



|                  |   |
|------------------|---|
| Title            | 反射型マッチフィルターによる相関の検出   |
| Author(s)        | 章, 恩耀; Zhang, En Yao; 石井, 行弘 他  |
| Citation         | 北海道大學工學部研究報告, 105, 117-128  |
| Issue Date       | 1981-07-31  |
| Doc URL          | <a href="https://hdl.handle.net/2115/41686">https://hdl.handle.net/2115/41686</a> |
| Type             | departmental bulletin paper   |
| File Information | 105_117-128.pdf   |



## 反射型マッチトフィルターによる相関の検出

章 恩 耀\*\* 石 井 行 弘\* 村 田 和 美\*

(昭和56年3月31日受理)

### Detection of Correlation by Means of a Reflection-Type Matched Filter

En Yao ZHANG, Yukihiro ISHII and Kazumi MURATA

(Received March 31, 1981)

#### Abstract

Spatial matched filtering with a reflection-type volume hologram is theoretically investigated and some experiments for the detection of a two-dimensional correlation of objects are shown. The distortion of the correlation output due to the mismatching of filtering to recording wavelength is discussed. While the reflection-type volume hologram has a wavelength selectivity, a temporally incoherent illumination can be used for the filtering. A compact optical setup with a lensless spatial matched filter is also proposed. Two kinds of blurring of the correlation image due to angular and wavelength selectivities of the filter are given. Experiments for pattern and character recognitions are carried out using a pressure-broadened mercury light.

#### 1. は じ め に

コヒーレント光による二重回折フィルタリング系に Vander Lugt<sup>1)</sup> フィルターを用いれば出力像面に物体の相関像とコンポリューション像が同時に得られる。この方法では、フィルターがホログラフィーにより割合に簡単に作製できるという利点があるが、二重回折系が使われるので装置全体は長くなる。Righini ら<sup>2)</sup> は処理光学系の装置のコンパクト化を目的として、反射型ホログラムを用いて、マッチトフィルタリングを行っている。しかし、インコヒーレント光による処理を行っていない。インコヒーレントな白色光でマッチトフィルタリング処理を望むなら色補正しなければならない。この色補正を実現するためには二重回折系の物体面に一つの正弦格子を置き、スペクトル面で色選択する方法<sup>3)</sup>と二つの二重回折系を組み合わせ、フィルター面に正弦格子を用いて色分散を補正する方法<sup>4,5)</sup>が報告されている。しかし何れの場合も白色光で再生する時、光量は非常に弱くなると予想される。

われわれは反射型ボリュームホログラムを用いてマッチトフィルタリングを行ない、このホログラムフィルターの波長選択性と角度選択性<sup>6)</sup>を利用して準単色光源(高圧水銀灯)を用いて物体の二次元的相関を得る実験を行った。本論文はこの反射型マッチトフィルタリングの原理、実験

\* 応用物理学科 応用光学講座

\*\* 工学部研究生 (中国清華大学より留学中)

結果、再生波長と記録波長の波長比による相関出力像の歪、また準単色光源で再生する場合にこの反射型マッチトフィルターの再生波長と再生角度選択性により生じる相関出力像のぼけの検討、さらにフーリエ変換レンズを省略するための、球面波照明による反射型マッチトフィルターの製作およびその相関出力像の解析などについて報告するものである。

## 2. 反射型マッチトフィルター

Fig. 1 に示すようにフーリエ変換レンズの前焦点面に物体面を置き、後焦点面にホログラム記録用の写真乾板を置き、物体面の座標系を  $(x_0, y_0)$ 、写真乾板面の座標系を  $(x, y)$ 、光軸を  $z$  軸とする。まず物体面の  $(a, b)$  の位置を中心として基準物体  $g(x_0 - a, y_0 - b)$  を置き、波長  $\lambda$  の平面波で物体面を垂直に照明すればレンズの後焦点面  $[(x, y, 0)$  面] に基準物体  $g(x_0 - a, y_0 - b)$  のスペクトル分布

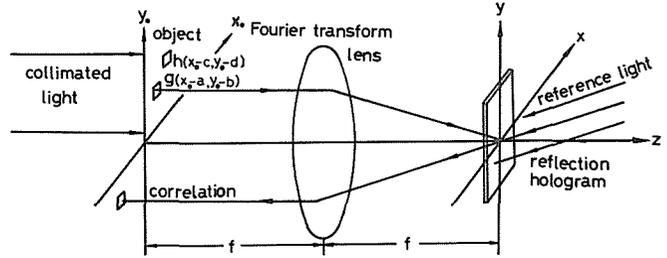


Fig. 1 反射型ポリウムホログラムによるマッチトフィルタリング光学系。

の平面波で物体面を垂直に照明すればレンズの後焦点面  $[(x, y, 0)$  面] に基準物体  $g(x_0 - a, y_0 - b)$  のスペクトル分布

$$\begin{aligned} A(x, y, 0) &= F[g(x_0 - a, y_0 - b)] = G\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{x}{\lambda f}a + \frac{y}{\lambda f}b\right)\right] \\ &= G\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) \exp[jk(\alpha_{x0}x + \alpha_{y0}y)] \end{aligned} \quad (1)$$

が得られる。ただし方向余弦を  $\alpha_{x0} = -\frac{a}{f}$   $\alpha_{y0} = -\frac{b}{f}$  とおき、 $F$  はフーリエ変換を示す。 $G\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)$  は  $g(x_0, y_0)$  のフーリエスペクトル、 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  は照明光の波数である。また  $G\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)$  の乳剤内  $z$  の深さの光振幅分布  $A(x, y, z)$  は angular spectrum<sup>7)</sup>の伝播を用いて

$$\begin{aligned} A(x, y, z) &= F^{-1}\{F[A(x, y, 0)] \exp[jk\sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2} z]\} \\ &= F^{-1}\left\{F\left[G\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) \exp[jk(\alpha_{x0}x + \alpha_{y0}y)]\right] \exp[jk\sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2} z]\right\} \\ &\cong G\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) \exp[jk(\alpha_{x0}x + \alpha_{y0}y)] * F^{-1}\{\exp[-j\lambda\pi(f_x^2 + f_y^2)z]\} \exp(jkz) \end{aligned} \quad (2)$$

となる。ただし  $f_x = \frac{x}{\lambda f}$   $f_y = \frac{y}{\lambda f}$  とおき、 $(\lambda f_x)^2 + (\lambda f_y)^2 \ll 1$  の近似を用いた。 $*$  は convolution を示す。また方向余弦が  $\alpha_{xr}$ ,  $\alpha_{yr}$ ,  $\alpha_{zr}$  で与えられる参照光  $A_r$  を乳剤の裏から入射させればその分布は

$$A_r(x, y, z) = a_r \exp[jk(\alpha_{xr}x + \alpha_{yr}y + \alpha_{zr}z)] \quad (3)$$

