



Title	2次元非結合的代数系の性質およびMarkusの標準形への適用について
Author(s)	伊達, 惇; Date, Tsutomu
Citation	北海道大學工學部研究報告, 107, 105-114
Issue Date	1982-01-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41710
Type	departmental bulletin paper
File Information	107_105-114.pdf



2次元非結合的代数系の性質および Markus の標準形への適用について

伊 達 惇
(昭和 56 年 9 月 30 日受理)

On the properties of two-dimensional nonassociative algebra and an application to Markus' canonical form

Tsutomu DATE
(Received September 30, 1981)

Abstract

This paper deals with an analysis of the canonical form of two-dimensional homogeneous quadratic differential equation systems, proposed by L. Markus making use of the properties of nonassociative algebra. The differential systems of this type are encountered in a number of practical problems, such as chemical reaction processes, the stability problem of critical points, and so on.

Markus' canonical form was shown to have several weak points so much so that it is necessary to make irrational calculations in order to see to which type an arbitrarily given system belongs, whereas we have only to carry out rational calculations if we use our methods.

This paper shows complete analysis of the Markus' canonical form with details of computation processes made into tables, which results in showing Markus' irrational classifications arising from the errors in his calculations.

結 言

L. Markus は、化学反応論、生物集団に関する Volterra 方程式、あるいは一次の項が厳密に消滅する力学系等に重要な役割を果す同二次微分方程式系をとりあげ、後述するような非結合的代数系の諸性質を利用することによって、その標準形を提示した¹⁾。著者は、全く別の観点から二次変換の標準形を策定していたが²⁾、その成果はこの問題に適用できるものであるため、不変式に基づく標準形の立場から、Markus の標準形を再吟味した。その結果、幾つかの計算の誤りに起因する分類の誤りを発見したので、その結果については言及したが³⁾⁴⁾、詳細な追試はどこにも公表していないので、ここに記録する次第である。なお、非結合的代数系とは、乗法に関して、必ずしも結合法則をみたす必要がないとする代数系であって、結合法則をみたしてはならない、という意味ではない。

1. Markus の標準形とその特徴

本節では Markus が標準形作成のために使用した手段, その特徴を論ずる。

1. 1 非結合的代数系

Markus が導入した非結合的代数系とは, 次のようなものである。基礎となる物理概念は,

$$\dot{x}^x = \sum_{\lambda, \mu=1}^n P_{\lambda\mu}^x x^\lambda x^\mu \quad (x=1, \dots, n) \quad (1)$$

なる同次微分方程式系であって, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, x^x は n 次元ベクトルの第 x 成分, $P_{\lambda\mu}^x$ は n^3 個の実数であって, $P_{\lambda\mu}^x = P_{\mu\lambda}^x$ であるとする。(1)で与えられる $P_{\lambda\mu}^x$ を用いて, 次のような代数系を導入する。すなわち, 基底を $e_\lambda (\lambda=1, \dots, n)$ とするとき, 乗法を

$$e_\lambda \cdot e_\mu = \sum_{\kappa=1}^n P_{\lambda\mu}^\kappa e_\kappa \quad (\lambda, \mu=1, \dots, n) \quad (2)$$

で与える。定義によって, $P_{\lambda\mu}^x = P_{\mu\lambda}^x$ であるから, この乗法は明らかに可換であるが, 結合法則は必ずしも満たさない。すなわち,

$$\begin{aligned} (e_\lambda \cdot e_\mu) \cdot e_\nu &= \left(\sum_{\kappa} P_{\lambda\mu}^\kappa e_\kappa \right) \cdot e_\nu = \sum_{\kappa} \sum_{\rho} P_{\lambda\mu}^\kappa P_{\kappa\nu}^\rho e_\rho, \\ e_\lambda \cdot (e_\mu \cdot e_\nu) &= e_\lambda \cdot \left(\sum_{\kappa} P_{\mu\nu}^\kappa e_\kappa \right) = \sum_{\kappa} \sum_{\rho} P_{\mu\nu}^\kappa P_{\lambda\kappa}^\rho e_\rho \end{aligned} \quad (3)$$

であり, 右辺が一般に異なることは明らかである。

さて, Markus がこの代数系を導入した理由は, 代数系に特有の不変概念を用いて代数系を分類し, その結果を用いて(1)の分類を行うためであった。そこで用いられた不変概念とは, べき零元数やべき等元の数等であった。以下に, Markus の導出した標準形を述べる。

