



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	CVS多バース駅モデルのマルコフ再生理論による解析
Author(s)	栗原, 正仁; 中田, 勝啓; 加地, 郁夫
Citation	北海道大學工學部研究報告, 104, 23-34
Issue Date	1981-05-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41677
Type	departmental bulletin paper
File Information	104_23-34.pdf



CVS 多バース駅モデルのマルコフ再生理論による解析

栗原正仁* 中田勝啓** 加地郁夫*

(昭和55年12月27日受理)

An Analysis of a CVS Multiberth Station Model by means of the Markov Renewal Theory

Masahito KURIHARA, Katsuhiro NAKADA and Ikuo KAJI

(Received December 27, 1980)

Abstract

CVS (Computer-controlled Vehicle System) is a traffic system where most of the stations are small and have only one berth, on which detailed stochastic studies have been reported. In case of heavy traffic, however, the single-berth station would not have enough capacity to satisfy this heavy demand. This leads one to consider a station which works with a number of berths, while no reports can be found on this subject.

In this paper, a stochastic model is developed which can treat such a multiberth station, through the analysis of which some basic characteristics are exposed that depend on the number of berths.

1. はじめに

CVS (Computer-controlled Vehicle System)^{1,2)} は、原則的には、1 バースの側線駅によって到来車を処理する交通システムで、これについては詳細な確率論的考察が報告されている^{3,4,5,6)}。しかし、他の交通機関との接点など、特に交通需要の大きい駅では1 個のバースでは客を処理しきれないことが予想される。従って、このような駅では並列に施設した複数個のバースによる処理方式が考えられるが、これに関する研究はまだ報告されていない。

本研究では、このような多バース駅における輻輳現象を表現する確率モデルを設定し、この駅の状態推移をマルコフ再生過程^{7,8)}として定式化し、解析する。これにより、平均入駅時間間隔、入駅率、利用率などの諸量を求め、バースの数と共に変化する多バース駅の特性を明らかにする。

2. CVS 多バース駅モデル

2.1 駅 部

CVS では通過車線である本線から分岐した支線上に乗降駅を設け、駅に停車中の車両が後続車の通過を妨害しないように考慮している。図1は本線と駅との関係を示している。駅には n 個のバースが並列に設けられており、各バースの確率論的な性質は等しいものとする。駅Sを目的とする乗

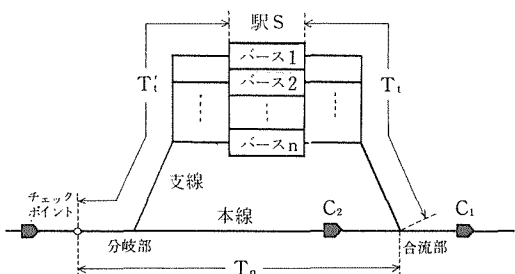


図 1 CVS nベース駅概略図

* 電気工学科 系統工学講座

** 玉川大学工学部情報通信工学科

客のある車両(入駅希望実車),あるいは,駅Sに乘客がいるとき到来した乗客のない車両(空車)は,チェックポイントと呼ばれる点を通過した時に駅Sに空いているバースがあれば本線から分岐して駅Sに入る。入駅希望実車であっても,空バースがない場合には本線側を走行し,適当な経路をう回して再び駅Sに向う。

2.2 到来車両

本線への車両の到来はパラメータ λ のポアソン到来であるとする。すなわち,特に条件付きでなければ,任意の時点において次に車両がチェックポイントを通過するまでの時間はパラメータ $1/\lambda$ の指数分布である。駅には必ず客がいるものとし,入駅希望実車および空車を入駅希望車とし,他駅を目的とする実車を入駅非希望車とする。両車はいずれもポアソン到来で,それぞれの到来頻度が $\beta\lambda$, $(1-\beta)\lambda$ であるとする。 β は入駅希望車混入率である。

2.3 乗降時間

便宜的に,実質乗降時間にチェックポイントから駅に到達するまでの時間を加えたものを乗降時間とする。乗降時間分布は各バースで独立で,平均 $1/\mu$ の指数分布とする。任意の分布の場合は後にシミュレーションを行ない,指数分布の場合と比較する。

2.4 出発可否判定

図1に示すように,駅Sに停車中の車両が発車してから合流部に達するまでの時間を T_t 。本線を走行する車両がチェックポイントを通過してから合流部に到達するまでの時間を T_h で表わす。本線を走行する車両 C_1, C_2 と駅を出発した車両 S_1 とが合流部で衝突することを避けるためには, C_1, C_2 の車頭時間間隔 T_x が駅からの車 S_1 の流入を受け入れられるよう十分大きくなければならない。いま, C_1 が合流部を通過してから $T/2$ 経過したのち S_1 が合流部に達するとし, S_1 と C_2 との車頭時間間隔が $T/2$ 以上であれば, C_1, C_2 間に S_1 が安全に流入できるものとする。

図2は, S_1 が合流部に到達した瞬間の S_1, C_1, C_2 の時間関係を示し,さらに S_1 が駅を出発する瞬間の S_1, C_1, C_2 の相対的時間関係を示した図である。 $T_h = T_t - T/2$ の関係を満たす地点をチェックポイントとすれば,駅Sに停車している車両の出発可否は,チェックポイントを通過する車両の車頭時間間隔から判定できる。本線到来車がチェックポイントを通過してから次の到来車がチェックポイントを通過するまでの間の任意の時点で出発準備が完了する場合は図2において C_1^* が存在せず,出発準備完了時刻と C_2^* のチェックポイント通過時刻との時間間隔が T_x であると考えれば, C_1^* が存在する場合に準じて取扱える。

