



Title	任意に調節可能な座標線密度をもつ流れ場内格子点網の創成法
Author(s)	飯田, 誠一; Iida, Seiichi; 古川, 伸一郎 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 107, 33-44
Issue Date	1982-01-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41712
Type	departmental bulletin paper
File Information	107_33-44.pdf



任意に調節可能な座標線密度をもつ 流れ場内格子点網の創成法

飯 田 誠 一* 古 川 伸一郎*
(昭和 56 年 9 月 30 日受理)

Generation of Field Lattice Network Having Arbitrary Line Densities

Seiichi IIDA and Shinichiro FURUKAWA
(Received September 30, 1981)

Abstract

A method for numerical generation of a curvilinear coordinate system which has arbitrary line densities in the physical field is presented. No restrictions are placed on the shape of the boundaries. Numerical examples are given for rhomb as a polygon and for Kármán-Trefftz airfoil as a cusped body. In the latter case, especially, the resulting curvilinear coordinate lines are orthogonal.* Moreover, this method of lattice generation procedure can be readily applied to a wide variety of other problems.

1. 緒 言

物体周辺の流れあるいは一部に外部境界をもつ流れを数値的に解く場合、計算領域内にあらかじめ座標線群で作られる格子点網を設定し、その上で計算を実行するのが普通である。格子点密度は数値的な安定性の制約がなければ計算精度上許容される限界まで粗くとるのが望ましく、とくに非定常問題のように繰返し計算の多い場合に有効である。流れがポテンシャル流れで近似できる場合、境界の形状が急激に変化する部分を除いて、比較的粗い格子点間隔でも十分な精度が期待できるが、粘性の影響が無視できない境界層のはく離問題、あるいは衝撃波を含む圧縮性流れなどを扱おうとすれば、物体表面近傍あるいは衝撃波の付近など、流れ場内の特定の部分にとくに密に格子点を配置しなければ正しい結果が期待できなくなる。

従来このような格子点網はそれぞれの計算領域に応じてそのつど適当に定めたものを用いているが、近時任意形状の物体周辺の流れあるいは翼列のような多重結領域での流れにも使える格子点網の創成法が提案されており、非定常問題への適用例もいくつか見られる¹⁻⁵⁾。

このような格子点網を創成する問題はもともと流れ場の解析を補佐するためのものであるから、創成法自体に多くの計算時間を要したり、プログラムが長大化したのでは意味がなく、この点満足のいくものは少いようである。

本報告は、計算領域内の座標線密度を任意に制御でき、しかも物体形状の特異性によらず迅速

* 機械工学第二学科 流体工学第二講座

に格子点網の創成ができる方法の開発を目的としたものであり、さきに提案した方法⁹⁾に対して取扱いにより一般性をもたせるように改良してある。また等角写像との組合せによる直交座標線群の創成例も示してある。

2. 方法の説明

2.1 計算領域

物体周辺の流れあるいは一部に境界壁をもつような流れ場は、計算領域を適当に指定するとき、図1に示すような内側境界と外側境界および2つの切断線からなる閉曲線の内部で記述される。とくに物体の全周囲にわたる流れ場を問題にする場合には2つの切断線は流れ場の適当な位置に

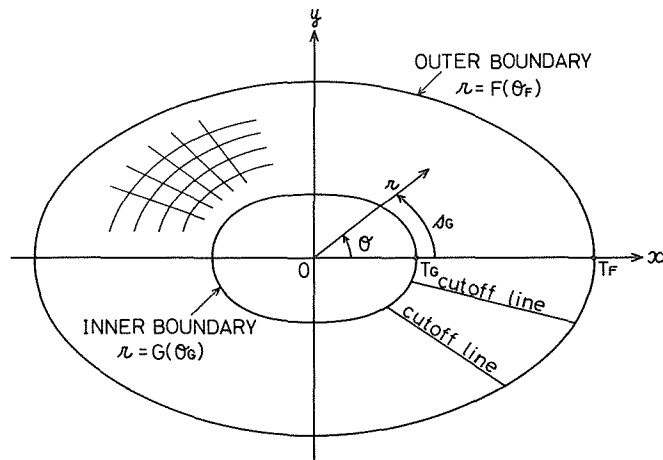


図1 物理面

一致させてとればよい。ここでは便宜的に物体周辺の流れ場として全周囲に計算領域を設定することにし、内側境界を物体表面（閉曲線）に選び、この内部に原点をもつ円柱極座標 (r, θ) で物理面を表す。