と書ける。(2)式に示した乳剤内での物体の回折光の振幅分布は写真乾板の裏面から入射した参照光と干渉し、乳剤層に三次元な干渉縞が記録される。この干渉縞の強度分布  $I(x, y, z)$  は

$$I(x, y, z) = |A(x, y, z) + A_r(x, y, z)|^2 = |A(x, y, z)|^2 + |A_r(x, y, z)|^2 +$$

$$A(x, y, z)A_r^*(x, y, z) + A^*(x, y, z)A_r(x, y, z) \quad (4)$$

となる。このホログラムの振幅透過率分布  $T(x, y, z)$  は T-E 曲線の直線性を利用して干渉縞の強度  $I$  に直線近似できる範囲では

$$T(x, y, z) = \mu_0 + \mu I(x, y, z) = \mu_0 + \mu [ |A(x, y, z)|^2 + |A_r(x, y, z)|^2 ] + \mu A(x, y, z)A_r^*(x, y, z) + \mu A^*(x, y, z)A_r(x, y, z) \quad (5)$$

と書ける。ただし  $\mu_0, \mu$  は定数である。

### 3. 反射型マッチトフィルターによる物体の相関の検出

次に第2章で述べた方法で作った基準物体  $g(x_0 - a, y_0 - b)$  の反射型マッチトフィルターを用いて入力物体との相関の検出を考えて見よう。現像されたホログラムをもとの位置に戻して物体面の  $x_0 = c, y_0 = d$  を中心として入力物体  $h(x_0 - c, y_0 - d)$  をおき、波長  $\lambda_c$  の平面波で垂直にこの物体を照明すればホログラムの読み出し光として入力物体  $h(x_0 - c, y_0 - d)$  のフーリエスペクトル分布  $B(x, y, z)$  は(2)式と同じように乳剤内では

$$B(x, y, z) \cong H\left(\frac{x}{\lambda_c f}, \frac{y}{\lambda_c f}\right) \exp[jk_c(\alpha_{xc}x + \alpha_{yc}y)] \\ * F^{-1} \{ \exp[-j\pi\lambda_c(f_x^2 + f_y^2)z] \} \exp(jk_c z) \quad (6)$$

と書ける。ただし  $\alpha_{xc} = -\frac{c}{f}, \alpha_{yc} = -\frac{d}{f}$  としている。 $H\left(\frac{x}{\lambda_c f}, \frac{y}{\lambda_c f}\right)$  は入力物体  $h(x_0, y_0)$  のフー

リエスペクトル、 $k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c}$  は再生照明光の波数である。また Fig. 2 に示すように乳剤内で乳剤面に

平行な厚さ  $dz$  の薄い面を考えるとこの面での光分布は

$$dV(x, y, z) = B(x, y, z)T(x, y, z)dz = \{ B(x, y, z)[\mu_0 + \mu |A(x, y, z)|^2 \\ + \mu |A_r(x, y, z)|^2] + \mu B(x, y, z)A(x, y, z)A_r^*(x, y, z) \\ + \mu B(x, y, z)A^*(x, y, z)A_r(x, y, z) \} dz \quad (7)$$

となる。実像光に相当する(7)式の第三項は

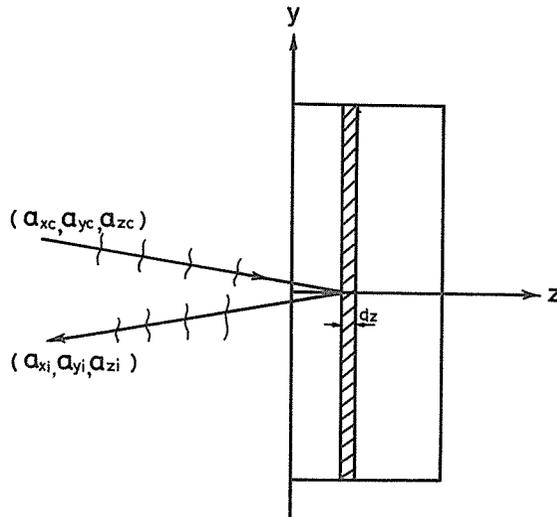


Fig. 2 薄い面  $dz$  の拡張による厚い乳剤層からの回折。

$$\begin{aligned}
dV_3(x, y, z) &= a_{r\mu} \exp[j(k_c - k)z] H\left(\frac{x}{\lambda_c f}, \frac{y}{\lambda_c f}\right) \exp[jk_c(\alpha_{xc}x + \alpha_{yc}y)] \\
&\quad * F^{-1}\{\exp[-j\pi\lambda_c(f_x^2 + f_y^2)z]\} G^*\left(\frac{x}{\lambda_f}, \frac{y}{\lambda_f}\right) \exp[-jk(\alpha_{xo}x + \alpha_{yo}y)] \\
&\quad * F^{-1}\{\exp[j\pi\lambda(f_x^2 + f_y^2)z]\} \exp[jk(\alpha_{xr}x + \alpha_{yr}y + \alpha_{zr}z)] dz \quad (8)
\end{aligned}$$

と表わせる。またこの  $dV_3(x, y, z)$  により再生される光のレンズの後焦点面  $[(x, y, z)$  面] での分布  $dC$  は

$$\begin{aligned}
dC &= F^{-1}\{F[dV_3(x, y, z)] \exp[jk_c \sqrt{1 - (\lambda_c f_x)^2 - (\lambda_c f_y)^2}(-z)]\} = dV_3(x, y, z) \\
&\quad * F^{-1}\{\exp[jk_c \sqrt{1 - (\lambda_c f_x)^2 - (\lambda_c f_y)^2}(-z)]\} \quad (9)
\end{aligned}$$

となる。この式で“ $z$ ”に付く“-”符号は反射型ホログラムにより再生される光が逆方向に伝搬することを示している。さらにこの光分布をレンズによりフーリエ変換すれば出力像面(もとの物体面)で得られる像光の振幅分布  $dP$  は

$$\begin{aligned}
dP &= \iint_{-\infty}^{\infty} dV_3(x, y, z) * F^{-1}\{\exp[jk_c \sqrt{1 - (\lambda_c f_x)^2 - (\lambda_c f_y)^2}(-z)]\} \\
&\quad \exp\left[j2\pi\left(\frac{x_i}{\lambda_c f}x + \frac{y_i}{\lambda_c f}y\right)\right] dx dy \quad (10)
\end{aligned}$$

