北海道大学工学部研究報告
第105号（昭和56年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 105 (1981)

加重多数決ゲームの表示に基づくn人協力ゲームの研究

栗野洋子* 伊達 惇**

（昭和56年3月31日受理）

Studies of N-Person Cooperative Games Based on the Characterizations of Weighted Majority Games

Yoko KURINO and Tsutomu DATE

(Received March 31, 1981)

Abstract

We deal with a classification of simple games —— a class of games in game theory established by von Neumann and Morgenstern in 1940s, aiming at contributions to systematic characterizations of combinatorial problems. A simple game is the most appropriate class of games for the quantitative studies of behaviors in voting systems such as assemblies, committees or general meetings of stockholders etc. The majority decision rules can be characterized by constant-sum simple games, and the simple games can be expressed by weighted majority games.

In this paper, at first we give perfect classifications of constant-sum simple games with players less than eight, and improve the works of Isbell, who stated that, " For six players there are exactly 14 such games, and for seven at least 110. " Next we propose a new estimate of the number of such games, and give more simple expressions for the simple games by introducing a relation between the games and a function with one parameter.

1. はじめに

ゲーム理論は，多くの可能な決定の中から，一定の評価基準に基づいて決定を選びだすしくみに関する理論である。決定を行う必要性は，経済的競争，社会的あるいは政治的な状況のもとで無数にあると言ってよい。身近なものとしては，多数決で意志を決定するという例がある。議会，委員会あるいは株主総会など，一票の重みが必らずしも均一でない場合でも本質的に相違はない。ゲーム理論は，John von Neumann の論文 " Zur Theorie der Gesellschaftsspiele " (1928) に始まるが，世間に広く注目されるようになったのは，von Neumann と Morgenstern の共著[1]が出版されてからである。ここでは，競争原理を持つ集団とその構成について，基本となる論理構造を理論的に与えているが，特徴的なことを挙げれば，定式化を容易にするため決定選択の基準となる「効用」の可測性を仮定したこと，多人数ゲームにおけるプレーヤーの間の結託 (coalition)

* 情報工学専攻 情報数理工学第一講座
** 情報工学専攻 情報科学

を認める場合のゲームおよびその「解」の性質を定義し，「解」の存在について厳密に議論したことであると言えよう。

本報告が扱う単純ゲームの分類の問題も，すでにこの書において取り上げられ，プレーヤーの数が5人までの場合のすべてについて，定数和単純ゲームを加重多数決ゲームの重みの表示を用いて列挙している。しかし，6人以上のゲームについては，分類がむずかしいとしている。その後，この定数和単純ゲームの分類問題について，Isbell が1956年に6人ゲームの数が正確に14種あること，7人ゲームの数は少なくとも110種はあることを述べている。

この問題の延長として，本報告は3節において，7人ゲームの数が正確に114種あること，8人ゲームが正確に1892種あることを示し，5節においてプレーヤーの数とゲームの数との間の近似的な関係式を導出する。

また，3節で明らかにするように，プレーヤーの数が増大するとともに，ゲームの数は指数的に増大するため，ゲームの分類の見通しが著しく悪くなることに鑑み，厳密さを多少犠牲にしても，分類の見通しを平易にすることが必要となる場合も出て来よう。そこで，4節において，経済学の分野で試行的に扱われている Zipf の法則を参考にして，この分類の見通しを良くする工夫を行い，8人ゲームまでの分類の見通しを論じることとした。

2. 準備及び定義

2.1 単純ゲームの定式化

$N=\{1, 2, \cdots, n\}$ をプレイヤーの集合，V を N のすべての部分集合に対し定められる実数値集合関数（特性関数）とする時，n人ゲームを $G=(N, V)$ で表す。V は次の性質を満たすものとする。

$$V(\phi)=0 \qquad \phi \text{ は空集合}$$
$$V(\{i\})=0 \qquad i=1, 2, \cdots, n \tag{1}$$
$$V(N)=1$$