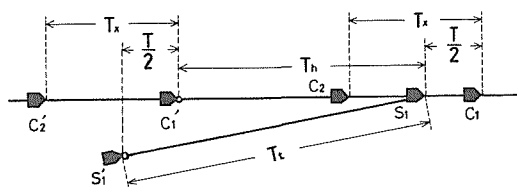


図2 相対的車頭時間間隔

図2は, S_1 が合流部に到達した瞬間の S_1, C_1, C_2 の時間関係を示し,さらに S_1 が駅を出発する瞬間の S_1, C_1, C_2 の相対的時間関係を示した図である。 $T_h = T_t - T/2$ の関係を満たす地点をチェックポイントとすれば,駅Sに停車している車両の出発可否は,チェックポイントを通過する車両の車頭時間間隔から判定できる。本線到来車がチェックポイントを通過してから次の到来車がチェックポイントを通過するまでの間の任意の時点で出発準備が完了する場合は図2において C_1^* が存在せず,出発準備完了時刻と C_2^* のチェックポイント通過時刻との時間間隔が T_x であると考えれば, C_1^* が存在する場合に準じて取扱える。

駅にいる車両の出発準備が完了したとき,次の到来車両がチェックポイントを通過するまでの時間 T_x が T より大きければ出発可とされ出発する(第1回判定)。出発不可と判定されたときは車両がチェックポイントを通過するまで待ち,そのとき次の到来車両がチェックポイントを通過するまでの時間 T_x が T より大ならば,出発可とされ出発する(再判定)。以上の2種の判定は区別せず,単に「判定」と呼ぶ。また,判定を受ける車1台(または0台)を判定車と呼び,第1回判定から出発可となる時間を出発待ち時間という。

乗降終了時に他の車(判定車)が出発待ちしているときは,その車は判定車となり得ず判定待ちとなる。また,乗降終了時に,判定車が出発して時間 T を経過していないときにもその車は判定待ちとなる。判定車が出発可となり出発した時は,その後時間 T を経過した時に判定待ちの車

があれば、そのうちの1台を判定車とする。ここで、時間 T は次々と駅を出発する車両の安全車頭時間間隔であり、既述のようにこれは $T/2$ でよいが、車両が出発可となり出発したときは時間 T が経過した時に初めて到来がポアソン過程に戻り、状態が再生点となり得る。従ってここでは、モデリングの便宜上、出発車両の安全車頭時間間隔は T としている。

3. 状態の定義と推移

3.1 状態の定義

時刻 t における判定車の数、判定待ちの車の数、乗降中の車の数、空バースの数をそれぞれ確率変数 W_t, X_t, Y_t, Z_t で表わす。このとき、次の関係が成り立つ。

$$W_t \in N_1, X_t \in N_{n-1}, Y_t \in N_n, Z_t \in N_n$$

$$W_t + X_t + Y_t + Z_t = n$$

$$W_t = 0 \quad \text{ならば} \quad X_t = 0$$

ただし、 N_i は集合 $\{0, 1, \dots, i\}$ 、 n はバースの数である。

この確率変数の組 (W_t, X_t, Y_t, Z_t) を n バース駅の状態と考えると解析が困難になるので、ここでは埋め込まれた確率過程を用いることにする。すなわち、 $W_t, \dots, Z_t$ が変化しても一般には状態の変化とはせず、ある時点（後述の再生点）を迎えた時ではじめて状態が推移する。

n バース駅の状態を $(v; w, x, y, z)$ で表わす。ここで、 w, x, y, z は、再生点において状態が推移してきた瞬間における W_t, X_t, Y_t, Z_t の値であり、以後 $W_t, \dots, Z_t$ が変化しても次の再生点までは変化しない。また、 v はこの状態への推移が入駅（後述の事象 A, F_v^1 ）によるものであるときは1、そうでないときは0とする。従って、以下の条件を満たすすべての組 $(v; w, x, y, z)$ が状態空間 S を形成する。

$$v \in N_1, w \in N_1, x \in N_{n-1}, y \in N_n, z \in N_n \quad (3.1a)$$

$$w + x + y + z = n \quad (3.1b)$$

$$w = 0 \quad \text{ならば} \quad x = 0 \quad (3.1c)$$

$$y = 0 \quad \text{ならば} \quad v = 0 \quad (3.1d)$$

ここで、(3.1d)の条件は、入駅によって状態が推移すれば必ず $v > 0$ となる、すなわち、 $v = 1$ ならば $v \neq 0$ であることから生ずる。 v は、 w, x, y, z が同じ値であっても入駅によって推移してきたか否かを区別するための情報であり、入駅時間間隔を求めるのに必要となる。もし、 $y > 0$ ならば同じ w, x, y, z に対して $v = 1$ の状態と $v = 0$ の状態の2つが存在する。ここで、 $v = 1, 0$ の状態集合をそれぞれ S_1, S_0 とすると、各集合に含まれる状態数は、

$$\begin{aligned} |S_0| &= (n+1)(n+2)/2, \quad |S_1| = n(n+1)/2 \\ |S| &= |S_0| + |S_1| = (n+1)^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

となる。以後、ベクトルで表現された状態を $1, 2, \dots, |S|$ に対応させ、状態を単に i として表わし、その各成分を $v_i, w_i, \dots, z_i$ と表わすこともある。

3.2 状態の推移

状態はある定められた時点を迎えてはじめて推移するが、この推移規則を図3に手続き的に示す。図において、中段の3つのブロックは状態が推移するまでの時間経過を表わしており、ここでのみ時間が消費される。他のブロックは分岐または変数の変化を表わしており、時間を消費しない。また、システムの起動時には駅には車両がなく、チェックポイントを通過した車もないものとしている。