となる。なお、ホログラム乳剤の厚さ  $t$  を考えると、乳剤層全体の厚さによる再生像への寄与  $P(x_i, y_i)$  は

$$\begin{aligned}
P(x_i, y_i) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \int_0^t dV_3(x, y, z) * F^{-1}\{\exp[jk_c \sqrt{1 - (\lambda_c f_x)^2 - (\lambda_c f_y)^2}(-z)]\} \\
&\quad \exp\left[j2\pi\left(\frac{x_i}{\lambda_c f}x + \frac{y_i}{\lambda_c f}y\right)\right] dx dy \quad (11)
\end{aligned}$$

と表わせる。さらに(8)式を(11)式に代入し定数を略すれば

$$\begin{aligned}
P(x_i, y_i) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \exp[j(k_c - k)z] H\left(\frac{x}{\lambda_c f}, \frac{y}{\lambda_c f}\right) \exp[jk_c(\alpha_{xc}x + \alpha_{yc}y)] * F^{-1}\{\exp[-j\pi\lambda_c \\
&\quad (f_x^2 + f_y^2)z]\} G^*\left(\frac{x}{\lambda_f}, \frac{y}{\lambda_f}\right) \exp[-jk(\alpha_{xo}x + \alpha_{yo}y)] * F^{-1}\{\exp[j\pi\lambda(f_x^2 + f_y^2)z]\} \\
&\quad \exp[jk(\alpha_{xr}x + \alpha_{yr}y + \alpha_{zr}z)] * F^{-1}\{\exp[-jk_c \sqrt{1 - (\lambda_c f_x)^2 - (\lambda_c f_y)^2}z]\} \\
&\quad \exp\left[j2\pi\left(\frac{x_i}{\lambda_c f}x + \frac{y_i}{\lambda_c f}y\right)\right] dx dy dz \\
&= \int_0^t h(x_i, y_i) * \delta\left(\frac{x_i}{\lambda_c f} + \frac{\alpha_{xc}}{\lambda_c}\right) \delta\left(\frac{y_i}{\lambda_c f} + \frac{\alpha_{yc}}{\lambda_c}\right) \exp\left\{-j\pi\lambda_c\left[\left(\frac{x_i}{\lambda_c f}\right)^2 + \left(\frac{y_i}{\lambda_c f}\right)^2\right]z\right\} \\
&\quad * g^*\left(-\frac{\lambda x_i}{\lambda_c}, -\frac{\lambda y_i}{\lambda_c}\right) * \delta\left(\frac{x_i}{\lambda_c f} - \frac{\alpha_{xo}}{\lambda}\right) \delta\left(\frac{y_i}{\lambda_c f} - \frac{\alpha_{yo}}{\lambda}\right) \exp\left\{j\pi\lambda\left[\left(\frac{x_i}{\lambda_c f}\right)^2 + \left(\frac{y_i}{\lambda_c f}\right)^2\right]z\right\} \\
&\quad * \delta\left(\frac{x_i}{\lambda_c f} + \frac{\alpha_{xr}}{\lambda}\right) \delta\left(\frac{y_i}{\lambda_c f} + \frac{\alpha_{yr}}{\lambda}\right) \exp\left[-jk_c \sqrt{1 - \left(\frac{x_i}{f}\right)^2 - \left(\frac{y_i}{f}\right)^2}z\right] \\
&\quad \exp[j(k_c - k + k\alpha_{zr})z] dz \quad (12)
\end{aligned}$$

と書ける。記録に用いられるコダック 649 F 写真乾板の乳剤の厚さは  $t = 15 \mu m$ <sup>9)</sup>位 でまたレンズ

の焦点距離  $f$  は物体の大きさよりずっと大きいので  $\pi\lambda_c \left[ \left( \frac{x_i}{\lambda_{cf}} \right)^2 + \left( \frac{y_i}{\lambda_{cf}} \right)^2 \right] z \ll 1$ ,  $\pi\lambda \left[ \left( \frac{x_i}{\lambda_f} \right)^2 + \left( \frac{y_i}{\lambda_f} \right)^2 \right] z \ll 1$  が成り立つ。従って(12)式は

$$\begin{aligned}
 P(x_i, y_i) &= \int_0^t h(x_i, y_i) * \delta\left(\frac{x_i}{\lambda_{cf}} + \frac{\alpha_{xc}}{\lambda_c}\right) \delta\left(\frac{y_i}{\lambda_{cf}} + \frac{\alpha_{yc}}{\lambda_c}\right) * g * \left(-\frac{\lambda x_i}{\lambda_c}, -\frac{\lambda y_i}{\lambda_c}\right) * \delta\left(\frac{x_i}{\lambda_{cf}} - \frac{\alpha_{xo}}{\lambda}\right) \\
 &\quad \delta\left(\frac{y_i}{\lambda_{cf}} - \frac{\alpha_{yo}}{\lambda}\right) * \delta\left(\frac{x_i}{\lambda_{cf}} + \frac{\alpha_{xr}}{\lambda}\right) \delta\left(\frac{y_i}{\lambda_{cf}} + \frac{\alpha_{yr}}{\lambda}\right) \exp\left(-jk_c \sqrt{1 - \left(\frac{x_i}{f}\right)^2 - \left(\frac{y_i}{f}\right)^2} z\right) \\
 &\quad \exp[j(k_c - k + k\alpha_{zr})z] dz \\
 &= \left[ h(x_i, y_i) \star g * \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} x_i, \frac{\lambda}{\lambda_c} y_i\right) \right] * \delta\left(\frac{x_i}{\lambda_{cf}} - \frac{\alpha_{xo}}{\lambda} + \frac{\alpha_{xc}}{\lambda_c} + \frac{\alpha_{xr}}{\lambda}\right) \delta\left(\frac{y_i}{\lambda_{cf}} - \frac{\alpha_{yo}}{\lambda} + \frac{\alpha_{yc}}{\lambda_c} + \frac{\alpha_{yr}}{\lambda}\right) \\
 &\quad \exp\left[-j\frac{t}{2}(k_c \alpha_{zi} - k_c + k - k\alpha_{zr})\right] \text{sinc}\left[\frac{t}{2\pi}\left(-k_c \sqrt{1 - \left(\frac{x_i}{f}\right)^2 - \left(\frac{y_i}{f}\right)^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + k_c - k + k\alpha_{zr}\right)\right] = 4\pi^2 \left[ h(x_i, y_i) \star g * \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} x_i, \frac{\lambda}{\lambda_c} y_i\right) \right] * \delta[k_c(\alpha_{xi} - \alpha_{xc}) \\
 &\quad + k(\alpha_{xo} - \alpha_{xr})] \delta[k_c(\alpha_{yi} - \alpha_{yc}) + k(\alpha_{yo} - \alpha_{yr})] \exp\left[-j\frac{t}{2}(k_c \alpha_{zi} - k_c + k - k\alpha_{zr})\right] \\
 &\quad \text{sinc}\left[\frac{t}{2\pi}(k_c \alpha_{zi} - k_c + k - k\alpha_{zr})\right] \tag{13}
 \end{aligned}$$