S, $T \subset N$ に対し，

$$S \subset T \text{ の時} \qquad V(S) \leqq V(T)。 \tag{2}$$

以後，N の部分集合を「結託」と呼ぶことにする。任意の結託 S について，N に対する補集合を $\bar{S}$で表す。この時，特性関数が以下の性質を満たすゲームを定数和ゲームと呼ぶ。

$$V(S)+V(\bar{S})=1 \qquad {}^{\forall}S \subset N \tag{3}$$

単純ゲームとは，特性関数が0または1のみをとるゲームの類である。すなわち，

$$V(S)=0 \text{ or } 1 \qquad {}^{\forall}S \subset N \tag{4}$$

であり，この時，N のすべての部分集合を 2^N と記せば，特性関数の値により次のような 2^N の分割を与える。

$$W=\{S \subset N \mid V(S)=1\}$$
$$L=\{S \subset N \mid V(S)=0\} \tag{5}$$
$$W \cap L=\phi, \quad W \cup L=2^N$$

この W を勝利結託，L を敗北結託と呼ぶ。単純ゲームであれば，W または L のどちらか一方のみを指定することによりゲームが定められるから，以下では特に単純ゲームを $\Gamma=(N, W)$ で表す。

2. 2　加重多数決ゲームの重み表示

単純ゲームを実際に構成するものとして，投票の原理を一般化した加重多数決ゲームがある。プレイヤーiに割り当てられる重みをw_iとし，次のベクトル，

$$\mathbf{w}=(w_1, w_2, \cdots, w_n), \qquad w_i \geqq 0 \qquad i=1, 2, \cdots, n \tag{6}$$

および正定数qをもって加重多数決ゲームの重み表示とする。この時，

$$w(S)=\sum_{i\in S} w_i \tag{7}$$

とおけば，適当な単純ゲーム$\Gamma=(N, W)$に対し，

$$W=\{S\subset N \mid w(S)\geqq q\} \tag{8}$$

として関係づけられる。ただし，$w_i=0$となるプレイヤーiは，このゲームに何ら影響を与えないのでダミーと呼び，以下では特に断わらない限りダミーを含まないゲームを扱う。

単純ゲーム$\Gamma=(N, W)$に対する重み表示は一意ではない。または，重み表示が存在しない場合もある。しかしながら定数和ゲームに限れば，すべてのプレイヤーの重みが最小の整数となる重み表示を用いることにより，すべてのゲームが一意に対応づけられる。さらにこの時，w(N)は奇数であり，

$$q=\frac{w(N)+1}{2} \tag{9}$$

と関係づけられるため，qを省略して表すことができる。以下の議論では定数和ゲームに限定し，重み表示のqを省略して重みベクトルのみで表す。

3. 定数和単純ゲームの分類

加重多数決ゲームの重み表示を用い，定数和単純ゲームの分類を行うことができる。しかしながら，これらを正確に列挙する有効な方法は知られていない。ただし，比較的小さな人数n人のプレイヤーに対しn個の整数の組を重みとして与え，勝利結託を次々に比較することによりすべてのゲームを数え上げることは可能である。この場合，定数和単純ゲームの最小の整数の重みは高々n番目のFibonacci数より大きくならないことがIsbell[2]により示された。Isbellは，2)において同ゲームの数について，「6人ゲームは正確に14種あるが，7人ゲームは少なくとも110種あることが分かっている。」と述べている。本研究ではその先を明らかにすべく，数え上げによる方法で$n\leqq 8$の定数和単純ゲームの分類を行い，すべての異なるゲームの重み表示を列挙した。これに要した時間は，本学大型計算機センターHITAC M-200Hにより$n=6$の時2秒，$n=7$の時40秒，$n=8$の時14分であった。$n=9$の場合は4時間程度が見込まれる。以下に，与えられたnに対するこのアルゴリズムを示す。

step 1　n個の整数の組を各プレイヤーに重み$\mathbf{w}=(w_1, w_2, \cdots, w_n)$として与える。ただし，

$$w_1\geqq w_2\geqq\cdots\geqq w_n,\quad w(N)\text{は奇数} \tag{10}$$

step 2　$q=1/2\cdot[w(N)+1]$とおき，すべての$S\subset N$について$w(S)-q$が正となるものを探し，勝利結託Wを構成する。