定理 1. べき零元を含む実二次元可換代数系には, 次の 10 通りのタイプがある。

- 1) $e_1 \cdot e_1 = 0, \quad e_2 \cdot e_2 = 0, \quad e_1 \cdot e_2 = 0$
- 2) $e_1 \cdot e_1 = 0, \quad e_2 \cdot e_2 = 0, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2$
- 3) $e_1 \cdot e_1 = 0, \quad e_2 \cdot e_2 = 0, \quad e_1 \cdot e_2 = e_1 + e_2$
- 4) $e_1 \cdot e_1 = 0, \quad e_1 \cdot e_2 = 0, \quad e_2 \cdot e_2 = e_2$
- 5) $e_1 \cdot e_1 = 0, \quad e_1 \cdot e_2 = 0, \quad e_2 \cdot e_2 = e_1$
- 6) $e_1 \cdot e_1 = 0, \quad e_1 \cdot e_2 = e_1, \quad e_2 \cdot e_2 = k e_2, \quad (k \neq 0)$
- 7) $e_1 \cdot e_1 = 0, \quad e_1 \cdot e_2 = e_1, \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + 2 e_2$
- 8) $e_1 \cdot e_1 = 0, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2, \quad e_2 \cdot e_2 = e_1$
- 9) $e_1 \cdot e_1 = 0, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2, \quad e_2 \cdot e_2 = -e_1$
- 10) $e_1 \cdot e_1 = 0, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2, \quad e_2 \cdot e_2 = k e_1 + e_2 \quad (k \neq 0)$

ただし, 初めの三つは, べき零元から成る基底を有し, 他のタイプはただ一つのべき零元を有する。6)および10)については, パラメータ k の異なる値に対して, 異なる代数系が対応する。

定理 2. べき零元を含まず, かつ基底としてのべき等元を有する実二次元可換代数系は, 次のいずれか一つに同型である。

- 1) $e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_2 \cdot e_2 = e_2, \quad e_1 \cdot e_2 = 0$
- 2 a) $e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_2 \cdot e_2 = e_2, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2$
- 2 b) $e_1 \cdot e_1 = 2 e_1, \quad e_2 \cdot e_2 = e_2, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2$

$$2c) \quad e_1 \cdot e_1 = Ae_1, \quad e_2 \cdot e_2 = e_2, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2 \quad (0 < A < 1 \text{ 又は } A > 2)$$

$$3a) \quad e_1 \cdot e_1 = 2e_1, \quad e_2 \cdot e_2 = Be_2, \quad e_1 \cdot e_2 = e_1 + e_2 \quad (B \neq 0 \text{ かつ } B \neq 2)$$

$$3b) \quad e_1 \cdot e_1 = Ae_1, \quad e_2 \cdot e_2 = Be_2, \quad e_1 \cdot e_2 = e_1 + e_2$$

($A \neq 0, A \neq 2, B \neq 0, B \neq 2, AB \neq 4, A+B \neq AB$, かつ, $A < -1$ または $A > 2$ のときに,

$$\frac{2}{A-1} \leq B \leq \frac{A+2}{A}).$$

ただし, 異なるパラメータの値には, 異なる代数系が対応する。

定理 3. べき零元を含まず, かつべき等元がただ一つ含まれる実二次元可換代数系は, 次のいずれか一つに同型である。

$$1) \quad e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = 0, \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + Ge_2 \quad (0 \leq G < 2)$$

$$2) \quad e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = e_1 + e_2, \quad e_2 \cdot e_2 = fe_1 \quad (f < -1)$$

$$3a) \quad e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = \frac{1}{2}e_2, \quad e_1 \cdot e_2 = e_1$$

$$3b) \quad e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = de_2, \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + Ge_2 \quad (d \neq 0, G \geq 0, G^2 < 4(1-2d))$$

$$3c) \quad e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = \frac{1}{2}e_2, \quad e_2 \cdot e_2 = -e_1$$

$$3d) \quad e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = de_2, \quad e_2 \cdot e_2 = -e_1 + Ge_2$$

$$(d \neq 0, d \neq 1, G^2 \neq 4d^2, G^2 < 4(2d-1), G \geq 0)$$

$$4) \quad e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2, \quad e_2 \cdot e_2 = -e_1$$