と近似して書き直せる。ただし  $\alpha_{xi} = -\frac{x_i}{f}$ ,  $\alpha_{yi} = -\frac{y_i}{f}$ ,  $\alpha_{zi} = \sqrt{1 - \left(\frac{x_i}{f}\right)^2 - \left(\frac{y_i}{f}\right)^2}$  としてい  
る。★は correlation を示す。この相関出力像の強度分布  $I(x_i, y_i)$  は、定数を略して

$$\begin{aligned}
 I(x_i, y_i) &= |P(x_i, y_i)|^2 = \left\{ \left[ h(x_i, y_i) \star g * \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} x_i, \frac{\lambda}{\lambda_c} y_i\right) \right]^2 * \delta[k_c(\alpha_{xi} - \alpha_{xc}) + k(\alpha_{xo} - \alpha_{xr})] \right. \\
 &\quad \left. \delta[k_c(\alpha_{yi} - \alpha_{yc}) + k(\alpha_{yo} - \alpha_{yr})] \right\}^2 \text{sinc}^2\left[\frac{t}{2\pi}(k_c \alpha_{zi} - k_c + k - k\alpha_{zr})\right] \\
 &= \left\{ \left[ h(x_i, y_i) \star g * \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} x_i, \frac{\lambda}{\lambda_c} y_i\right) \right]^2 * \delta(N_x) \delta(N_y) \right\}^2 \text{sinc}^2(N_z) \tag{14}
 \end{aligned}$$

となる。ただし  $N_x = k_c(\alpha_{xi} - \alpha_{xc}) + k(\alpha_{xo} - \alpha_{xr})$ ;  $N_y = k_c(\alpha_{yi} - \alpha_{yc}) + k(\alpha_{yo} - \alpha_{yr})$ ;  $N_z = \frac{t}{2\pi}(k_c \alpha_{zi} - k_c + k - k\alpha_{zr})$  とおいた。(14)式から見ればわかるように相関出力像の位置は、 $\delta(N_x)$ ,  $\delta(N_y)$  によりまた強度は  $\text{sinc}^2(N_z)$  関数により決まるものであり、三つの条件  $N_x = 0$ ,  $N_y = 0$ ,  $N_z = 0$  を同時にみたせば強度分布  $I$  は最大になることがわかる。

つづいて  $\alpha_{xc} = -\frac{c}{f}$ ;  $\alpha_{yc} = -\frac{d}{f}$ ;  $\alpha_{xo} = -\frac{a}{f}$ ;  $\alpha_{yo} = -\frac{b}{f}$ ;  $\alpha_{xi} = -\frac{x_i}{f}$ ;  $\alpha_{yi} = -\frac{y_i}{f}$  を  $N_x = 0$ ;

$N_y = 0$  に代入すると、物体の相関出力像の位置は

$$x_i = \frac{k_c c - k f \alpha_{xr} - k a}{k_c}, \quad y_i = \frac{k_c d - k f \alpha_{yr} - k b}{k_c} \tag{15}$$

により決められる。このとき  $N_z$  は

$$N_z = \frac{t}{2\pi} \left[ k_c \sqrt{1 - \left(\frac{x_i}{f}\right)^2 - \left(\frac{y_i}{f}\right)^2} - k_c + k - \sqrt{1 - \alpha_{xr}^2 - \alpha_{yr}^2} \right]$$

となるので相関出力像の強度分布は、 $\text{sinc}^2(N_z)$  によって求められる。もし再生照明光の波長  $\lambda_c$

と記録光の波長  $\lambda$  が等しいとし、そして  $c=a$   $d=b$  (即ち入力物体  $h(x_0-c, y_0-d)$  とさきにホログラムに記録した基準物体  $g(x_0-a, y_0-b)$  の位置が同じ) とすれば(15)式より  $x_i = -fa_{xr}$ ;  $y_i = -fa_{yr}$   $N_z=0$  となる。このときの相関出力像の強度分布  $I(x_i, y_i)$  は(14)式により

$$I(x_i, y_i) = [h(x_i, y_i) \star g^*(x_i, y_i)]^2 \quad (16)$$

で表わされる。

#### 4. 再生波長の相関出力像に対する影響

一般に記録されたホログラムは現像、定着処理により乳剤の変化が生じる。銀塩感光材料は一般に収縮するので再生の際再生照明光の入射角度が変化しないとすると、Bragg 条件を満足せず、再生像が暗くなる。これを補償するためには再生照明光の波長を変えなければならない。従って記録した時と同じ波長で再生できなくなる。この場合に相関出力像に再生と記録の波長差による歪が生じる。

次にこの実験の例を示す。Fig. 3aに示すような正三角形の自己相関を例として再生と記録の波長差による相関像の歪について説明する。記録光の波長を  $\lambda$ , 再生照明光の波長を  $\lambda_c$  とおくと、観測面での物体の自己相関出力像の強度分布は(14)式により

$$I(x_i, y_i) = \left\{ \left[ g(x_i, y_i) \star g^* \left( \frac{\lambda}{\lambda_c} x_i, \frac{\lambda}{\lambda_c} y_i \right) \right] * \delta(N_x) \delta(N_y) \right\}^2 \text{sinc}^2(N_z)$$

となる。ただし  $g(x_i, y_i)$  はもとの基準物体とした正三角形、また  $g \left( \frac{\lambda}{\lambda_c} x_i, \frac{\lambda}{\lambda_c} y_i \right)$  は波長  $\lambda$  の光でホログラムを記録し、波長  $\lambda_c$  の照明光で再生される同三角形の像を示す (Fig. 3b)。基準三角形の中心から辺までの距離を  $W$  とすると、像におけるそれは波長比によって  $\frac{\lambda_c}{\lambda} W$  となる。この  $g(x_i, y_i)$  と

$g \left( \frac{\lambda}{\lambda_c} x_i, \frac{\lambda}{\lambda_c} y_i \right)$  の相関像は Fig. 3c に示すように真中に一つ小さな三角形が生じる。この三角形の中心から辺までの距離は  $\frac{\lambda_c}{\lambda} W - W = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} W$  で求められる。ただし  $\Delta\lambda$  は照明波長  $\lambda_c$  と記録波長  $\lambda$  との波長差である。これは実験結果から確かめられている。Fig. 4a に示すのは波長  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$  の光で記録して波長  $\lambda_c = 5145 \text{ \AA}$  の光で再生された正三角形の自己相関出