step 3　このようにして求めたWを以前のものと比較し，同じものがなければ記憶・出力する。

表 1　定数和単純ゲームの全分類

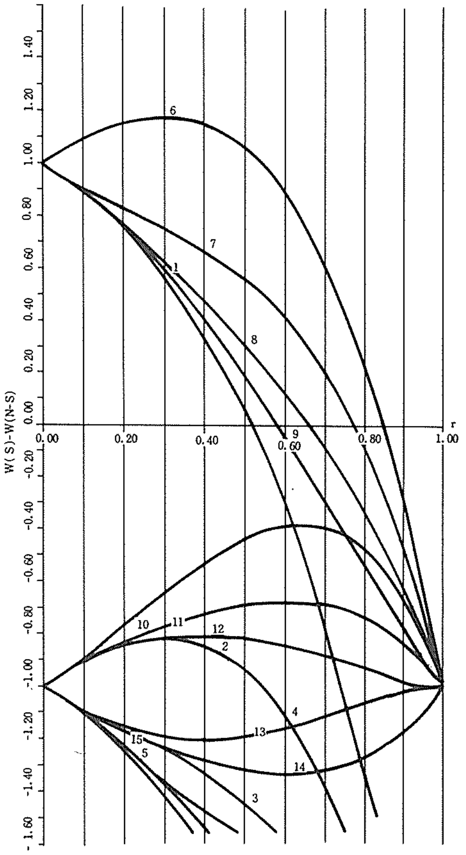
3	Players	(1 1 1)					Total	1
4	Players	(2 1 1 1)					Total	1
5	Players	(1 1 1 1 1)	(2 2 1 1 1)	(3 1 1 1 1)	(3 2 2 1 1)		Total	4
6	Players	(2 1 1 1 1 1)	(2 2 2 1 1 1)	(3 2 1 1 1 1)	(3 2 2 2 1 1)	(3 3 2 1 1 1)		
		(3 3 2 2 2 1)	(4 1 1 1 1 1)	(4 2 2 1 1 1)	(4 3 2 2 1 1)	(4 3 3 1 1 1)		
		(4 3 3 2 2 1)	(5 2 2 2 1 1)	(5 3 3 2 1 1)	(5 4 3 2 2 1)		Total	14
7	Players	(1 1 1 1 1 1 1)	(2 2 1 1 1 1 1)	(2 2 2 2 1 1 1)	(3 1 1 1 1 1 1)	(3 2 2 1 1 1 1)		
		(3 2 2 2 2 1 1)	(3 3 1 1 1 1 1)	(3 3 2 2 1 1 1)	(3 3 2 2 2 2 1)	(3 3 3 1 1 1 1)		
		(3 3 3 2 2 1 1)	(3 3 3 2 2 2 2)	(4 2 1 1 1 1 1)	(4 2 2 2 1 1 1)	(4 3 2 1 1 1 1)		
		(4 3 2 2 2 1 1)	(4 3 3 2 1 1 1)	(4 3 3 2 2 2 1)	(4 3 3 3 2 1 1)	(4 3 3 3 2 2 2)		
		(4 4 2 2 1 1 1)	(4 4 3 1 1 1 1)	(4 4 3 2 2 1 1)	(4 4 3 3 2 2 1)	(4 4 3 3 3 2 2)		
		(5 1 1 1 1 1 1)	(5 2 2 1 1 1 1)	(5 2 2 2 2 1 1)	(5 3 2 2 1 1 1)	(5 3 2 2 2 2 1)		
		(5 3 3 1 1 1 1)	(5 3 3 2 2 1 1)	(5 3 3 3 1 1 1)	(5 3 3 3 2 2 1)	(5 4 2 2 2 1 1)		
		(5 4 3 2 1 1 1)	(5 4 3 2 2 2 1)	(5 4 3 3 2 1 1)	(5 4 3 3 2 2 2)	(5 4 3 3 3 2 1)		
		(5 4 4 1 1 1 1)	(5 4 4 2 2 1 1)	(5 4 4 3 2 2 1)	(5 4 4 3 3 2 2)	(5 5 3 2 2 1 1)		
		(5 5 4 2 2 2 1)	(5 5 4 3 3 2 1)	(5 5 4 4 3 2 2)	(5 5 4 4 3 3 3)	(5 5 4 4 4 2 1)		