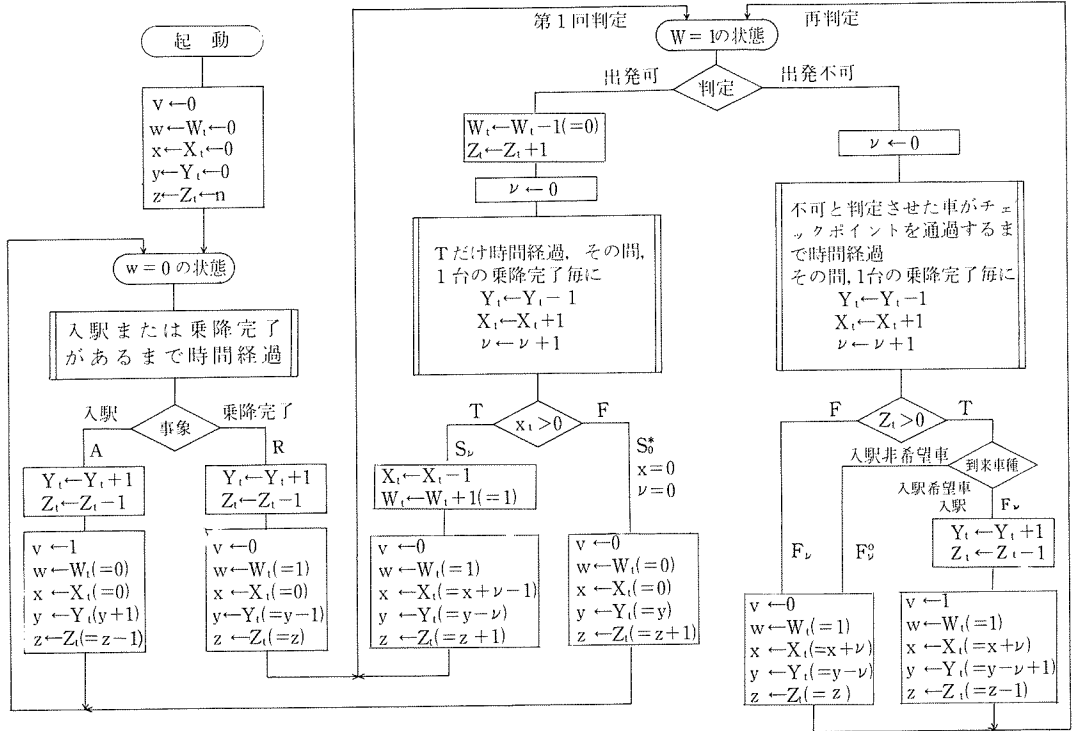


図 3 状態の推移

このような状態推移を考えると、状態が推移してきた時点においては、その後の推移はそれまでの経過にかかわらず、この時点での状態にのみ依存する。すなわち、これらの時点はすべて再生点となっている。従って、時刻 t_0 で状態が i に推移してきたとき、時刻 $t_0 + t$ までに直接 j に推移する確率を mass function $Q_{ij}(t)$ で表わすことができ、その Laplace-Stieltjes 変換(以下 LS 変換と略)を

$$q_{ij}(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) dQ_{ij}(t)$$

とする。以下の計算では、しばしば次の形の変換を用いる。

$$Q(t) = \int_0^t u(\tau - T) \exp(-a\tau) d\tau \text{ のとき } q(s) = \exp\{-(s+a)T\} / (s+a)$$

(3. 3)

ただし、 $u(t)$ は単位ステップ関数である。

次に、 $w=0$ および $w=1$ の状態からの推移規則を述べ、推移時間分布を求める。

3. 2. 1 $w=0$ の状態 ($v; 0, 0, y, z$) からの推移

$w=0$ の状態への推移は2通りある。すなわち、駅にいる車がすべて乗降中だったときに入駅希望車が到来して入駅した場合と、判定車が出発可と判定されて出発した後、時間 T を経過したが判定待ちの車がないため判定車が生じなかった場合である。いずれの場合も、この状態に推移してきた後は、乗降中の ν 台のうち1台が乗降終了した時点、またはそれ以前に入駅があったときはその時点で状態が推移する。前者を事象 R (ready) による推移、後者を事象 A (arrival) に

よる推移と呼ぶ。 $0 < y < n$ のとき、各々の推移時間分布は次のようになる。

$$Q_{(v;0,0,y,z)(0;1,0,y-1,z)}(t) = \int_0^t \mu y \exp(-\mu y \tau) \cdot \exp(-\beta \lambda \tau) d\tau \quad (3.4a)$$

$$Q_{(v;0,0,y,z)(1;0,0,y+1,z-1)}(t) = \int_0^t \beta \lambda \exp(-\beta \lambda \tau) \cdot \exp(-\mu y \tau) d\tau \quad (3.4b)$$

$y=0$ ($z=n$) のときは事象 R は起こらず、 $y=n$ ($z=0$) のときは事象 A が起こらないことを考えて同様に推移分布を計算すると、一般に $w=0$ の状態からの推移分布は LS 変換形で次のように求められる。式の左端には対応する事象を示す。

$$R: q_{(v;0,0,y,z)(0;1,0,y-1,z)}(s) = \begin{cases} \mu y / (s + \beta \lambda + \mu y), & 0 < y < n \\ \mu n / (s + \mu n), & y = n \end{cases} \quad (3.5a)$$

$$A: q_{(v;0,0,y,z)(1;0,0,y+1,z-1)}(s) = \beta \lambda / (s + \beta \lambda + \mu y), \quad y < n \quad (3.5b)$$