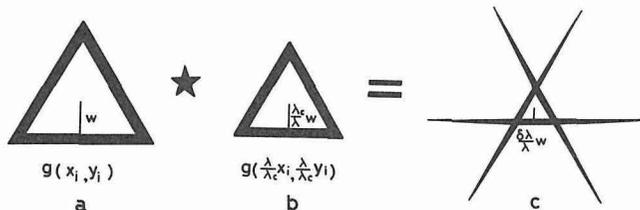


Fig. 3 記録と再生の波長差による相関出力像の歪。  
入力物体は正三角形で、記録と再生の波長はそれぞれ  $\lambda$ ,  $\lambda_c$  である。

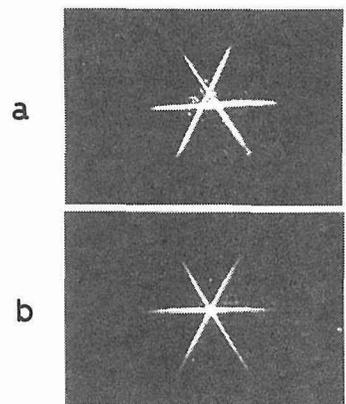


Fig. 4 実験で得られた正三角形の自己相関像。

a は記録波長  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ , 再生波長  $\lambda_c = 5145 \text{ \AA}$  を用いて得られた歪のある正三角形の自己相関像である。真中の小さな三角形は記録と再生の波長差により生じる歪である。  
b は乳剤の厚さをもとに戻した後、記録と同じ波長  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$  で再生された正三角形の自己相関像である。

力像である。真中の三角形は波長差により生じた相関出力像の歪である。

この波長差による相関出力像の歪を除去するため、再生波長と記録波長は一致しなければならない。従って現象、定着処理により収縮した乳剤の厚さをもとに戻すことが重要である。本実験では10%のトリエタノールアミン溶液に15分間浸し乳剤の厚さをもとに回復した。<sup>9)</sup>

Fig. 4b に示したのは Fig. 4a の場合と同じホログラムの乳剤の厚さを回復した後、記録時と同じ波長  $\lambda_c = 6328 \text{ \AA}$  で出力した正三角形の自己相関像である。

Fig. 4a と Fig. 4b を比較すればわかるように乳剤の厚さをもとに戻した後は記録と同じ波長で再生できるので波長差  $\Delta\lambda = |\lambda_c - \lambda|$  による相関出力像の歪がなくなる。

## 5. レンズレス反射型マッチトフィルタリング

反射型マッチトフィルターを作る時、もし基準物体  $g(x_0, y_0)$  を照明する光および参照光として収斂球面波を用いればフーリエ変換レンズがなくても物体の相関を検出できる可能性がある。この試みは平面型マッチトフィルターに対して適用されている。<sup>10,11)</sup>

Fig. 5 に示すように物体面の座標系を  $(x_0, y_0)$ 、ホログラム面の座標系を  $(x, y)$ 、物体面とホログラム面との距離を  $z_0$  とする。

ホログラム面の座標系の原点に収斂する球面波の物体面での振幅分布は

$$D(x_0, y_0) = \frac{a_0}{z_0} \exp(-jk \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_0}) \quad (17)$$

で与えられる。この球面波で基準物体  $g(x_0, y_0)$  を照明すればホログラム面の回折波の振幅分布は Fresnel 回折積分により

$$E_o\left(\frac{x}{\lambda z_0}, \frac{y}{\lambda z_0}\right) = \frac{1}{j\lambda z_0} \exp(jk z_0) \exp\left(jk \frac{x^2 + y^2}{2z_0}\right) F\left[\frac{a_0}{z_0} \exp\left(-jk \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_0}\right) g(x_0, y_0) \exp\left(jk \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_0}\right)\right] = \frac{a_0}{j\lambda z_0^2} \exp(jk z_0) \exp\left(jk \frac{x^2 + y^2}{2z_0}\right) G\left(\frac{x}{\lambda z_0}, \frac{y}{\lambda z_0}\right) \quad (18)$$

となる。 $E_o\left(\frac{x}{\lambda z_0}, \frac{y}{\lambda z_0}\right)$  の乳剤内の  $z$  のところの光振幅分布  $E(x, y, z)$  は(2)式の導出と同じ取り扱いにより

$$E(x, y, z) = \frac{a_0}{j\lambda z_0^2} \exp(jk z_0) F^{-1}\left\{F\left[G\left(\frac{x}{\lambda z_0}, \frac{y}{\lambda z_0}\right) \exp\left(jk \frac{x^2 + y^2}{2z_0}\right)\right] \exp[jk \sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2} z]\right\} \\ \cong \frac{a_0}{j\lambda z_0^2} \exp(jk z_0) G\left(\frac{x}{\lambda z_0}, \frac{y}{\lambda z_0}\right) \exp\left(jk \frac{x^2 + y^2}{2z_0}\right) * F^{-1}\left\{\exp[-j\lambda \pi (f_x^2 + f_y^2) z]\right\} \exp(jk z) \quad (19)$$

と表わせる。ここで  $f_x = \frac{x}{\lambda z_0}$ 、 $f_y = \frac{y}{\lambda z_0}$  とした。また写真乾板の裏から物体面の  $(a, b)$  点に収斂する球面波を入射させるとすればそれは

$$E_r(x, y, z) = \frac{a_r}{z_0 + z} \exp\left[-jk \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{2(z_0 + z)}\right]$$

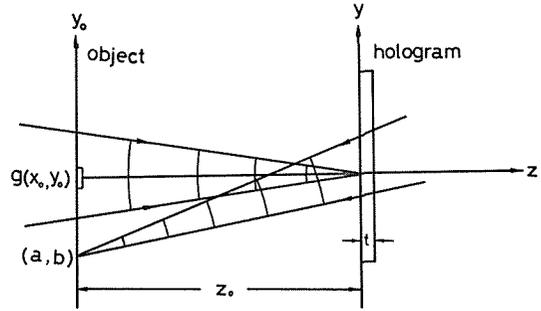


Fig. 5 レンズレス反射型マッチトフィルターによる相関検出光学系。

で与えられるのでホログラム乳剤内の干渉縞の強度分布は

$$I(x, y, z) = |E(x, y, z) + E_r(x, y, z)|^2 = |E(x, y, z)|^2 + |E_r(x, y, z)|^2 + E^*(x, y, z)E_r(x, y, z) + E(x, y, z)E_r^*(x, y, z)$$