		(6 2 2 2 1 1 1)	(6 3 2 2 2 1 1)	(6 3 3 2 1 1 1)	(6 3 3 2 2 2 1)	(6 4 3 2 2 1 1)		
		(6 4 3 3 1 1 1)	(6 4 3 3 2 2 1)	(6 4 4 2 1 1 1)	(6 4 4 3 2 1 1)	(6 4 4 3 3 2 1)		
		(6 5 3 2 2 2 1)	(6 5 3 3 2 1 1)	(6 5 4 2 2 1 1)	(6 5 4 3 2 2 1)	(6 5 4 3 3 2 2)		
		(6 5 4 4 3 2 1)	(6 5 4 4 3 3 2)	(6 5 5 2 2 2 1)	(6 5 5 3 3 2 1)	(6 5 5 4 3 2 2)		
		(6 5 5 4 4 2 1)	(7 2 2 2 2 1 1)	(7 3 3 2 2 1 1)	(7 3 3 3 1 1 1)	(7 3 3 3 2 2 1)		
		(7 4 3 2 2 2 1)	(7 4 4 2 2 1 1)	(7 4 4 3 1 1 1)	(7 4 4 3 2 2 1)	(7 5 3 3 2 2 1)		
		(7 5 4 3 2 1 1)	(7 5 4 3 3 2 1)	(7 5 4 4 2 2 1)	(7 5 5 2 2 1 1)	(7 5 5 4 3 2 1)		
		(7 6 3 3 2 2 2)	(7 6 4 3 2 2 1)	(7 6 5 2 2 2 1)	(7 6 5 3 3 2 1)	(7 6 5 4 3 2 2)		
		(7 6 5 4 4 2 1)	(7 6 5 4 4 3 2)	(7 6 5 5 4 3 3)	(7 7 4 4 4 2 1)	(8 3 3 3 2 1 1)		
		(8 4 3 3 2 2 1)	(8 5 4 3 2 2 1)	(8 5 5 3 2 1 1)	(8 5 5 4 2 2 1)	(8 6 4 3 3 2 1)		
		(8 6 5 4 3 2 1)	(8 7 4 3 3 2 2)	(8 7 5 3 3 2 1)	(8 7 5 4 4 2 1)	(8 7 6 5 4 3 2)		
		(9 4 4 3 2 2 1)	(9 5 5 3 2 2 1)	(9 6 5 4 2 2 1)	(9 7 5 4 3 2 1)	(9 7 6 4 4 2 1)		
		(9 8 5 4 3 2 2)	(9 8 5 4 4 2 1)	(10 7 7 4 4 2 1)	(11 8 7 4 4 2 1)		Total	114
8	Players						Total	1892
		(2 1 1 1 1 1 1 1)	(2 2 2 1 1 1 1 1)	(2 2 2 2 2 1 1 1)	(3 2 1 1 1 1 1 1)			
		(3 2 2 2 1 1 1 1)	(3 2 2 2 2 2 1 1)	(3 3 2 1 1 1 1 1)	(3 3 2 2 2 1 1 1)			
		(3 3 2 2 2 2 2 1)	(3 3 3 2 1 1 1 1)	(3 3 3 2 2 2 1 1)	(3 3 3 2 2 2 2 2)			
		(3 3 3 3 2 1 1 1)	(3 3 3 3 2 2 2 1)	(4 1 1 1 1 1 1 1)	(4 2 2 1 1 1 1 1)			