ただし, 異なるパラメータの値には, 異なる代数系が対応する。

以上三つの定理で示された代数系を, それぞれ, 第 1 類, 第 2 類および第 3 類と呼ぶことにし, それぞれの特徴を次節で論ずることとする。

1. 2 Markus 標準形の特徴

Markus の方法の特徴は, 第一に, 対応する代数系にべき零元が存在するか否か, 存在しない場合は, べき等元がただ一つであるか否か, という基準を用いて大分類を行ったことにある。この代数系にべき零元が存在するという事は, もとの方程式系の平衡点が孤立していないこと, いいかえれば平衡線が存在することと同値である。また, べき等元が存在することは, もとの方程式系に直線解が存在することを意味する。以上の性質は, アフィン変換に対して不変であるから, 彼の大分類には明確な意味がある。第二の特徴は, 大分類の中の細分類については, 判別基準が明確でないことである。すなわち, 任意に与えられた $P_{\lambda, \mu}^*$ すなわち系に対して, それがこの細分類のいずれに属するかを判別するためには, 論文著者が行ったのと同じだけの計算の手間を必要とするのである。なぜなら, この細分類は, アフィン変換によって, 相互に同値となることがないようにパラメータ自由度を減らして行き, これ以上は減らせないというところで得られたものを標準形の細分類としたからである。第三の特徴は, パラメータに対する制約条件の複雑さである。パラメータ自由度を変更することはできないが, 制約条件はなるべく簡明であることが望ましいことは言うまでもない。しかるに, Markus の分類においては, パラメータの自由度が 2 であるものは, 第 2 類の (3b), 第 3 類の (3b) および (3d) であるが, これらのパラメータの制約条件, とくに第 2 類の (3b) などは, 複雑怪奇であると言える。

以上の特徴を要約すると, 任意に与えられた系, すなわち $P_{\lambda, \mu}^*$ に対して, 著者と同じ手間をかけて Markus の標準細分類のいずれかに到達するのであるが, もとの $P_{\lambda, \mu}^*$ がわずかばかり変動したときに, 前と同じ細分類に至るか全く別のものになるか, という判別のために, 前回の成果を使うことができず, 最初からやりなおさねばならぬこと, そして細分類の判別を行うには, パラ

メータの制約条件が複雑怪奇であるために、計算の手間が非常にかかるということになる。

2. 不変式分類法による Markus の方法の評価

本節では、第1節で述べた Markus の分類法を評価するために必要な範囲で、不変式分類法の要点を紹介し、Markus の標準形を解析する。はじめに、不変式分類法で必要とする不変式の定義、およびそれらを利用した分類法を述べ、次いで定められた不変式の値を、Markus の標準形の型毎に計算し、それらの符号の組み合わせによって、Markus の分類法の問題点を吟味することとする。

2.1 不変式分類法の概要

(1)式で与えられた同次二次微分方程式系の係数 $P_{\lambda\mu}^{\kappa}$ に対して、次の分解を行う。ただし、 $\delta_{\lambda}^{\kappa}$ は Kronecker のデルタであるとする。

$$p_{\lambda} = P_{\lambda 1}^1 + P_{\lambda 2}^2, \quad Q_{\lambda\mu}^{\kappa} = P_{\lambda\mu}^{\kappa} - \frac{1}{3}(\delta_{\lambda}^{\kappa} p_{\mu} + \delta_{\mu}^{\kappa} p_{\lambda}) \quad (\kappa, \lambda, \mu = 1, 2). \quad (2)$$

これを用いて、次のような不変式を導入する。ここに、 $\epsilon^{\kappa\lambda}$ および $\epsilon_{\kappa\lambda}$ は、それぞれ重み1および-1の単位2-ベクトルであって、成分は、 $e_{12} = -e_{21} = 1$, $e_{11} = e_{22} = e^{11} = e^{22} = 0$, $e^{12} = -e^{21} = -1$ である。また、簡単のために、Einstein 総和記法を用いることとする。

$$\left. \begin{aligned} h^{\kappa\lambda} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma} Q_{\mu\rho}^{\kappa} Q_{\nu\sigma}^{\lambda}, & J_{\kappa}^{\lambda\mu} &= 2Q_{\kappa\rho}^{\lambda} h^{\rho\mu}, \\ C_{\kappa\lambda} &= Q_{\kappa\lambda}^{\kappa} p_{\mu} + \frac{3}{2} \epsilon_{\kappa\mu} \epsilon_{\lambda\nu} h^{\mu\nu}, \\ D &= -2\epsilon_{\kappa\lambda} \epsilon_{\mu\nu} h^{\kappa\mu} h^{\lambda\nu}, & H &= h^{\kappa\lambda} p_{\kappa} p_{\lambda}, \\ F &= \epsilon^{\rho\lambda} \epsilon^{\sigma\mu} Q_{\rho\sigma}^{\nu} p_{\lambda} p_{\mu} p_{\nu}, & J &= \epsilon^{\kappa\lambda} J_{\kappa}^{\mu\nu} p_{\lambda} p_{\mu} p_{\nu}, \\ K_m &= F + 9(-2)^{m-3} H - 27(-8)^{m-3} D \quad (m=1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