となる。この写真乾板を現像処理した後のホログラムの実像に相当する項の振幅透過率は

$$T_3(x, y, z) = \mu E^*(x, y, z)E_r(x, y, z) = -\frac{\mu a_0 a_r}{j\lambda z_0^2(z_0 + z)} \exp(-jkz_0) G^*\left(\frac{x}{\lambda z_0}, \frac{y}{\lambda z_0}\right) \exp\left(-jk\frac{x^2 + y^2}{2z_0}\right) * F^{-1}\{\exp[j\lambda\pi(f_x^2 + f_y^2)z]\} \exp(-jkz) \exp\left(-jk\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{2(z+z_0)}\right)$$

となる。相関を検出する際、入力物体  $h(x_0, y_0)$  を物体面におき、ホログラムの再生光としての  $h(x_0, y_0)$  からの回折波の振幅分布は(19)式と同様の取り扱いにより

$$Q(x, y, z) \cong \frac{a_0}{j\lambda z_0^2} \exp(jkz_0) H\left(\frac{x}{\lambda z_0}, \frac{y}{\lambda z_0}\right) \exp(jk\frac{x^2 + y^2}{2z_0}) * F^{-1}\{\exp[-j\lambda\pi(f_x^2 + f_y^2)z]\} \exp(jkz)$$

となる。ここで  $H\left(\frac{x}{\lambda z_0}, \frac{y}{\lambda z_0}\right)$  は  $h(x_0, y_0)$  のフーリエスペクトルである。

相関を検出する面 (物体面  $(x_0, y_0)$  と同じ面) の座標系を  $(x_i, y_i)$  としてこの面で観測されるホログラム乳剤層からの Fresnel 回折波は乳剤層の厚さ  $t$  を考慮して

$$\begin{aligned} U(x_i, y_i) &= \int_0^t \frac{1}{j\lambda(z+z_0)} \exp[jk(z+z_0)] \exp\left[jk\frac{x_i^2 + y_i^2}{2(z+z_0)}\right] F\left\{Q(x, y, z) T_3(x, y, z) \exp\left[jk\frac{x^2 + y^2}{2(z+z_0)}\right]\right\} dz \\ &= \int_0^t \frac{\mu a_0 a_r}{j\lambda^3 z_0^4 (z+z_0)^2} \exp[jk(z+z_0)] \exp\left[jk\frac{x_i^2 + y_i^2}{2(z+z_0)}\right] F\left\{H\left(\frac{x}{\lambda z_0}, \frac{y}{\lambda z_0}\right) \exp\left(jk\frac{x^2 + y^2}{2z_0}\right) * F^{-1}\{\exp[-j\lambda\pi(f_x^2 + f_y^2)z]\} \right. \\ &\quad \cdot G^*\left(\frac{x}{\lambda z_0}, \frac{y}{\lambda z_0}\right) \exp\left(-jk\frac{x^2 + y^2}{2z_0}\right) * F^{-1}\{\exp[j\lambda\pi(f_x^2 + f_y^2)z]\} \\ &\quad \left. \exp\left[-jk\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{2(z+z_0)}\right] \exp\left[jk\frac{x^2 + y^2}{2(z+z_0)}\right]\right\} dz \\ &\cong \frac{\mu a_0 a_r \lambda}{j\lambda^3 z_0^6} \exp\left(jk\frac{x_i^2 + y_i^2}{2z_0}\right) \exp\left(-jk\frac{a^2 + b^2}{2z_0}\right) \int_0^t \exp[jk(z+z_0)] h(x_i, y_i) \\ &\quad * \exp\left\{-j\lambda\pi z_0\left[\left(\frac{x_i}{\lambda z_0}\right)^2 + \left(\frac{y_i}{\lambda z_0}\right)^2\right]\right\} (j\lambda z_0) \\ &\quad \cdot \exp\left\{-j\lambda\pi z\left[\left(\frac{x_i}{\lambda z_0}\right)^2 + \left(\frac{y_i}{\lambda z_0}\right)^2\right]\right\} * g^*(-x_i, -y_i) * \exp\left\{j\lambda\pi z_0\left[\left(\frac{x_i}{\lambda z_0}\right)^2 + \left(\frac{y_i}{\lambda z_0}\right)^2\right]\right\} \\ &\quad \cdot (-j\lambda z_0) \exp\left\{j\lambda\pi z\left[\left(\frac{x_i}{\lambda z_0}\right)^2 + \left(\frac{y_i}{\lambda z_0}\right)^2\right]\right\} * \delta\left(\frac{x_i}{\lambda z_0} - \frac{a}{\lambda z_0}\right) \delta\left(\frac{y_i}{\lambda z_0} - \frac{b}{\lambda z_0}\right) dz \\ &\cong \frac{\mu a_0 a_r \lambda}{j\lambda^3 z_0^6} \exp\left[jk\left(z_0 + \frac{x_i^2 + y_i^2 - a^2 - b^2}{2z_0}\right)\right] h(x_i, y_i) * \exp\left(-j\pi\frac{x_i^2 + y_i^2}{\lambda z_0}\right) \\ &\quad * g^*(-x_i, -y_i) * \exp\left(j\pi\frac{x_i^2 + y_i^2}{\lambda z_0}\right) * \delta(x_i - a, y_i - b) \exp(jk\frac{t}{2}) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\lambda}\right) \quad (20) \end{aligned}$$

と書ける。よって出力像の強度分布  $I(x_i, y_i)$  は

$$\begin{aligned} I(x_i, y_i) = & C \left[ h(x_i, y_i) * \exp\left(-j\pi \frac{x_i^2 + y_i^2}{\lambda z_0}\right) \right. \\ & * g^*(-x_i, -y_i) * \exp\left(j\pi \frac{x_i^2 + y_i^2}{\lambda z_0}\right) \\ & \left. * \delta(x_i - a, y_i - b) \right]^2 \text{sinc}^2\left(\frac{t}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (21)$$

となる。ただし(20)式の導出に  $z \ll z_0$  と  $\lambda \pi z \left[ \left(\frac{x_i}{\lambda z_0}\right)^2 + \left(\frac{y_i}{\lambda z_0}\right)^2 \right] \ll 1$  の近似を使用した。

(21)式を見ればわかるように、位相項  $\exp\left(-j\pi \frac{x_i^2 + y_i^2}{\lambda z_0}\right)$  と  $\exp\left(j\pi \frac{x_i^2 + y_i^2}{\lambda z_0}\right)$  がついているので相関出力像には歪が生じる。

Fig. 6 に示すのはこの方法による実験で得られた正三角形の自己相関像である。

## 6. 波長幅の広がった光による相関検出およびその像ぼけ

以上、反射型マッチトフィルターを用いて単色光で物体の相関を行うことについて述べた。反射型ホログラムは波長選択性と角度選択性をもっているのでわれわれはそれを利用して波長幅の広がった準単色光源（高圧水銀灯）を用いて物体の相関を検出する実験を行った。この場合に反射型ホログラムフィルターの波長選択性と角度選択性により再生される相関出力像のぼけが生じる。本章においてそのぼけ量についての考察を行なう。