		(4 3 1 1 1 1 1 1)	(4 3 2 2 1 1 1 1)	(4 3 2 2 2 2 1 1)	(4 3 3 1 1 1 1 1)			
		(4 3 3 2 2 1 1 1)	(4 3 3 2 2 2 2 1)	(4 3 3 3 1 1 1 1)	(4 3 3 3 2 2 1 1)			
		(4 3 3 3 2 2 2 2)	(4 3 3 3 3 1 1 1)	(4 3 3 3 3 2 2 1)	(4 4 2 1 1 1 1 1)			
		(4 4 2 2 2 1 1 1)	(4 4 3 2 1 1 1 1)	(4 4 3 2 2 2 1 1)	(4 4 3 3 2 1 1 1)			
		(4 4 3 3 2 2 2 1)	(4 4 3 3 3 2 1 1)	(4 4 3 3 3 2 2 2)	(4 4 3 3 3 3 2 1)			
		(4 4 4 1 1 1 1 1)	(4 4 4 2 2 1 1 1)	(4 4 4 3 2 2 1 1)	(4 4 4 3 3 1 1 1)			
		(4 4 4 3 3 2 2 1)	(4 4 4 3 3 3 2 2)	(5 2 1 1 1 1 1 1)	(5 2 2 2 1 1 1 1)			
		(5 2 2 2 2 2 1 1)	(5 3 2 1 1 1 1 1)	(5 3 2 2 2 1 1 1)	(5 3 2 2 2 2 2 1)			
		(5 3 3 2 1 1 1 1)	(5 3 3 2 2 2 1 1)	(5 3 3 2 2 2 2 2)	(5 3 3 3 2 1 1 1)			
		(5 3 3 3 2 2 2 1)	(5 3 3 3 3 2 1 1)	(5 3 3 3 3 2 2 2)	(5 4 2 2 1 1 1 1)			
		(5 4 2 2 2 2 1 1)	(5 4 3 1 1 1 1 1)	(5 4 3 2 2 1 1 1)	(5 4 3 2 2 2 2 1)			
		(5 4 3 3 1 1 1 1)	(5 4 3 3 2 2 1 1)	(5 4 3 3 2 2 2 2)	(5 4 3 3 3 1 1 1)			
		(5 4 3 3 3 2 2 1)	(5 4 3 3 3 3 2 2)	(5 4 4 2 1 1 1 1)	(5 4 4 2 2 2 1 1)			
		(5 4 4 3 2 1 1 1)	(5 4 4 3 2 2 2 1)	(5 4 4 3 3 2 1 1)	(5 4 4 3 3 2 2 2)			
		(5 4 4 3 3 3 2 1)	(5 4 4 3 3 3 3 2)	(5 4 4 4 2 2 1 1)	(5 4 4 4 3 1 1 1)			
		(5 4 4 4 3 2 2 1)	(5 4 4 4 3 3 2 2)	(5 5 2 2 2 1 1 1)	(5 5 2 2 2 2 2 1)			
		(5 5 3 2 1 1 1 1)	(5 5 3 2 2 2 1 1)	(5 5 3 3 2 1 1 1)	(5 5 3 3 2 2 2 1)			