以上のテンソルおよび不変式（添字のない英文字の式は重み2のスカラー不変式である）を用いて、次のようなタイプ分けを行う。詳細については、文献(2), (3)を参照されたい。ここではその結果のみを用いて、Markus の標準形の吟味を次節において行うこととする。

なお、非結合的代数系の不変量であるべき等元又はべき零元の数について言うならば、上記の不変式分類では、べき等元とべき零元を合せた数が、I ⊖型では3, I ⊕型では1, II型では2, III型では1, IV型では無数に存在することとなる。

2.2 不変式分類法による Markus の方法の評価

二つの分類法が与えられたとき、一方の方法における標準形は、他方の方法にとって一つの与えられた分類の対象物である。一方である型に属するものが、他方の方法ではどの型に属することになるか、という対応関係は、単純ではないにせよ、厳密に把握することが可能でなくてはならないし、実際、可能である。本節では、Markus が提示した標準形の各タイプ毎に、定められた不変式の符号をそれぞれ計算し、その符号の組合せを用いて不変式分類法における所属を定めることとする。

計算された不変式の値の表示方法としては、Markus の大分類毎に独立の表を作成することとし、表においては、縦の列の区別は Markus の小分類としての型を表し、横の行の区別は、必要な不変式を計算の手順に従って、上から順に記したものであるとする。計算は、前節(3)に従って行っている。

分類の最終段階で使用するのは、不変式の符号の組合せであるが、計算の途中においては、いくつかの不変式の値を用いて次の不変式の値を求めるという手続を行うのであるから、不変式の

表1 不変式分類法の判別式とその符号

不変式の符号		型名	不変式の符号		型名			
D < 0	K ₂ > 0		I ⊖ (1)型		[h ^{kA}] ≠ 0, H = 0	ρ > 0	II (2-1)型	
	K ₂ < 0	K ₃ > 0	I ⊖ (2)型	ρ < 0		II (2-2)型		
		K ₃ < 0	I ⊖ (3)型	ρ = 0		II (2-3)型		
	K ₂ = 0	K ₃ > 0	I ⊖ (4)型	D = 0	[h ^{kA}] = 0	[Q _{iμ} ⁱ] ≠ 0	F > 0	III (1)型
		K ₃ < 0	I ⊖ (5)型				F < 0	III (2)型
		K ₃ = 0	I ⊖ (6)型			F = 0	[ρ _i] ≠ 0	III (3)型
D > 0	K ₂ > 0	I ⊕ (1)型	[ρ _i] = 0		III (4)型			
	K ₂ < 0	I ⊕ (2)型	[Q _{iμ} ⁱ] = 0		[ρ _i] ≠ 0	IV (1)型		
	K ₂ = 0	I ⊕ (3)型			[ρ _i] = 0	IV (2)型		
D = 0	[h ^{kA}] ≠ 0, H ≠ 0	K ₂ > 0 K ₂ < 0 K ₂ = 0	II (1-1)型 II (1-2)型 II (1-3)型	ρ は、II 型標準形の C _{εA} の成分が、C ₁₁ = -2ρ + 3, C ₁₂ = C ₂₁ = C ₂₂ = 0 であることから、C ₁₁ の符号として定義する。				

値そのものが必要である。途中の計算が一個所でも間違っていれば、その誤りは先へ進むにつれて広がる性質があるので、ここでは、途中のすべての計算値を列挙することとする。

計算結果のチェック方法としては、個々の計算過程においては効果的なものはないが、最終結果のチェックは、次のような syzygy 関係によって可能である。syzygy の語源は定かではないが、歴史的にも古くから言われており、本分類法の不変式に対する syzygy は、

$$F^2D - 4H^3 - J^2 = 0$$

の形で表せる。以下に述べる Markus の標準形に対する不変式の値の計算結果は、この syzygy によるチェックを経たものである。

第1. 2節で述べた通り、Markus の分類法における第1類は、対応する非結合的代数系において、べき零元が存在する部分代数系に対応する。この、べき零元が存在することと同値な概念を不変式分類法の中でさがすならば、不変式 K₂ の符号が 0 であることとなる。実際、第1類を解析するために不変式の値を計算した第2表では、すべての K₂ がゼロとなっている。したがって、Markus の第1類の中には、「明らかにべき零元を持たないものが誤って混在している」ということはないことが確認される。