いま、内側境界を

$$r = G, \quad \theta = \theta_0$$

外側境界を

$$r = F, \quad \theta = \theta_F$$

で表すことにすれば、一般に θ_0 と θ_F は互いに独立であり、境界の形状に応じて

$$G = G(\theta_0), \quad F = F(\theta_F)$$

だけが指定されることになる。

次にこの物理面における計算領域を図2に示すような同心2重円の内部に写像する。座標線密度の指定はこの2重円の内部で行われる。

同心円の内・外半径は、物理面内の内・外境界線の輪郭の全長に等しい周囲をもつ円の半径で与える。たとえば内側境界については、物体表面に沿う微小長さを ds_0 として

$$a_0 = \frac{S_0}{2\pi}, \quad S_0 = \int_G ds_0 \quad (1)$$

である。このとき物理面の基準点（図1, T_G ）から物体表面に沿う距離 s_0 は写像面の円弧の長さ

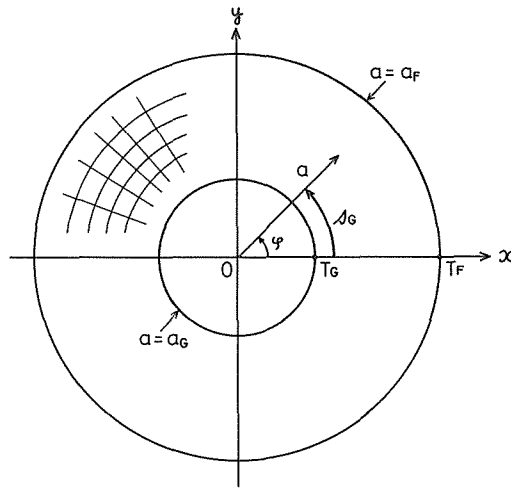


図 2 写 像 面

(図 2, s_G) に等しいから

$$s_G = a_G \varphi \quad (2)$$

これより、写像面における内側境界上の各点と物理面のそれとの対応は

$$\left. \begin{aligned} \theta_G &= \theta_G(s_G) = \theta_G(\varphi) \\ G &= G(s_G) = G(\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

として確定する。外側境界についても同様であり、 G を F にかえるだけでこれらの式はそのまま使える。

写像面 (a, φ) から物理面 (r, θ) への対応は簡単な関係式

$$\frac{r - G(\varphi)}{F(\varphi) - G(\varphi)} = \frac{\theta - \theta_G(\varphi)}{\theta_F(\varphi) - \theta_G(\varphi)} = \frac{a - a_G}{a_F - a_G} \quad (4)$$

で与えられるものとする。これより、写像面における同心円と放射線からなる座標線群の交点は物理面における格子点網を創りだすことになる。

したがって、任意に調節可能な格子点網は、まず図 2 の写像面に創成され、次に物理面に移される。

2. 2 変換関数

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{\tau_b}{2\pi} \varphi \quad (\tau_b \text{ は定数}) \\ \xi &= \frac{a - a_G}{a_F - a_G} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

とおくとき、同心 2 重円内の領域は図 3 に示す長方形領域 $[(\tau, \xi)$ 平面] に写像される。 τ と ξ の変域は

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq \tau \leq \tau_b \\ 0 &\leq \xi \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

であり、 τ と ξ はそれぞれ a および φ に比例するから、この領域に不等間隔格子点網が創られたとすれば、これはただちに図 2 を介して物理面上に還元される。