〔以下略〕

以上を，重み(1, 1, …, 1)から始め，各成分をstep 1の条件をこわさぬよう増しながら，最大の重みがn番目のFibonacci数となるものに至るまで繰り返す。

表 2 パラメータ r の区間に対応する単純ゲームの重み表示

		r		重み
3	Players	r = 0.500000	- - 0.618033	(1 0 0)
		r = 0.618035	- - 1.000000	(1 1 1)
4	Players	r = 0.500000	- - 0.543688	(1 0 0 0)
		r = 0.543690	- - 1.000000	(2 1 1 1)
		r = 1.000000		(1 1 1 1)
5	Players	r = 0.500000	- - 0.518789	(1 0 0 0 0)
		r = 0.518790	- - 0.580691	(3 1 1 1 1)
		r = 0.580692	- - 0.660992	(2 1 1 1 0)
		r = 0.660994	- - 0.774803	(3 2 2 1 1)
		r = 0.774805	- - 0.848374	(2 2 1 1 1)
		r = 0.848375	- - 1.000000	(1 1 1 1 1)
6	Plyers	r = 0.500000	- - 0.508660	(1 0 0 0 0 0)
		r = 0.508662	- - 0.531009	(4 1 1 1 1 1)
		r = 0.531011	- - 0.557909	(3 1 1 1 1 0)
		r = 0.557910	- - 0.618033	(5 2 2 2 1 1)
		r = 0.618035	- - 0.710434	(5 3 3 2 1 1)
		r = 0.710436	- - 0·786150	(4 3 2 2 1 1)
		r = 0.786151	- - 1.000000	(4 3 3 2 2 1)
		r = 1.000000		(1 1 1 1 1 1)
7	Players	r = 0.500000	- - 0.504138	(1 0 0 0 0 0 0)
		r = 0.504139	- - 0.513648	(5 1 1 1 1 1 1)
		r = 0.513649	- - 0.524289	(4 1 1 1 1 1 0)
		r = 0.524291	- - 0.538826	(7 2 2 2 2 1 1)
		r = 0.538827	- - 0.548261	(3 1 1 1 1 0 0)
		r = 0.548263	- - 0.569839	(8 3 3 3 2 1 1)
		r = 0.569840	- - 0.593145	(5 2 2 2 1 1 0)
		r = 0.593146	- - 0.600639	(7 3 3 3 1 1 1)
		r = 0.600641	- - 0.642660	(6 3 3 2 1 1 1)
		r = 0.642662	- - 0.682327	(9 5 5 3 2 2 1)
		r = 0.682328	- - 0.754877	(7 5 4 3 2 1 1)
		r = 0.754878	- - 0.795065	(5 4 3 2 2 2 1)
		r = 0.795066	- - 0.835489	(6 5 4 3 3 2 2)
		r = 0.835490	- - 0.840308	(7 6 5 4 4 3 2)
		r = 0.840310	- - 0.860572	(6 5 4 4 3 3 2)
		r = 0.860573	- - 0.877230	(7 6 5 4 4 3 3)
		r = 0.877231	- - 0.884805	(4 4 3 3 3 2 2)
		r = 0.884807	- - 0.904988	(5 5 4 4 3 3 3)
		r = 0.904989	- - 0.920567	(3 3 3 2 2 2 2)
		r = 0.920568	- - 1.000000	(1 1 1 1 1 1 1)
8	Players	r = 0.500000	- - 0.502016	(1 0 0 0 0 0 0 0)
		r = 0.502018	- - 0.506374	(6 1 1 1 1 1 1 1)
		r = 0.506376	- - 0.511034	(5 1 1 1 1 1 0 0)
		r = 0.511036	- - 0.516441	(9 2 2 2 2 2 1 1)
		r = 0.516443	- - 0.521124	(4 1 1 1 1 1 0 0)
		r = 0.521126	- - 0.527719	(11 3 3 3 3 2 1 1)
		r = 0.527721	- - 0.534489	(7 2 2 2 2 1 1 0)
		r = 0.534491	- - 0.543688	(10 3 3 3 3 1 1 1)
		r = 0.543690	- - 0.553375	(11 4 4 4 3 1 1 1)
		r = 0.553377	- - 0.562780	(8 3 3 3 2 1 1 0)
		r = 0.562782	- - 0.578329	(13 5 5 5 3 2 1 1)
		r = 0.578331	- - 0.582869	(5 2 2 2 1 1 0 0)
		r = 0.582870	- - 0.592283	(12 5 5 5 2 2 1 1)
		r = 0.592285	- - 0.606684	(11 5 5 4 2 2 1 1)
		r = 0.606686	- - 0.610655	(13 6 6 5 2 2 2 1)
		r = 0.610657	- - 0.626091	(6 3 3 2 1 1 1 0)
		r = 0.626093	- - 0.631971	(15 8 8 5 3 3 2 1)
		r = 0.631973	- - 0.656113	(11 6 6 4 2 2 1 1)
		r = 0.656115	- - 0.667959	(9 5 5 3 2 1 1 1)
		r = 0.667961	- - 0.700920	(11 7 6 4 3 2 1 1)
		r = 0.700922	- - 0.709431	(15 8 8 5 3 3 2 1)
		r = 0.709433	- - 0.720510	(13 9 7 5 3 3 2 1)
		r = 0.720512	- - 0.737352	(8 6 4 3 2 2 1 1)
		r = 0.737354	- - 0.750015	(12 9 7 5 4 3 2 1)
		r = 0.750017	- - 0.778187	(9 7 5 4 3 2 2 1)
		r = 0.778189	- - 0.787430	(8 6 5 4 3 2 2 1)
		r = 0.787432	- - 0.794250	(10 8 6 5 4 3 3 2)
		r = 0.794252	- - 0.814398	(14 11 9 7 6 5 4 3)
		r = 0.814400	- - 0.824415	(9 7 6 5 4 3 3 2)
		r = 0.824417	- - 0.836796	(11 9 7 6 5 4 4 3)
		r = 0.836798	- - 0.842428	(10 8 7 6 5 4 4 3)
		r = 0.842430	- - 0.858564	(11 9 8 7 6 5 4 3)
		r = 0.858566	- - 0.877626	(12 10 9 8 7 6 5 4)
		r = 0.877628	- - 1.000000	(13 11 10 9 8 7 6 5)
		r = 1.000000		(1 1 1 1 1 1 1 1)