次に、第1類の10の細分類タイプに対して、不変式分類法に基づく不変式の符号を計算してみると、おおむね不変式 D の符号あるいは、[h^{kA}] の符号等の区別で分類したものと同一結果になっているので、結局は、「べき等元の数」を基準として分類しようとしたものであると考えられる。しかし、この基準で Markus の細分類タイプを吟味すると、次のような問題が存在することが分る。

まず、第2表のタイプ(6)において、対応する列の h^{kA} を見ると、h¹¹ が -(k-2)²、h¹² = h²² = 0 となっている。したがって、

k ≠ 2 であれば [h^{kA}] ≠ 0 (h^{kA} の成分の中には 0 でないものがある、の意)、

k = 2 であれば [h^{kA}] = 0 (h^{kA} のすべての成分が 0、の意)

となる。これは、第2表によって、k ≠ 2 ならば不変分類法の II(2)型であること、すなわち、べき等元の数 が 1 であるのに対し、k = 2 ならば不変式分類法の IV(1)型となり、したがって、べき等元は無数にあることとなる。すなわち、べき等元の数 が細分類にあたって重要なポイントであったにもかかわらず、Markus の結果においては、同一の細分類タイプの中でも、べき等元の数 が異な

表2 Markus標準形第1類の不変式の値

I	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
P_{11}^1										
P_{12}^1			1			1	1			
P_{22}^1					1		1	1	-1	k
P_{11}^2										
P_{12}^2		1	1					1	1	1
P_{22}^2				1		k	2			1
ρ_1		1	1					1	1	1
ρ_2			1	1		$k+1$	3			1
$3Q_{i1}^1$		-2	-2					-2	-2	-2
$3Q_{i2}^1$			2	-1		$2-k$				-1
$3Q_{22}^1$					3		3	3	-3	$3k$
$3Q_{i1}^2$										
$3Q_{i2}^2$		2	2					2	2	2
$3Q_{22}^2$			-2	1		$k-2$				1
$9h^{11}$			-4	-1		$-(k-2)^2$		-6	6	$-(6k+1)$
$18h^{12}$			-4							2
$9h^{22}$		-4	-4					-4	-4	-4
$27J_1^1$			8					24	-24	$24k+2$
$27J_1^2$			-16	2		$18(k-2)^3$				$18k+2$
$27J_2^1$		-16	-16					-16	-16	-16
$27J_2^2$			8							-4
$27D$			-16					-32	32	$-4(8k+1)$
$3H$			-4					-2	2	$-(2k+1)$
F			-4					1	-1	$k-1$
J										$-2k$
$\frac{64}{27}K_1$			-16							-4
$\frac{8}{27}K_2$										
$\frac{1}{27}K_3$								1	-1	k
$\frac{1}{27}K_4$			-4					-9	9	$-(9k+1)$
備考						$(k \neq 0)$				$(k \neq 0)$

(空欄は0を意味する)

るものがある，という結論に到る。

同じことが，第1類すなわち第2表のタイプ(10)についても言える。ここでは，各不変式の符号は，Markusが導入したパラメータ k の値をかえることによって，次のように変化する。

$k < -1/8$ ならば， $D > 0$ ，かつ $K_3 < 0$ ，したがって $I \oplus (2)$ 型で，べき等元はなし，

$k = -1/8$ ならば， $D = 0$ ， $[k^{\kappa}] \neq 0$ ， $H \neq 0$ ， $K_2 = 0$ ，よって $II(1-3)$ 型で，べき等元は1個，

$-1/8 < k < 0$ ならば， $D < 0$ ， $K_3 < 0$ ，したがって $I \ominus (5)$ 型で，べき等元は2個，

$0 < k$ ならば， $D < 0$ ， $K_3 > 0$ ，したがって $I \ominus (4)$ 型で，べき等元は2個。

Markusの条件によって， $k \neq 0$ とされているから，上の4通りですべての場合がつくされている。以上で，前述のタイプ(6)と同様に，タイプ(10)においても，べき等元の数が異なるものが同一