3.2.2 $w=1$ の状態 ($v; 1, x, y, z$) からの推移

$w=1$ の状態への推移は 3 通りある。第 1 は事象 R によるもの、すなわち、乗降中の車が乗降終了してただちに判定車となった場合であり、第 2 は出発可と判定された車が出発して時間 T が経過し、判定待ちの車が判定車となった場合である。いずれもこの状態に推移してきた時点で第 1 回判定を受ける。第 3 は出発不可と判定された車がチェックポイントを通過した場合であり、この場合、不可と判定されていた判定車は再判定を受けることになる。結局、3 つのどの場合においても、この状態へ推移してきた時点 t_0 で判定車が判定を受ける。この判定結果により、この状態からの推移のしかたが異なる。

出発可と判定された場合は判定車はただちに出發し、この後、時間 T を経過した時点 $t_0 + T$ で状態が推移する。この間、 $w=1$ にもかかわらず $W_t=0$ になっている。なお、時刻 t_0 においては出発可と判定させた車の車種を問うておらず、チェックポイントに到来するまでの時間 T_x には $T_x > T$ の条件のみがついている。この条件の下で $T_x - T$ は平均 $1/\lambda$ の指数分布に従うので、判定後 T だけ経過した時点ではこの車両の到来過程はもとのポアソン到来に戻る。この T の間、乗降終了車が ν 台あった場合を、事象 S_ν (success) による推移と呼ぶ。 T が経過した時点で判定待ちの車があればそのうちの 1 台が判定車となり、 $w=1$ の状態 $(0; 1, x + \nu - 1, y - \nu, z + 1)$ に推移するが、判定待ちがないときは $w=0$ の状態 $(0; 0, 0, y, z + 1)$ に推移する。これは $x=0$ かつ $\nu=0$ の場合に起こり、特に事象 S_0^* による推移と呼ぶ。

判定が出發不可だったときは、判定車は次の再判定の機会が来るまで待ち、その機会が来たとき、すなわち、出發不可と判定させた車がチェックポイントを通過する(これは T 以内に起こる)ときに $w=1$ の状態に推移する。このとき、空バースが無い場合、及び空バースがあっても到来車が入駅非希望車であるときは入駅が発生せず、状態は $(0; 1, x + \nu, y - \nu, z)$ となる。これをそれぞれ事象 F_ν , F_ν^0 (failure) による推移と呼ぶ。空バースがあり、かつ、到来車が入駅希望車の場合はその車は入駅し、状態は $(1; 1, x + \nu, y - \nu + 1, z - 1)$ となる。これを事象 F_ν^1 による推移と呼ぶ。

$x > 0$, $z > 0$ の場合は、 S_0^* と F_ν は起こらず、推移時間分布は次のようになる。

$$Q_{(v;1,x,y,z)(0;1,x+\nu-1,y-\nu,z+1)}(t) \quad (3.6a)$$

$$= u(t-T) \exp(-\lambda T) \cdot \binom{y}{\nu} \{1 - \exp(-\mu T)\}^\nu \{\exp(-\mu T)\}^{y-\nu}$$

$$Q_{(v;1,x,y,z)(0;1,x+\nu,y-\nu,z)}(t) \quad (3.6b)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \{1 - u(\tau - T)\} (1 - \beta) \lambda \exp(-\lambda \tau) \cdot \left(\frac{y}{\nu}\right) \{1 - \exp(-\mu \tau)\}^\nu \{ \exp(-\mu \tau) \}^{y-\nu} d\tau \\
Q_{(v;1,x,y,z)(1;1,x+\nu,y-\nu+1,z-1)}(t) & \quad (3.6c) \\
&= \int_0^t \{1 - u(\tau - T)\} \beta \lambda \exp(-\lambda \tau) \cdot \left(\frac{y}{\nu}\right) \{1 - \exp(-\mu \tau)\}^\nu \{ \exp(-\mu \tau) \}^{y-\nu} d\tau
\end{aligned}$$

$x=0$ のときは S_0^* が起こり得る。また $z=0$ のときは F_ν^0, F_ν^1 は起こらず F_ν が起こり得る。これらを考慮して、 $x=0$ または $z=0$ の場合について同様に分布を求め、これらを総合すると、 $w=1$ の状態からの推移時間分布は LS 変換で次のように得られる。

$$\begin{aligned}
S_\nu : q_{(v;1,x,y,z)(0;1,x+\nu-1,y-\nu,z+1)}(s) &= \eta_{y,\nu}(s) \quad (3.7a) \\
&\quad ; x > 0, 0 \leq \nu \leq y \quad \text{または} \quad x = 0, y > 0, 1 \leq \nu \leq y
\end{aligned}$$

$$S_0^* : q_{(v;1,0,y,z)(0;0,0,y,z+1)}(s) = \eta_{y,0}(s) \quad (3.7b)$$

$$F_\nu^0 : \quad (3.7c)$$

$$F_\nu : q_{(v;1,x,y,z)(0;1,x+\nu,y-\nu,z)}(s) = \begin{cases} (1-\beta)\rho_{y,\nu}(s); & z > 0 \\ \rho_{y,\nu}(s); & z = 0 \end{cases} \quad (3.7d)$$

$$F_\nu^1 : q_{(v;1,x,y,z)(1;1,x+\nu,y-\nu+1,z-1)}(s) = \beta \rho_{y,\nu}(s) \quad ; z > 0 \quad (3.7e)$$