(14)式の  $\delta(N_x)$  と  $\delta(N_y)$  は  $N_x$  と  $N_y$  の僅かの変化に対して非常に敏感である。出力像の(14)式の  $\text{sinc}(N_z)$  の argument が  $N_z = \pm 1$  の範囲内で再生が可能である。 $N_z = 1$  となった場合、 $\alpha_{xc} = \alpha_{x0}$ 、 $\alpha_{yc} = \alpha_{y0}$ （再生時の物体  $h(x_0 - c, y_0 - d)$  の位置と記録時の基準物体  $g(x_0 - a, y_0 - b)$  の位置が同じ）に対して光源の拡がりを見れば再生照明光の波数が  $k_c = k - \Delta k$  に変化した時、出力像の方向が  $\alpha_{xi} = \alpha_{xr} + \Delta \alpha_{xi}$ ； $\alpha_{yi} = \alpha_{yr} + \Delta \alpha_{yi}$ ； $\alpha_{zi} = \alpha_{zr} + \Delta \alpha_{zi}$  に変化したとし、これらを  $N_x = 0$ 、 $N_y = 0$ 、 $N_z = 1$  に代入すると次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} k \Delta \alpha_{xi} + \Delta k (\alpha_{x0} - \alpha_{xr}) &= 0 \\ k \Delta \alpha_{yi} + \Delta k (\alpha_{y0} - \alpha_{yr}) &= 0 \\ \frac{t}{2\pi} [k \Delta \alpha_{zi} + \Delta k (1 - \alpha_{zr})] &= 1 \end{aligned} \quad (22)$$

ただし  $\Delta k$ 、 $\Delta \alpha_{xi}$ 、 $\Delta \alpha_{yi}$ 、 $\Delta \alpha_{zi}$  を何れも小さいと仮定している。また  $\alpha_{xi} = \cos \theta_{xi}$ 、 $\alpha_{yi} = \cos \theta_{yi}$ 、 $\alpha_{zi} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_{xi} - \cos^2 \theta_{yi}}$  により微分すれば

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_{xi} &\cong -\sin \theta_{xi} \Delta \theta_{xi} \cong -\sin \theta_{xr} \Delta \theta_{xi} = -\beta_{xr} \Delta \theta_{xi} \\ \Delta \alpha_{yi} &\cong -\sin \theta_{yi} \Delta \theta_{yi} \cong -\sin \theta_{yr} \Delta \theta_{yi} = -\beta_{yr} \Delta \theta_{yi} \\ \Delta \alpha_{zi} &\cong \frac{\alpha_{xr} \beta_{xr}}{\alpha_{zr}} \Delta \theta_{xi} + \frac{\alpha_{yr} \beta_{yr}}{\alpha_{zr}} \Delta \theta_{yi} = -\beta_{zr} \Delta \theta_{zi} \end{aligned} \quad (23)$$

が得られる。ただし  $\beta_{xr} = \sin \theta_{xr}$ 、 $\beta_{yr} = \sin \theta_{yr}$ 、 $\beta_{zr} = \sin \theta_{zr}$  とおいた。(23)式を(22)式に代入して、 $\Delta k$ 、 $\Delta \theta_{xi}$ 、 $\Delta \theta_{yi}$  について解き、そして  $\Delta k = -\frac{2}{\lambda} \pi \Delta \lambda$  の関係を用いると、再生される波長範囲  $\Delta \lambda$  は

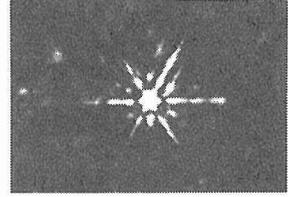


Fig. 6 Fig. 5 に示す光学系を用いた実験で得られた正三角形の自己相関像である。記録と再生波長は同じで  $\lambda = \lambda_c = 5145 \text{ \AA}$  とした。

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{t} \frac{\alpha_{zr}}{\alpha_{zr}(1-\alpha_{zr}) + \alpha_{yr}(\alpha_{y0} - \alpha_{yr}) + \alpha_{xr}(\alpha_{x0} - \alpha_{xr})} \quad (24)$$

となる。x, y 方向の再生光の角度選択性  $\Delta\theta_{xi}$ ,  $\Delta\theta_{yi}$  は

$$\Delta\theta_{xi} = \frac{\lambda}{t} \frac{\alpha_{zr}(\alpha_{x0} - \alpha_{xr})}{\beta_{xr}[\alpha_{zr}(1-\alpha_{zr}) + \alpha_{yr}(\alpha_{y0} - \alpha_{yr}) + \alpha_{xr}(\alpha_{x0} - \alpha_{xr})]} \quad (25)$$

$$\Delta\theta_{yi} = \frac{\lambda}{t} \frac{\alpha_{zr}(\alpha_{y0} - \alpha_{yr})}{\beta_{yr}[\alpha_{zr}(1-\alpha_{zr}) + \alpha_{yr}(\alpha_{y0} - \alpha_{yr}) + \alpha_{xr}(\alpha_{x0} - \alpha_{xr})]} \quad (26)$$

と書ける。また(23)式により z 方向の再生角度選択性  $\Delta\theta_{zi}$  は

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{zi} &= -\frac{\alpha_{xr}\beta_{xr}}{\alpha_{zr}\beta_{zr}}\Delta\theta_{xi} - \frac{\alpha_{yr}\beta_{yr}}{\alpha_{zr}\beta_{zr}}\Delta\theta_{yi} \\ &= \frac{\lambda}{t} \frac{\alpha_{xr}(\alpha_{xr} - \alpha_{x0}) + \alpha_{yr}(\alpha_{yr} - \alpha_{y0})}{\beta_{zr}[\alpha_{zr}(1-\alpha_{zr}) + \alpha_{yr}(\alpha_{y0} - \alpha_{yr}) + \alpha_{xr}(\alpha_{x0} - \alpha_{xr})]} \end{aligned} \quad (27)$$