5 PLAYERS

1 : {1} $+W_1-W_2-W_3-W_4-W_5$
2 : {2} $-W_1+W_2-W_3-W_4-W_5$
3 : {3} $-W_1-W_2+W_3-W_4-W_5$
4 : {4} $-W_1-W_2-W_3+W_4-W_5$
5 : {5} $-W_1-W_2-W_3-W_4+W_5$
6 : {1 , 2} $+W_1+W_2-W_3-W_4-W_5$
7 : {1 , 3} $+W_1-W_2+W_3-W_4-W_5$
8 : {1 , 4} $+W_1-W_2-W_3+W_4-W_5$
9 : {1 , 5} $+W_1-W_2-W_3-W_4+W_5$
10 : {2 , 3} $-W_1+W_2+W_3-W_4-W_5$
11 : {2 , 4} $-W_1+W_2-W_3+W_4-W_5$
12 : {2 , 5} $-W_1+W_2-W_3-W_4+W_5$
13 : {3 , 4} $-W_1-W_2+W_3+W_4-W_5$
14 : {3 , 5} $-W_1-W_2+W_3-W_4+W_5$
15 : {4 , 5} $-W_1-W_2-W_3+W_4+W_5$

図1 パラメータrによる単純ゲームの分類

4. 経験則に基づくゲーム表示の一工夫

集団における個体の有する量はその順位を変数とする簡単な関数によって近似できることが，Zipf の法則として経済学等の分野で経験的に知られている。そこでここでは，各プレイヤーの重

みが適当な関数により近似される加重多数決ゲームを考察する。

各プレイヤーの重みが次のような関数で近似される定数和n人ゲームを例にとって示す。

$$w_i = r^{i-1} \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \qquad 1/2 \leqq r \leqq 1 \tag{11}$$

このように置くことで，n次元のベクトルで表されるものを簡単な手続きで比較したい場合，便利な方法が得られる。パラメータを一つにしているためであり，プレイヤー数nが有限の値で与えられる場合には，パラメータの区間に対し分類された適当な定数和単純ゲームの重み表示が対応づけられる。この対応づけの原理は，定数和ゲームであれば任意のゲーム$\Gamma=(N,\ W)$の結託Sに対し次の関係が得られることで示すことができる。すなわち，

$$S \in W \iff w(S)-w(\bar{S})>0 \tag{12}$$

より，すべての$S \subset N$について$w(S)-w(\bar{S})$の値を縦軸に，rをパラメータとして横軸に表す。（図1参照)。ここにSは，図1左下に列挙された「結託」の順に選ばれており，それぞれが図の曲線に対応する。$w(S)-w(\bar{S})$の値は，それぞれのSに対して図1右下に示される式により計算される。この時あるrの区間において，すべての曲線が正負の関係を変えない，すなわちr軸を横切らない場合，この区間に対応するゲームは同一であることになる。逆に言えば，いずれかのSに対応する曲線がr軸を横切る点において，ゲームが異なるものとなる。(あるSについて$w(S)-w(\bar{S})=0$を与えるrの一点には，定数和とならない単純ゲームが対応する。）表2では，8人ゲームまでこのすべての対応づけを示した。与えられた人数のゲームに関し，パラメータrの区間に対して右側に示されるゲームの重み表示が対応づけられる。この重み表示は，関係式(12)を制約条件とし，各プレイヤーの重みを最小の整数とする整数計画法を解くことにより求められる。このことによって，定数和単純ゲームのある類に関し順序づけを行い，ある程度の分類の見通しを与えることはできる。