ただし、(c) ~ (e) においては $0 \leq \nu \leq y$ 、また、 η 及び ρ は、

$$\eta_{y,\nu}(s) = \left(\frac{y}{\nu}\right) \{1 - \exp(-\mu T)\}^\nu \exp[-\{s + \lambda + \mu(y - \nu)\}T] \quad (3.8a)$$

$$\rho_{y,\nu}(s) = \lambda \left(\frac{y}{\nu}\right) \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^{\nu-j} \binom{\nu}{j} \frac{1 - \exp[-\{s + \lambda + \mu(y - j)\}T]}{s + \lambda + \mu(y - j)} \quad (3.8b)$$

であり、

$$\sum_{\nu=0}^y \eta_{y,\nu}(s) = \exp\{-(s + \lambda)T\} \quad (3.8c)$$

$$\sum_{\nu=0}^y \rho_{y,\nu}(s) = \lambda [1 - \exp\{-(s + \lambda)T\}] / (s + \lambda) \quad (3.8d)$$

が y にかかわらず成り立つ。

以上の分布においては、

$$Q_{ij}(0) = 0 \quad \text{for } i, j \in S$$

$$\sum_{j \in S} Q_{ij}(\infty) = \sum_{j \in S} q_{ij}(0) = 1 \quad \text{for } i \in S$$

が成立する。したがって、このモデルはマルコフ再生過程⁷⁾として扱える。

4. マルコフ再生理論による解析

4.1 滞在時間分布

状態が i に推移してきたとき、時間 t 以内に次の推移をする確率、すなわち、確率過程の状態 i における滞在時間分布を $B_i(t)$ 、その LS 変換を $b_i(s)$ とすると次式が成り立つ。

$$B_i(t) = \sum_{k \in S} Q_{ik}(t), \quad b_i(s) = \sum_{k \in S} q_{ik}(s) \quad (4.1)$$

すでに求めた $q_{ij}(s)$ より $b_i(s)$ を実際に求めると以下のようになる。

$$b_{v;0,0,n,0}(s) = \mu n / (s + \mu n) \quad (4.2a)$$

$$b_{v;0,0,y,z}(s) = (\beta \lambda + \mu y) / (s + \beta \lambda + \mu y), \quad y \neq n \quad (4.2b)$$

$$b_{v;1,x,y,z}(s) = [\lambda + s \cdot \exp\{-(s + \lambda)T\}] / (s + \lambda) \quad (4.2c)$$

平均滞在時間 $\bar{b}_i = [-\partial b_i(s) / \partial s]_{s=0}$ は次式となる。

$$\bar{b}_{v;0,0,n,0} = 1 / \mu n \quad (4.3a)$$

$$\bar{h}_{v,0,0,y,z} = 1/(\beta\lambda + \mu y), \quad y \neq n \quad (4.3a)$$

$$\bar{h}_{v,1,x,y,z} = \{1 - \exp(-\lambda T)\} / \lambda \quad (4.3c)$$

4.2 初期通過時間分布と平均再帰時間

状態 i から j への初期通過時間分布，すなわち，時刻 0 で i に推移してきたとき，時刻 t までに j に到達する確率を $H_{ij}(t)$ ，その LS 変換を $h_{ij}(s)$ とする。ただし， $i=j$ のときは時刻 t までに i から i への推移を含めて必ず 1 回は推移することを要する。

この過程は，時刻 t までに他の状態を経由することなく直接 j を訪れるか，もしくは，任意の時刻 u ($u < t$) に状態 k に推移し，その後 $H_{kj}(t-u)$ に従って j を訪れるのかのいずれかであるから次式を得る。

$$H_{ij}(t) = Q_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} \int_0^t H_{kj}(t-u) dQ_{ik}(u) \quad (4.4a)$$

$$h_{ij}(s) = q_{ij}(s) + \sum_{k \neq j} q_{ik}(s) h_{kj}(s) \quad (4.4b)$$

平均初期通過時間を $\bar{h}_{ij} = [-\partial h_{ij}(s)/\partial s]_{s=0}$ として， $h_{kj}(0) = H_{kj}(\infty) = 1$ であることに注意すれば上式より

$$\bar{h}_{ij} = \bar{b}_i + \sum_{k \neq j} q_{ik}(0) \bar{h}_{kj} \quad (4.5)$$

を得る。したがって，

$$(I - Q_0 I_j) \mathbf{h}_j = \mathbf{b} \quad (4.6)$$

となる。ただし，

Q_0 : $q_{ij}(0)$ を (i, j) 要素とするマトリクス

$\mathbf{h}_j$: h_{ij} を第 i 成分とする列ベクトル

$\mathbf{b}$: $\bar{b}_i$ を第 i 成分とする列ベクトル

I : 単位マトリクス

I_j : 単位マトリクスの (j, j) 要素を 0 としたマトリクス

ここで， Q_0 を推移確率行列とするマルコフ連鎖の平衡確率を行ベクトル

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{|s|})$$

とすると， π は次式から得られる。

$$\pi Q_0 = \pi, \quad \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_{|s|} = 1 \quad (4.7)$$

(4.6) 式の両辺に左から π を乗じ， $I_j = I - E_j$ (E_j は第 (j, j) 要素が 1 で他は 0 であるマトリクス) と置いて整理すると，平均再帰時間

$$\bar{h}_{jj} = \pi \mathbf{b} / \pi_j \quad (4.8)$$

が得られる⁹⁾。

4.3 平均入駅時間間隔と駅の評価尺度

時刻 0 で状態 i にいるとき，時刻 t までに状態 j を訪問する平均回数を $M_{ij}(t)$ ，その LS 変換を $m_{ij}(s)$ とする。最初時刻 u に j を訪問すると，その後， t までに $M_{jj}(t-u)$ 回訪問するので

$$M_{ij}(t) = \int_0^t \{1 + M_{jj}(t-u)\} dH_{ij}(u) \quad (4.9a)$$

$$m_{ij}(s) = \{1 + m_{jj}(s)\} h_{ij}(s) \quad (4.9b)$$

が成り立つ。 $t \rightarrow \infty$ のときは初期状態 i に無関係になるので，初期状態として j を選ぶと，

$$m_{jj}(s) = h_{jj}(s) / \{1 - h_{jj}(s)\} \quad (4.10)$$

を得る。従って、定常状態において、単位時間当りの j への平均訪問回数 M_j は、

$$\begin{aligned} M_j &= \lim_{t \rightarrow \infty} M_{jj}(t) / t = \lim_{s \rightarrow 0} s m_{jj}(s) \\ &= 1 / \bar{h}_{jj} \end{aligned} \quad (4.11)$$

