, ここでの結果は満足すべきものである。もし空間フィルタを使用しなければ, 35.34  $\mu\text{m}$  の **TBE** 粒子に後述の粒度補正を加えても, ビジビリティはせいぜい 5%であり, 57.28  $\mu\text{m}$  の **DOP** 粒子にあっては 1%以下であろうと推論される<sup>9)</sup>。したがって空間フィルタはビジビリティの改善に大きな効果を発揮するといえる。

**Table 1** には, 粒子の相対振幅  $a$  (= 粒子の振幅/音波の振幅) の実測平均値とその不偏標準偏差を示した。表からわかるように, 一つの測定例を除き (**TBE**,  $A\omega_a=37 \text{ cm/s}$ ), 不偏標準偏差は平均値の 2%以下であって, この種の実験としては非常に高精度の測定ができたものと考えられる。なお測定数は各条件に対し 4~7 である。

最後に粒子の相対振幅  $a$  の理論値と実験値の比較をする。45.46  $\mu\text{m}$  の **DOP** 粒子に対しては, 10  $\text{cm/s}$  の  $A\omega_a$  (音波の速度振幅) で周波数は 25, 50 Hz, 25  $\text{cm/s}$  の  $A\omega_a$  で 125 Hz の 3 条件で測定した。表中の実験データの欄には Stokes 式による計算値と Basset 式<sup>15)</sup> による計算値を, それぞれ **S** および **B** の記号を付して示した。また筆者らの計算による理論値の欄にはパラメータ  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$  の値を付記してある。上記の比較的穏やかな条件でも Stokes 式は実測値から明らかにずれており, 定常近似が成立していない事がわかる。しかし Basset 式と筆者らの計算値の差は僅少で, いずれも実測値によく一致している。次に粒子径を 57.28  $\mu\text{m}$  にしたときの実験値をみると, Basset 式はもはや実測値と一致せず, 筆者らの計算値だけが  $A\omega_a=20 \text{ cm/s}$  ぐらいまで良好な一致を示している。以上のデータから筆者らの理論計算が精度よく成立するための条件を調べてみると

$$\lambda < 0.16 \quad \beta < 2.9 \quad \varepsilon < 1.4 \quad (27)$$

であることが推定できる。

もっと激しい条件ではどのような事が起るかを観察するため, 比重が大きい **TBE** の液滴粒子を用いて実験した。**TBE** は **DOP** に比較するとかなり揮発性があり, 粒子径の計算値 (35.34  $\mu\text{m}$ ) はやや信頼性に乏しく,  $a$  に対する理論値は 2 種の粒度について計算した結果を示した。粒子径を 33.5  $\mu\text{m}$  に仮定すると  $A\omega_a=10 \text{ cm/s}$  では筆者らの理論式の適用範囲内にかろうじておさまリ, 実測値との一致も良好であるから, **TBE** の粒子径は 33.5  $\mu\text{m}$  であったと推定してもよいであろう。そこで  $A\omega_a=25 \text{ cm/s}$  の欄をみると理論値では相対振幅  $a$  が減少するにもかかわらず, 実測値は僅かながら増加している。この傾向は 57.28  $\mu\text{m}$  の **DOP** でも  $A\omega_a=23 \text{ cm/s}$  の条件ですで見られている。更に音圧を上げ,  $A\omega_a=37 \text{ cm/s}$  にすると, データの分散が大きくなりやや精度に問題が残ろうが, それでも  $a$  の実測値が音圧の増加とともに増大する傾向は顕著である。なおこの条件では  $\beta$  が大きくなりすぎ (9), (10) 式の反復計算法が収束しないため, 理論値は計算