表3 Markus標準形第2類の不変式の値

II	(1)	(2a)	(2b)	(2c)	(3a)	(3b)
P_{11}^1	1	1	2	A	2	A
P_{12}^1					1	1
P_{22}^1						
P_{11}^2						
P_{12}^2		1	1	1	1	1
P_{22}^2	1	1	1	1	B	B
ρ_1	1	2	3	A+1	3	A+1
ρ_2	1	1	1	1	B+1	B+1
$3Q_{11}^1$	1	-1		A-2		A-2
$3Q_{12}^1$	-1	-1	-1	-1	2-B	2-B
$3Q_{22}^1$						
$3Q_{11}^2$						
$3Q_{12}^2$	-1	1		2-A		2-A
$3Q_{22}^2$	1	1	1	1	B-2	B-2
$9h^{11}$	-1	-1	-1	-1	$-(B-2)^2$	$-(B-2)^2$
$18h^{12}$	-1	1		2-A		$-(A-2)(B-2)$
$9h^{22}$	-1	-1		$-(A-2)^2$		$-(A-2)^2$
$27J_1^{11}$	-1	1		2-A		$-(A-2)(B-2)^2$
$27J_2^{11}$	2	2	2	2	$2(B-2)^3$	$2(B-2)^3$
$27J_1^{22}$	2	-2		$2(A-2)^3$		$2(A-2)^3$
$27J_2^{22}$	-1	-1		$-(A-2)^2$		$-(A-2)^2(B-2)$
27D	-1	-1		$-(A-2)^2$		$-(A-2)^2(B-2)^2$
3H	-1	-1	-3	$-A^2+A-1$	$-3(B-2)^2$	$-\frac{1}{3}(L^2+LM+M^2)$
F	2	2	9	$2A^2+A-1$	$9(B-2)(B+1)$	$(A+1)(B+1)(2AB-A-B-4)$
J			2	A^2-A	$2(B-2)^3$	$-(A-B)(AB-A-2)(AB-B-2)$
$\frac{64}{27}K_1$	3	3	16	$(A+2)(3A-2)$	$16(B^2-4)$	$(A+2)(B+2)(3AB-2A-2B-4)$
$\frac{8}{27}K_2$	1	1	4	A^2	$4B(B-2)$	$AB(AB-4)$
$\frac{1}{27}K_3$					$B-2$	$AB-A-B$
$\frac{1}{27}K_4$			1	$A-1$	$(B-2)(B-1)$	$(A-1)(B-1)(A+B-4)$
備考				$0 < A < 1$ $2 < A$	$B \neq 0$ $B \neq 2$	$A \neq 0, A \neq 2, B \neq 0, B \neq 2$ $AB \neq 4, A+B \neq AB,$ $A < -1$ または $A > 2$ のとき $\frac{2}{A-1} \leq B \leq \frac{A+2}{A}$

$$L=(A+1)(B-2), M=(A-2)(B+1)$$

(空欄は0を意味する)

のタイプとして分類されている、という問題があることが示される。

次に、第3表で解析した Markus の分類における第2類は、対応する代数系において、べき零元が存在せず、かつ、べき等元が2個以上ある場合であるが、この場合には次のような問題がある。第一に、細分類のタイプ(1)とタイプ(2a)は同一のものである。それは、不変式分類法にもとづいて計算したすべての不変式の符号が同一である、という事実にとどまらず、簡単な座標変換によって、タイプ(1)からタイプ(2a)へ移行させることができるのである。その座標変換とは、 $X=x, Y=x+y$ という簡単なものである。

第二に、この類では、べき等元の数に2個または3個であって、それ以外の場合はない。これを6通りに分ける話であるから、分類の基礎となる不変量は、べき等元の数とは別のものを導入しなくてはならない。また、この類でパラメータを二つ有するタイプは(3b)だけであり、したがって、この類のほとんどすべての方程式系はこのタイプに属することとなる。しかるに、このタイプ(3b)の中には、方程式系としてみた場合、「すべての解が、未来に対しても過去に対しても、有限の時間の範囲でしか存在しえない」ものも含む反面、そうでないものも含む。すなわち、タイプ(3b)とそれ以外のタイプを区別する不変量が定かでない反面、一つのタイプの中に物理的意味のはっきりした不変量を基準として、明確に異なるものが同居している、という問題のあることが指摘できる。