となる。 $v=1$ である状態への平均訪問回数 $M^{(1)}$ は、

$$M^{(1)} = \sum_{j \in S_1} M_j \quad (4.12)$$

である。これは、単位時間当り、平均 $M^{(1)}$ 回入駅が発生することを示しているので、平均入駅時間間隔 T_s は、

$$T_s = 1 / M^{(1)}$$

となる。平均入バス時間間隔 T_b は、特定のバスに車が入るのは入駅車 n 台に 1 台の割合であるから

$$T_b = n T_s$$

で与えられる。

T_s , T_b をもとにして駅を評価するための各種の量が求められる。

○入駅率：長い時間 t を考えると、この間に入駅希望車は $t / (1 / \beta \lambda)$ 台到来する。そのうち、入駅車の台数は t / T_s である。この比をとって

$$r = 1 / \beta \lambda T_s$$

○バス利用率：平均入バス時間間隔 T_b に対する乗降時間 $1 / \mu$ の比をとって

$$u = 1 / \mu n T_s$$

○出駅頻度：入駅頻度に等しく

$$f = 1 / T_s$$

となる。

5. 初期入駅時間の導入による解析

5.1 初期入駅時間

状態 i から $v=1$ である状態集合 S_1 への初期通過時間、すなわち、状態 i に推移してきたとき、次に入駅が発生するまでの時間を i における初期入駅時間と呼び、その分布関数および LS 変換を $L_i(t)$, $l_i(s)$ とする。 i からの第 1 回目の推移によって場合分けすると次の方程式系が得られる。

$$L_i(t) = \sum_{j \in S_1} Q_{ij}(t) + \sum_{j \in S_0} \int_0^t L_j(t-u) dQ_{ij}(u), \quad i \in S \quad (5.1a)$$

$$l_i(s) = \sum_{j \in S_1} q_{ij}(s) + \sum_{j \in S_0} q_{ij}(s) l_j(s), \quad i \in S \quad (5.1b)$$

状態として S_0 及び新たに σ を考え、もとのシグナルフローグラフにおいて S_1 に向かっていた弧をすべて σ に向かわせることによってできるシグナルフローグラフは図 4 のようになる。このグラフにおける $(0; w, x, y, z)$ から σ までのゲインが $h_{v;w,x,y,z}(s)$ である。

5.2 シグナルフローグラフの簡略化

シグナルフローグラフを簡略化することによって (5.1b) の方程式系を陽に解く。モデルから、空バスが 1 つでもあれば入駅までの時間は入駅希望車が到来するまでの時間に等しい。従っ

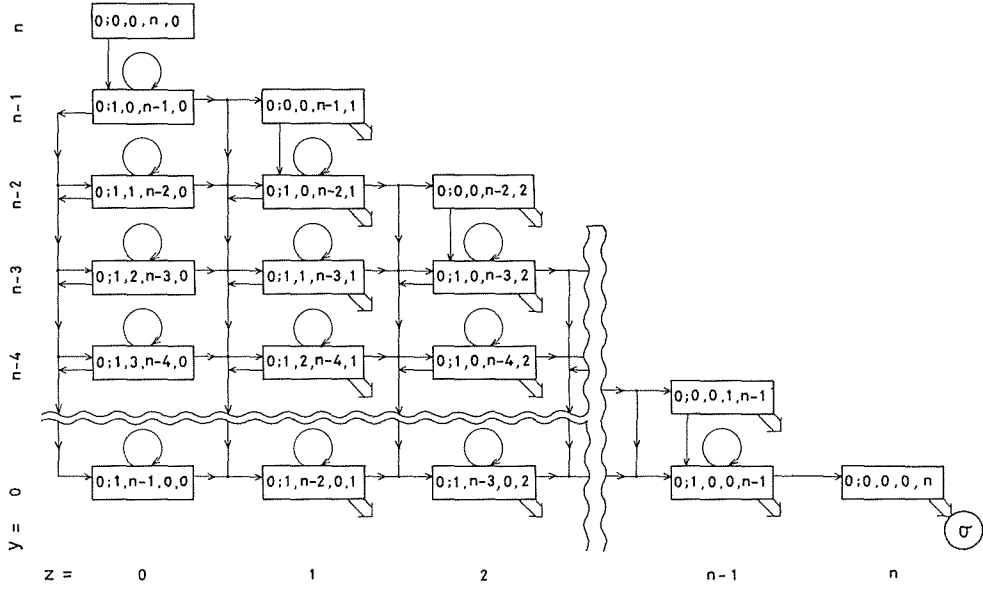


図4 初期入駅時間分布を求めるためのシグナルフローグラフ

(図中の太い矢印は σ への弧である。トランスミッタンス $q_{ij}(s)$ は記していない)

て、 $z > 0$ の状態における初期入駅時間分布は v 、 w 、 x 、 y 、 z に依らないと予想される。また、

$(v; 1, x, y, 0)$ についても出発可となれば上述の $z > 0$ の状態となるので、これも x 、 y に依らないと考えられる。このような予想のもとにシグナルフローグラフを図5のように簡略化する。