5. 定数和単純ゲームの数の評価

ここでは定数和単純ゲームの数に対する評価式を提案する。この式は著者のうち栗野が発見したものである。まだ試行的な段階であるが，現在判明している限りの定数和単純ゲームの数と良く一致する。

提案　ダミーを含むn人定数和単純ゲームの数の近似式として，次式を考える。

$$2^{{}_nC_2/2} \Big/ n \tag{13}$$

考察　すべての可能性を含めた異なる単純ゲームの数は2^{2^n}種ある。これらは，すべての2^N中の結託Sに対し$V(S)=0$または1を与える異なる割り当て方である。これらのうち，特性関数が満たすべき条件，および定数和であるという制約を次に示せば，

1)　$V(\phi)=0$，$V(\{i\})=0$　$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，$V(N)=1$

2)　S，$T \in 2^N$，$S \subset T$ならば　$V(S) \leqq V(T)$

3)　(3) 式を変形し，Nの分割をS_1，S_2，…，S_mとすれば，

$$V(S_1)+V(S_2)+\cdots+V(S_m)=1 \tag{14}$$

となる。2)，3)により拘束される場合の数はほとんど正確には求められない。しかしながら，実際にはこれらの条件がゲームの数に大きく影響する。そこでここでは2）により制限を受けて，V（S）の値を任意に定めることのできる$S \in 2^N$の数がV（S）の値が未定であるような最小元，

すなわち1)より $|S| = 2$ となるSの個数 ${}_nC_2$ で近似できると考える。また3)により，これらのうちさらに半数の元は残りの半数の任意の元と互いに交わらないと考えられる。ただし，これらのことで可能な特性関数の組合せの中には，単にプレイヤーの置換により同じゲームとなるものが何通りか含まれている。ほとんどの単純ゲームは，少なくともn通りのプレイヤーの置換により異なる表現を持つ。したがって以上を考え合わせ，(ダミーも含んだ）定数和単純ゲームの評価式として(13)式を提案する。

表3　近似数による定数和単純ゲームの数の評価

人数 n	$\frac{{}_nC_2}{2}$	$\frac{2^{{}_nC_2/2}}{n}$	$\frac{2^{{}_nC_2/2}}{n}-\frac{2^{{}_{n-1}C_2/2}}{(n-1)}$	ゲームの全数
3	切捨て 1 (切上げ 2)	.75 (1.3)	1	1
4	3	2	1	1
5	5	6.4	4	4
6	7 (8)	21.3 (42.7)	15	14
7	10 (11)	146.3 (292.6)	125	114
8	14	2048	1902	1892
9	18	29127.1	27079	
10	22 (23)	419430.4 (838860.8)	390303	?

また，この式を用い，ダミーを含まないn人定数和ゲームの数は次のように考えられる。

$$2^{{}_nC_2/2}\Big/n - 2^{{}_{n-1}C_2/2}\Big/(n-1) \qquad (15)$$

すなわち，n人の場合の評価数より(n－1)人以下のすべてのゲームの評価数を除いたものを，ダミーを含まないn人ゲームの数として用いることができる。これらの値を計算し，数え上げによる手法で求めたゲームの数（ダミーを含まない）との比較を表3に示す。

6. おわりに

本研究により，von Neumann 以来の問題である定数和単純ゲームの分類を前進させると共に，体系的な見通しを与え，またここで提案したゲームの評価数により，n人協力ゲームの組合せ論的複雑さを定量的に予想することが可能となった。すなわち，7人ゲームの数が正確に114種あること，8人ゲームが正確に1892種あることを示し，さらにプレイヤー数とゲームの数の間の近似的な関係式を導出した。またそのプレイヤー数の増大に対し，ゲームの数が指数的に増大するため分類の見通しは著しく悪くなる。そこでより平易な見通しを得るため，経済学等の分野で試行的に扱われている Zipf の法則を参考にして，ゲームに対する1パラメータ表示を導入し8人ゲームまでの分類の見通しについて論じた。

参考文献

1) von Neumann, J., & Morgenstern, O.: Theory of games and economic behavior, (1944), Princeton Univ. Press.

2) Isbell, J. R.: Quarterly Journal Math., 7 (1956), p. 183

3) Shapley, L. S.: Behavioral Science, 7 (1962), p. 59