表4 Markus標準形第3類の不変式の値

III	(1)	(2)	(3a)	(3b)	(3c)	(3d)	(4)
P_{11}^1	1	1	1	1	1	1	1
P_{12}^1		1					
P_{22}^1	1	f	1	1	-1	-1	-1
P_{11}^2							
P_{12}^2		1	$\frac{1}{2}$	d	$\frac{1}{2}$	d	1
P_{22}^2	G			G		G	
ρ_1	1	2	$\frac{3}{2}$	$1+d$	$\frac{3}{2}$	$1+d$	2
ρ_2	G	1		G		G	
$3Q_{11}^1$	1	-1		$1-2d$		$1-2d$	-1
$3Q_{12}^1$	-G	2		-G		-G	
$3Q_{22}^1$	3	$3f$	3	3	-3	-3	-3
$3Q_{11}^2$							
$3Q_{12}^2$	-1	1		$2d-1$		$2d-1$	1
$3Q_{22}^2$	G	-2		G		G	
$9h^{11}$	$3-G^2$	$-(3f+4)$		$-G^2-3(2d-1)$		$-G^2+3(2d-1)$	3
$18h^{12}$	-G	-2		$(2d-1)G$		$(2d-1)G$	
$9h^{22}$	-1	-1		$-(2d-1)^2$		$-(2d-1)^2$	-1
$27J_1^{11}$	$6-G^2$	$2(3f+2)$		$(2d-1)[G^2+6(2d-1)]$		$(2d-1)[G^2-6(2d-1)]$	-6
$27J_2^{11}$	$2G^2-9G$	$-2(9f+8)$		$2G^3+9(2d-1)G$		$2G^3-9(2d-1)G$	
$27J_1^{22}$	2	-2		$-2(2d-1)^3$		$-2(2d-1)^3$	-2
$27J_2^{22}$	-G	2		$-(2d-1)^2G$		$-(2d-1)^2G$	
27D	$4-G^2$	$-4(f+1)$		$-(2d-1)^2[G^2+4(2d-1)]$		$-(2d-1)^2[G^2-4(2d-1)]$	4
3H	$1-G^2$	$-(4f+7)$		$-(d^2-d+1)G^2-(2d-1)(d+1)^2$		$-(d^2-d+1)G^2+(2d-1)(d+1)^2$	4
F	$2G^2+1$	$2(4f-5)$	$\frac{27}{8}$	$(d+1)[(d+1)^2-(d-2)G^2]$	$-\frac{27}{8}$	$-(d+1)[(d+1)^2+(d-2)G^2]$	-8
J	-G	$-2(4f+3)$		$-(d-1)G[dG^2+(2d-1)(d+1)^2]$		$-(d-1)G[dG^2-(2d-1)(d+1)^2]$	
$\frac{64}{27}K_1$	$3G^2+4$	$12(f-3)$	8	$(2d+1)[-(2d-3)G^2+4]$	-8	$-(2d+1)[(2d-3)G^2+4]$	-12
$\frac{8}{27}K_2$	G^2	$4f$	1	G^2+4d^2	-1	G^2-4d^2	-4
$\frac{8}{27}K_3$		-8	1	$8d(d-1)^2$	-1	$-8d(d-1)^2$	
$\frac{8}{27}K_4$	8		1	$-8(d-1)[dG^2+(3d-1)^2]$	-1	$-8(d-1)[dG^2-(3d-1)^2]$	
備考	$0 \leq G < 2$	$f < -1$		$d \neq 0, G \geq 0$ $G^2 < -4(2d-1)$		$d \neq 0, d \neq 1$ $G^2 \neq 4d, G \geq 0$ $G^2 < 4(2d-1)$	

(空欄は0を意味する)

表5 Markus標準形から不変式分類法への対応

	Markusの分類	不変式分類(第2段階)	
第1類	(1)	IV(2)	
	(2)	II(2-3)	
	(3)	I⊖(6)	
	(4)	II(2-2)のτ=0	
	(5)	III(4)	
	(6)	$\begin{cases} k=2 \\ k(k-2)>0 \\ k(k-2)<0 \end{cases}$	IV(1) II(2-1) II(2-2)のτ≠0
		(7)	III(3)
	(8)	I⊖(4)のK ₁ =0	
	(9)	I⊕(3)のK ₁ =0	
	(10)	$\begin{cases} k>0 \\ 0>k>-\frac{1}{8} \\ k=-\frac{1}{8} \\ k<-\frac{1}{8} \end{cases}$	I⊖(4)のK ₁ ≠0 I⊖(5) II(1-3) I⊕(3)のK ₁ ≠0
第2類	(1)	I⊖(1)のK ₃ =K ₄ =0	
	(2a)		
	(2b)	II(1-1)のK ₃ =0	
	(2c)	I⊖(1)のK ₃ =0, K ₄ ≠0	
	(3a)	II(1-1)のK ₃ ≠0 II(1-2)	
(3b)	$\begin{cases} B(B-2)>0 \\ B(B-2)<0 \end{cases}$	I⊖(1)のK ₃ ≠0	
	$\begin{cases} AB(AB-4)>0 \\ AB(AB-4)<0, AB-A-B>0 \\ AB(AB-4)<0, AB-A-B<0 \end{cases}$	I⊖(2) I⊖(3)	
第3類	(1)	I⊕(1)のK ₃ =0	
	(1)	I⊕(2)のK ₃ ≠0, K ₄ =0	
	(2)	III(1)	
	(3a)	I⊕(1)のK ₃ ≠0	
	(3b)	III(2)	
	(3c)	I⊕(2)のK ₃ ≠0, K ₄ ≠0	
	(3d)	I⊕(2)のK ₃ =0	
(4)			