次に図 3 を図 4 に示す等間隔格子点網 $[(\sigma, \eta)$ 平面] に写像するため変換関数

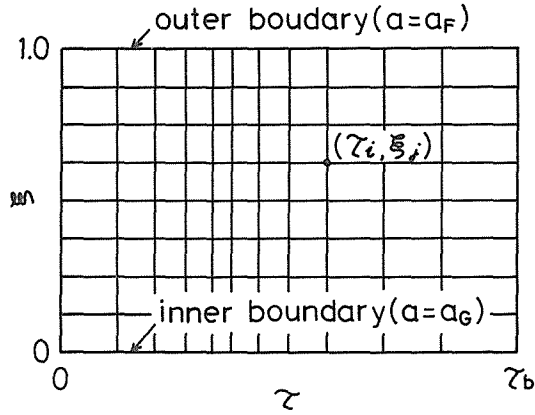


図 3 不等間隔格子点網

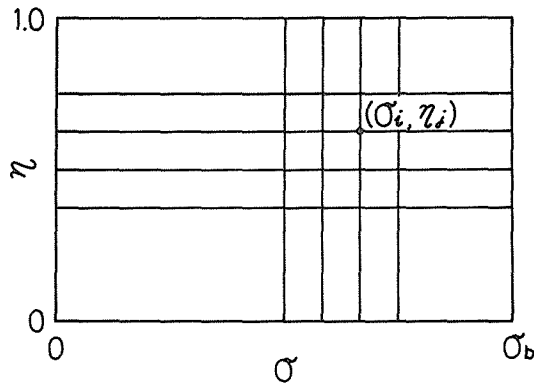


図 4 等間隔格子点網

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \sum_{m=1}^M A_m \sigma^m \\ \xi &= \sum_{n=1}^N B_n \eta^n \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

を導入する。ここに、 A_m 、 B_n は変換係数であり、次節で述べるように、座標線密度が指定されたとき自動的に決定される。 σ と η の変域は

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \sigma \leq \sigma_b \quad (= \tau_b) \\ 0 \leq \eta \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

であって、座標線の数を σ 、 η 方向にそれぞれ M 、 N 本とることにすればきざみ間隔は

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_b}{M-1}, \quad \Delta\eta = \frac{1}{N-1} \quad (9)$$

で与えられる。なお

$$\sigma_b (= \tau_b) = (M-1)/(N-1) \quad (10)$$

のようにすれば、図 4 の等間隔格子点網は正方形メッシュをもつ格子点網となり、流れを表す方程式を差分近似する場合に便利である。

2.3 変換係数を決定するための条件

等間隔格子点網 (σ, η) と不等間隔格子点網 (τ, ξ) との対応は式(7)で与えられるが、後者の格子点間隔は係数 A_m, B_n の選びかたによって様々に変化する。ここでは、任意の位置で任意の格子点間隔 (あるいは座標線密度) をもつような係数の決定法について、横軸の方向を例にとって説明する。

等間隔格子点網 (格子間隔 $\Delta\sigma$) の $\sigma = \sigma_i$ なる位置が不等間隔格子点網の $\tau = \tau_i$ に対応するものとすれば、この位置での格子間隔 $\Delta\tau_i$ は

$$\Delta\tau_i = -\frac{d\tau_i}{d\sigma} \Delta\sigma \quad (11)$$

となり、座標線密度 α_i は

$$\alpha_i = 1 / \left(\frac{d\tau_i}{d\sigma} \right) \quad (12)$$

と定義できる。したがって、問題は物理面の境界に比例する座標軸 τ の任意の複数位置 $\tau_i (i=1, 2, \dots)$ で座標線密度 α_i をもつように係数 A_m を決定する問題に帰結する。ただし α_i の指定された位置では、その付近で座標線密度が停留 (τ 方向に急な変化をしない) していることが望ましく、補助的な条件として

$$\frac{d^2\tau_i}{d\sigma^2} = 0 \quad (13)$$

を追加する。

なお、係数 A_m の決定に際しては τ および σ の上限を $\tau_b = \sigma_b = 1$ とおいて解析の簡単化をはかる^{注)}。さらに、境界条件設定の見通しを良くするため式(7)およびその導関数を列挙しておく。

$$\tau(\sigma) = A_1\sigma + A_2\sigma^2 + A_3\sigma^3 + A_4\sigma^4 + \dots + A_M\sigma^M, \quad (0 \leq \sigma \leq 1) \quad (14-a)$$