図において

$$q_{AB}(s) = q_{(0;0,0,n,0)(0;1,0,n-1,0)}(s) = \mu n / (s + \mu n) \quad (5.2a)$$

$$q_{BB}(s) = \sum_{y=0}^y q_{(0;1,x,y,0)(0;1,x+y,y-\nu,0)}(s) = \lambda [1 - \exp\{-(s+\lambda)T\}] / (s+\lambda) \quad (5.2b)$$

$$q_{BC}(s) = \sum_{\nu=1}^y q_{(0;1,x,y,0)(0;1,x+\nu-1,y-\nu,1)}(s) + \varepsilon(x) q_{(0;1,x,y,0)(0;1,x-1,y,1)}(s) + [1 - \varepsilon(x)] q_{(0;1,x,y,0)(0;0,x,y,1)}(s) = \exp\{-(s+\lambda)T\} \quad (5.2c)$$

$$q_{c\sigma}(s) = q_{(0;0,0,0,n)(1;0,0,1,n-1)}(s) = \beta \lambda / (s + \beta \lambda) \quad (5.2d)$$

$$\text{ただし, } \varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

である。従って、この簡略化されたグラフの上でゲインを求めることにより、

$$l_{v;w,x,y,z>0}(s) = \beta \lambda / (s + \beta \lambda) \quad (5.3a)$$

$$l_{v;1,x,y,0}(s) = \frac{\beta \lambda}{s + \beta \lambda} \cdot \frac{(s + \lambda) \exp\{-(s + \lambda)T\}}{s + \lambda \exp\{-(s + \lambda)T\}} \quad (5.3b)$$

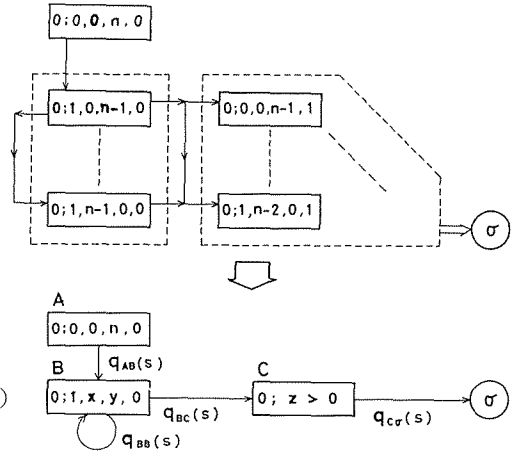


図5 シグナルフローグラフの簡略化

$$l_{(v,0,0,n,0)}(s) = \frac{\mu n}{s + \mu n} \cdot \frac{\beta \lambda}{s + \beta \lambda} \cdot \frac{(s + \lambda) \exp \{-(s + \lambda)T\}}{s + \lambda \exp \{-(s + \lambda)T\}} \quad (5.3C)$$

を得る。これらは方程式系 (5.1b) を満足する。期待値 (平均初期入駅時間) は次式となる。

$$\bar{l}_{(v;w,x,y,z>0)} = 1/\beta\lambda \quad (5.4a)$$

$$\bar{l}_{(v;1,x,y,0)} = 1/\beta\lambda + \{ \exp(\lambda T) - 1 \} / \lambda \quad (5.4b)$$

$$\bar{l}_{(v,0,0,n,0)} = 1/\beta\lambda + \{ \exp(\lambda T) - 1 \} / \lambda + 1/\mu n \quad (5.4c)$$

5.3 平均入駅時間間隔

上式に、入駅したという条件のもとで各状態にいる確率を重みとして乗じて加えれば平均入駅時間間隔となる。すなわち、

$$\begin{aligned} T_s &= E[\text{次の入駅までの時間} \mid \text{推移が入駅による}] \\ &= \sum_{i \in S} P[\text{状態が } i \mid \text{推移が入駅}] E[\text{次の入駅までの時間} \mid \text{状態が } i] \\ &= \sum_{i \in S} \frac{v_i \pi_i}{\sum_{j \in S_1} \pi_j} \bar{l}_i = \frac{\sum_{i \in S_1} \pi_i \bar{l}_i}{\sum_{j \in S_1} \pi_j} \end{aligned} \quad (5.5)$$

上式を (5.4) を用いて書き直すと次式が得られる。

$$T_s = 1/\beta\lambda + p_1 \{ \exp(\lambda T) - 1 \} / \lambda + (p_2/n)(1/\mu) \quad (5.6)$$

$$\text{ただし, } p_1 = \left(\sum_{v_i=1, z_i=0} \pi_i \right) / \left(\sum_{i \in S_1} \pi_i \right)$$

$$p_2 = \pi_{(1,0,0,n,0)} / \left(\sum_{i \in S_1} \pi_i \right)$$

この式から、 T_s の下限が入駅希望車の平均到来間隔であり、輻輳度に応じて第2項、さらに第3項が加わることがわかる。 p_1 は入駅したときに空バースが無くなる確率であり、この場合、平均出発待ち時間³⁾ $\{ \exp(\lambda T) - 1 \} / \lambda - T$ 及び出発後の安全車頭間隔 T の間は入駅希望車が来ても入駅できない。 p_2 は入駅したときに空バースが無くなり、さらに出発準備ができていない確率で、この場合は上述の時間に加えさらに n 台中の1台が乗降終了するまでの平均時間 $1/n\mu$ の間は入駅できない。特にバース数が $n=1$ のときは $p_1=p_2=1$ であり、既存の解析結果³⁾ と一致する。バース数を増加させていくと p_1 及び p_2/n の値が小さくなり、第2項及び第3項の影響を減少させることができる。これは、 n バース駅と等価な1バース駅においては平均出発待ち時間と平均乗降時間が小さくなることを意味している。