第4表についてとくに問題はないが、注意すべき事として、同表の(1)に含まれるパラメータGの符号がゼロとなる場合が挙げられる。このとき、不変式K₂はゼロでありかつ、K₃もゼロである。K₂がゼロとなっても、系が平衡線を持たない唯一の例がここにある。すなわち、D>0, K₂=K₃=0であって、そのときに限り、K₂=0であってもお平衡点が孤立している。このことは、Markus分類法の第1類はすべてK₂=0であり、第2, 3類では、逆に、この場合を除き、すべてK₂≠0となっていることから分る。

次に、Markusの標準形と不変式分類法にもとづく標準形との間の対応を、第5表および第6表に掲げる。Markusの分類におけるパラメータに関する条件が複雑であるのに対して、不変式分類法のパラメータに関する条件が簡明であることが観察される。

結 言

不変式分類法は、任意に与えられたP_μに対して、数個の整有理不変式の符号を計算するだけ

表 6 不変式分類法からMarkus標準形への対応

不変式分類(第2段階)		Markusの分類
I ⊖ 型	(1) $\begin{cases} K_3=K_4=0 \\ K_3=0, K_4 \neq 0 \\ K_3 \neq 0 \end{cases}$	2-(1), (2-(2a)) 2-(2c) 2-(3b)の $AB(A-B-4) > 0$
	(2)	2-(3b)の $AB(A-B-4) < 0, AB-A-B > 0$
	(3)	2-(3b)の $AB(A-B-4) < 0, AB-A-B < 0$
	(4) $\begin{cases} K_1=0 \\ K_1 \neq 0 \end{cases}$	1-(8) 1-(10)の $k > 0$
	(5)	1-(10)の $0 > k > -\frac{1}{8}$
	(6)	1-(3)
I ⊕ 型	(1) $\begin{cases} K_3=0 \\ K_3 \neq 0 \end{cases}$	3-(1) 3-(3b)
	(2) $\begin{cases} K_3 \neq 0, K_4=0 \\ K_3 \neq 0, K_4 \neq 0 \end{cases}$	3-(2) 3-(3a)
	(3) $\begin{cases} K_3=0 \\ K_1 \neq 0 \\ K_1=0 \end{cases}$	3-(4) 1-(10)の $k < -\frac{1}{8}$ 1-(9)
II(1)型	(1-1) $\begin{cases} K_3=0 \\ K_3 \neq 0 \end{cases}$	2-(2b) 2-(3a)の $B(B-2) > 0$
	(1-2)	2-(3a)の $B(B-2) < 0$
	(1-3)	1-(10)の $k = -\frac{1}{8}$
II(2)型	(2-1)	1-(6)の $k(k-2) > 0$
	(2-2) $\begin{cases} \tau=0 \\ \tau \neq 0 \end{cases}$	1-(4) 1-(6)の $k(k-2) < 0$
	(2-3)	1-(2)
III 型	(1)	3-(3a)
	(2)	3-(3c)
	(3)	1-(7)
	(4)	1-(5)
IV 型	(1)	1-(6)の $k=2$
	(2)	1-(1)

で、標準形のどの型に属するかを判別する。一方、Markusの方法等¹⁾⁵⁾は、一度は標準形の型に変換しなければ、その判別ができない。この手続きには、3次方程式を解くという無理演算を包含することとなる。また、パラメータ空間に表示した、各細分類の境界の形状も、Markusの方法では複雑な曲線群になるが、不変式の方法では、規則的に配置された直線群となる。

本報告の結果は、第2表から第6表までの表に集約されている。表記が増大したわけは、個々の計算過程を記録にとどめるという意図によるものである。なお、北海道大学大学院阿久津淳氏から、一部の計算チェックに協力を得ている。

参 考 文 献

1. L. Markus: Annals of Math. Studies, No. 45, 185 (1960).
2. T. Date: J. Math. Analysis and Appl. 56, No. 3, 650 (1976).
3. T. Date: J. Diff. Eq. 32, No. 3, 311 (1979).
4. 伊達惇: 情報処理19, 507 (1978).
5. N. I. Vulpe and K. S. Sibirski: Differencial'nye Uravnenija, 5, 803 (1977).