で与えられる。観察面での z 方向の角度選択性  $\Delta\theta_{zi}$  による相関出力像のぼけ  $P_{\Delta\theta}$  は

PRUVWXYZIABCDEF  
 ABCDEFGHJKLMNPRT  
 a B9hjkSTÜSWOPRM  
 EGHJKMISTÜVWXYZ  
 DEGHJ SOPSTUVHJK

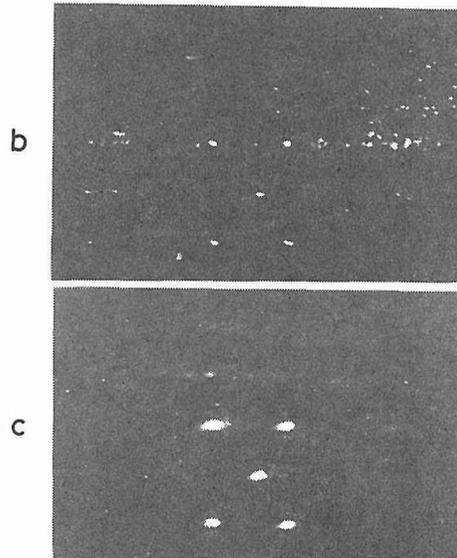


Fig. 7 反射型マッチトフィルターによる文字認識。反射型マッチトフィルターは“S”という英文字を波長 $\lambda=5145\text{\AA}$ で記録したものである。aは入力物体, bは $\text{Ar}^+$ レーザー $\lambda_c=5145\text{\AA}$ で再生された“S”の自己相関像, cは高圧水銀灯で再生された同英文字の自己相関像である。

$$P_{\Delta\theta} = 2f\Delta\theta_{zi} = \frac{2\lambda f}{t} \frac{\alpha_{xr}(\alpha_{xr} - \alpha_{xo}) + \alpha_{yr}(\alpha_{yr} - \alpha_{yo})}{\beta_{2r}[\alpha_{2r}(1 - \alpha_{2r}) + \alpha_{yr}(\alpha_{yo} - \alpha_{yr}) + \alpha_{xr}(\alpha_{xo} - \alpha_{xr})]} \quad (28)$$

となる。ただし  $f$  はフーリエ変換レンズの焦点距離である。また再生光の波長選択性  $\Delta\lambda$  による相関出力像のぼけ量  $P_{\Delta\lambda}$  は

$$P_{\Delta\lambda} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} s = \frac{\lambda s}{t} \frac{\alpha_{2r}}{\alpha_{2r}(1 - \alpha_{2r}) + \alpha_{yr}(\alpha_{yo} - \alpha_{yr}) + \alpha_{xr}(\alpha_{xo} - \alpha_{xr})} \quad (29)$$

で与えられる。ただし  $s$  は物体の大きさである。

(28)式から見ればわかるように  $z$  方向の再生角度選択性  $\Delta\theta_{zi}$  による相関出力像のぼけ量  $P_{\Delta\theta}$  はフーリエ変換レンズの焦点距離  $f$ 、記録波長  $\lambda$ 、再生光の  $z$  方向の角度選択性  $\Delta\theta_{zi}$  に比例し、乳剤層の厚さ  $t$  に反比例する。また物体光と参照光をホログラムに対して対称に入射させると ( $\alpha_{xo} = \alpha_{xr}$ ,  $\alpha_{yo} = \alpha_{yr}$  の時),  $P_{\Delta\theta} = 0$  となるので像のぼけは一番小さいがホログラム乾板のガラス表面による正反射光が再生像と重なるから観測に不都合である。これを避けるためには物体光と参照光の入射方向をホログラムに対し対称の位置からわずかにずらせば良い。

また(29)式により再生波長選択性  $\Delta\lambda$  による相関像のぼけ  $P_{\Delta\lambda}$  は記録波長  $\lambda$ 、物体の大きさ  $s$ 、反射型ホログラムの波長選択性  $\Delta\lambda$  に比例し、乳剤の厚さ  $t$  に反比例する。 $P_{\Delta\lambda}$  を小さくするため、記録波長は短い方が良く、また物体の大きさ  $s$  も小さい方が好ましい。

Fig. 7 に示したのはポリウム反射型マッチトフィルターにより単色光と波長幅の広がった準単色光源(高圧水銀灯)を用いて物体の相関検出を行なった実験結果である。反射型マッチトフィルターは“S”という英文字を基準物体として作った。Fig. 7a は再生用入力物体, Fig. 7b と Fig. 7c はそれぞれ  $A_r^+$  レーザー (5145 Å) と高圧水銀灯 (中心波長 5461 Å) で再生された“S”という英文字の自己相関像である。

Fig. 7b と Fig. 7c を比較すれば波長幅の広がった高圧水銀灯で再生する場合には、相関出力像にはある程度のぼけが存在するが雑音が割合少なくなっていることがわかる。

## 7. おわりに

本研究においてポリウム反射型マッチトフィルターを用いてレーザーと波長幅の広がった光源(高圧水銀灯)で物体の相関検出を行なった。この方法の長所は反射型ホログラムは波長選択性があり一種の干渉フィルターの役目をするので高圧水銀灯のようなスペクトルの広がった光源で相関像を再生することができる。また一つのレンズで同時にフーリエ変換とフーリエ逆変換を行なうので実験装置の長さを約半分短縮できる。一方、この方法の短所は単色光で再生するとき、記録と同じ波長で再生するため、現象、定着処理による乳剤の厚さの変化を補正しなければならないことである。波長幅の広がった光源で再生するとき、得られた像のぼけは反射型ホログラムの波長選択性と角度選択性に依存しているので、像のぼけを低減するためには波長と角度の選択性の狭い反射型マッチトフィルターを作ることが重要なこととなる。それを実現するための現象処理、乳剤の厚さの回復には写真技術的にいろいろ工夫しなければならない。

この反射型マッチトフィルタリングは二次元的に物体の相関検出を行なう方法としてパターン認識、文字識別などに有用と思われる。

## 参 考 文 献

1. A. Vander Lugt: IEEE Trans. Inform. Theory, IT-10 (1964) p. 2

2. G. C. Righini, V. Russo and S. Sottini : Appl. Opt., **13** (1974) p. 1019
3. F. T. S. Yu: Opt. Commun., **27** (1978) p. 23
4. G. M. Morris and Nicholas George: Opt. Lett., **5** (1980) p. 202
5. G. M. Morris and Nicholas George: Appl. Opt., **19** (1980) p. 3843
6. 章 恩 耀, 石 井 行 弘, 村 田 和 美: 北海道大学工学部研究報告, 第100号 (1980) p. 73
7. J. W. Goodman: “*Introduction to Fourier Optics*”, (McGraw-Hill, New York 1968) pp. 50  
-51
8. E. N. Leith et al.: Appl. Opt., **5** (1966) p. 1303
9. L. H. Lin and C. V. LoBianco: Appl. Opt., **6** (1967) p. 1255
10. M. Shen, D. Casasent, T. K. Luu and B. Feng: Opt. Commun., **34** (1980) p. 311
11. M. Shen, D. Casasent, T. K. Luu and B. Feng: Opt. Commun., **34** (1980) p. 316