5.4 数値計算とシミュレーション

数値計算結果を図6～9に示す。 $\beta=1$, $\mu=1/18$, $T=2$ とし、 n と λ を変えて計算した。バース数を増すことの有効性が λ に依存している様子が読みとれる。

これまでの解析は乗降時間分布を指数分布として行なったものであるが、実際には正規分布であろうと思われる。この場合についてシミュレーションを行なった結果が図10である。この図から、平均入駅時間間隔およびこれから求まる諸量は乗降時間の分布形には (少なくともあまり大きく) 左右されず、これを指数分布として得られた結果が有効であると考えられる。

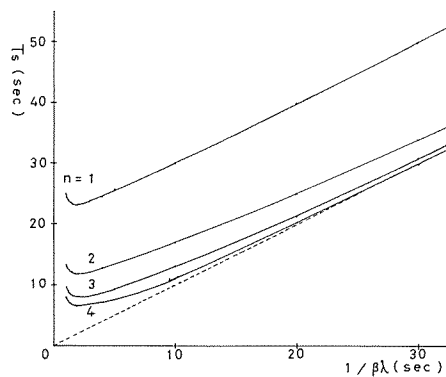


図 6 入 駅 時 間 間 隔

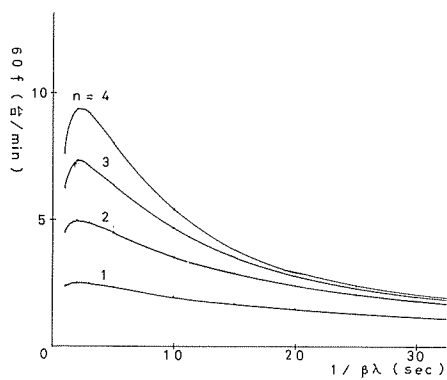


図 7 出 駅 頻 度

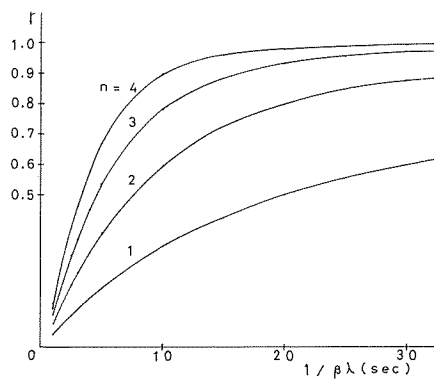


図 8 入 駅 率

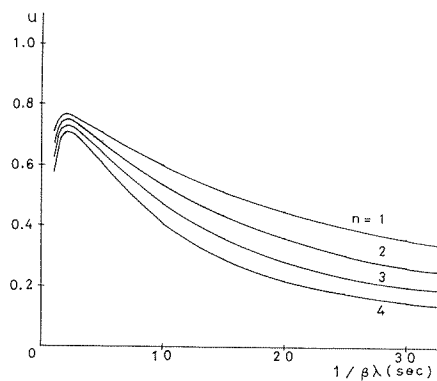


図 9 利 用 率

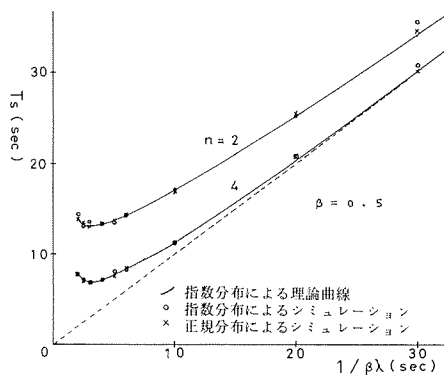


図 10 入 駅 時 間 間 隔

6. む す び

CVS多バース駅モデルを設定し、駅の状態推移をマルコフ再生過程として定式化し、解析した。解析の便宜上、すでに報告されている1バースモデルよりも幾つかの点で簡略化されているが、バースを増設することの意義を考察し、多バース駅の基本的ふるまいが明らかになった。しかし、入駅希望車を実車と空車に区別し、さらに駅への客の到来をも考慮した総合的な見地から最適な多バース駅を設計する必要がある、今後の課題となろう。

参 考 文 献

- (1) 石井, 井口, 越: "CVS -都市交通の革命児", サイエンス, 4, 8, pp. 10-23, 日経新聞社(昭49)
- (2) 石井: "CVS (Computer-Controlled Vehicle System)", 信学誌, 56, 12, pp. 1656-1659(昭48-12)
- (3) 森脇, 中田, 小原: "CVS における交通密度と駅部における車両運行の問題点", 電学論(C), 97, 8, pp. 141-148 (昭52-08)
- (4) 小原, 中田: "CVS 駅部モデルへのマルコフ再生理論の適用", 信学論(D), J 61-D, 9, pp. 695-702(昭53-09)
- (5) 中田, 加地, 土肥: "マルコフ再生理論による CVS 駅部モデルの車両挙動の解析", 信学論(A), J 62-A, 10, pp. 705-712 (昭54-10)
- (6) 中田, 加地, 土肥: "マルコフ再生理論による CVS 駅部モデルの客オーバーフローの解析", 信学論(A), J 63-A, 10, pp. 702-709 (昭55-10)
- (7) Pyke: "Markov renewal processes; definition and preliminary properties", Ann. Math. Statist., 32, p. 1231 (1961).
- (8) Pyke: "Markov renewal processes with finitly many states", ibid., 32, p. 1243 (1961)
- (9) Erhan Cinlar: "Introduction to Stochastic Process", Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, p. 328-331 (1975)