**Table 1.** Comparison between experimental and calculated values for relative amplitude,  $a$ 

Particle	Acoustic freq. and $A\omega a$	Experimental $a \pm \sigma$	Present calc.	
<b>DOP</b> 45.46 $\mu\text{m}$ $\rho=0.9861$ g/cc	25 Hz 10 cm/s	0.7289 $\pm$ 0.0092 <b>S</b> : 0.7187 <b>B</b> : 0.7189	0.7364 $\lambda=0.072$ $\beta=2.019$ $\epsilon=1.210$	
		0.4830 $\pm$ 0.0070 <b>S</b> : 0.4591 <b>B</b> : 0.4721	0.4838 $\lambda=0.102$ $\beta=1.428$ $\epsilon=0.848$	
	50 Hz 10 cm/s	0.2252 $\pm$ 0.0014 <b>S</b> : 0.2024 <b>B</b> : 0.2206	0.2298 $\lambda=0.161$ $\beta=2.257$ $\epsilon=0.504$	
		125 Hz 25 cm/s		
	<b>DOP</b> 57.28 $\mu\text{m}$ $\rho=0.9861$ g/cc	50 Hz 10 cm/s	0.3415 $\pm$ 0.0053 <b>S</b> : 0.3095 <b>B</b> : 0.3271	0.3473 $\lambda=0.128$ $\beta=1.428$ $\epsilon=1.358$
			0.3408 $\pm$ 0.0023 <b>S</b> : 0.3095 <b>B</b> : 0.3271	0.3434 $\lambda=0.128$ $\beta=2.855$ $\epsilon=1.406$
50 Hz 20 cm/s		0.3486 $\pm$ 0.0013 <b>S</b> : 0.3095 <b>B</b> : 0.3271	0.3398 $\lambda=0.128$ $\beta=3.284$ $\epsilon=1.488$	
		50 Hz 23 cm/s		
<b>TBE</b> 35.34 $\mu\text{m}^*$ $\rho=2.964$ g/cc		50 Hz 10 cm/s	0.3204 $\pm$ 0.0053 <b>S</b> : 0.2736(0.3018) <b>B</b> : 0.2840(0.3120)	0.2978(0.3243) $\lambda=0.079(0.075)$ $\beta=1.428(1.428)$ $\epsilon=1.568(1.403)$
			0.3281 $\pm$ 0.0035 <b>S</b> : 0.2736(0.3018) <b>B</b> : 0.2840(0.3120)	0.2850(0.3165) $\lambda=0.079(0.075)$ $\beta=3.569(3.569)$ $\epsilon=1.852(1.534)$
	50 Hz 25 cm/s	0.3426 $\pm$ 0.0150 <b>S</b> : 0.2736(0.3018) <b>B</b> : 0.2840(0.3120)	.....(.....) $\lambda=0.079(0.075)$ $\beta=5.425(5.425)$ $\epsilon=.....(.....)$	
		50 Hz 37 cm/s		

\*This calculated diameter may be greater than the actual due to slight volatility of TBE.  
The values in parentheses are for 33.5  $\mu\text{m}$ .

できなかった。またこうした激しい条件では沈降速度も大幅に減少していることが観察されたが、音波によって誘導される空気対流のため分散が大きくなり、定量的な評価にはデータ量が不足しているため本報では触れないことにする。

さて、もしナビエ・ストークス式の非線形項が音場中の粒子のまわりの流れに対して重要でないならば、線形方程式の一般的性質から粒子の相対振幅  $a$  は音波の速度振幅  $A\omega_a$  に無関係なはずである。しかるに上記の実験データは  $a$  が  $A\omega_a$  の増加に伴ない増大していることを明らかにしている。したがって音場中の粒子のまわりの流れを考察する際に、ナビエ・ストークス式の非線形項は無視しえないものと考えられる。

## 5. 結 言

音場中の粒子のまわりの流れに関する筆者らの理論式の確認実験のため、数十マイクロンの粗大粒子の運動測定が可能なレーザ速度計を考案し製作した。この速度計はフリンジモードのレーザ流速計の長所を保ちつつ、フリンジ間隔の5倍以上の直径の粒子に対してもビジビリティが良好な測定を可能にするものである。これにより音場中の粒子の運動を実測したところ高精度の測定ができ、筆者らの理論式の妥当性が確かめられ、かつその適用範囲も明らかにできた。

(謝辞) 流体力学的な計算の一部に携わった本講座卒業生、松好秀章氏(現、東レエンジニアリング)、実験装置の組立に協力してくれた卒業生、三谷成康氏(現、日本鋼管)、また筆者らと共に実験を行ってくれた卒業生、野村伸一郎氏(現、豪州BHP)および在学生、下森裕君に感謝いたします。またこの研究に対し文部省科学研究費(一般研究B)の援助を受けた事を付記し謝意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) D. T. Shaw and K. W. Tu : J. Aerosol Sci., **10** (1979), p 319
- 2) 国枝正成ら：化学工学協会北海道大会講演要旨集(1979. 7, 札幌) p 156
- 3) Milton van Dyke : Perturbation Method in Fluid Mechanics (1964), p 77  
Academic Press および N. Riley : J. Inst. Maths. Applics., **3** (1967), p 419
- 4) J. R. Ockendon : J. Fluid Mech., **34** (1968), p 229
- 5) R. N. Berglund and B. Y. H. Liu : Envir. Sci. and Techn., **7** (1973), p 147
- 6) H. Kogelnik and T. Li : Appl. Opt., **5** (1966), p 1550
- 7) J. B. Abbis, T. W. Chubb and E. R. Pike : Opt. and Laser Techn., **6** (1974), Dec, p 249
- 8) 三品博達, 朝倉利光 : 応用物理, **42** (1973), p 560
- 9) W. M. Farmer : Appl. Opt., **11** (1972), p 2603 and **13** (1974), p 610
- 10) R. J. Adrian and R. J. Goldstein : J. Phys. E (Sci. Instrm.), **4** (1971), p 505
- 11) M. Born and E. Wolf : Principle of Optics, 2nd rev. ed. (1964), p 649, Pergamon
- 12) A. Sommerfeld (瀬谷, 波岡訳) : 理論物理学講座IV 光学 (1969), p 191, 講談社
- 13) たとえば 久保田宏 : 波動光学 (1971), p 264, 岩波書店
- 14) 中島耀二, 田中達夫 : 化学工学, **38** (1974), p 316
- 15) A. B. Basset : Phil. Trans., **179** (1888), p 43