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \tau_\sigma(\sigma) = A_1 + 2A_2\sigma + 3A_3\sigma^2 + 4A_4\sigma^3 + \dots + MA_M\sigma^{M-1} \quad (14-b)$$

$$\frac{d^2\tau}{d\sigma^2} = \tau_{\sigma\sigma}(\sigma) = 2A_2 + 6A_3\sigma + 12A_4\sigma^2 + \dots + M(M-1)A_M\sigma^{M-2} \quad (14-c)$$

$$\frac{d^3\tau}{d\sigma^3} = \tau_{\sigma\sigma\sigma}(\sigma) = 6A_3 + 24A_4\sigma + 60A_5\sigma^2 + \dots + M(M-1)(M-2)A_M\sigma^{M-3} \quad (14-d)$$

2. 4 簡単な適用例

(a) 計算領域の両端で座標線密度を指定する場合

$\tau=0$ および $\tau=1$ で座標線密度 α_a および α_b を指定するときに必要とされる最小限の条件は次のようである。

$\tau=0$ における条件

$$\tau(0) = 0 \quad : \quad \text{式 (14-a) は自動的に満たされる}$$

$$\tau_\sigma(0) = \frac{1}{\alpha_a} \quad : \quad \text{式 (14-b) から } \frac{1}{\alpha_a} = A_1 \quad (15)$$

$$\tau_{\sigma\sigma}(0) = 0 \quad : \quad \text{式 (14-c) から } 0 = 2A_2 \quad (16)$$

$\tau=1$ における条件

注) この簡単化は、式(7)の τ と σ をそれぞれ $\bar{\tau} = \tau/\tau_b$ および $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_b$ で書きかえるとき

$$\bar{\tau} = \sum \bar{A}_m \bar{\sigma}^m \quad \text{ただし} \quad \bar{A}_m = \frac{A_m}{\tau_b} \sigma_b^m$$

のように、式(7)と同形の定数係数をもつ級数となるので何ら一般性を損うことはない。

$$\tau(1) = 1 \quad : \text{式(14-a)から } 1 = A_1 + A_2 + \dots + A_M \quad (17)$$

$$\tau_\sigma(1) = \frac{1}{\alpha_b} \quad : \text{式(14-b)から } \frac{1}{\alpha_b} = A_1 + 2A_2 + \dots + MA_M \quad (18)$$

$$\tau_{\sigma\sigma}(1) = 0 \quad : \text{式(14-c)から } 0 = 2A_2 + 6A_3 + \dots + M(M-1)A_M \quad (19)$$

この場合式(15)~(19)まで5本の条件式が成立するので、係数も5個 ($M=5$)まで決定でき次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\alpha_a} \\ A_2 &= 0 \\ A_3 &= 10 - \frac{6}{\alpha_a} - \frac{4}{\alpha_b} \\ A_4 &= -15 + \frac{8}{\alpha_a} + \frac{7}{\alpha_b} \\ A_5 &= 6 - \frac{3}{\alpha_a} - \frac{3}{\alpha_b} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

一例として、 $\alpha_a=5, \alpha_b=2$ とした場合の等間隔座標線位置 σ に対する不等間隔座標線位置 τ と座標線密度 $\alpha (=1/\tau_\sigma)$ を図5に示す。

(b) 計算領域の一端で座標線密度を指定する場合

いま一端 ($\tau=0$) で座標線密度 α_a が指定されるものとすれば、必ず満たさなければならない条件式は、前例のうち式(15), (16), (17)および(19)であり、必要に応じて他端におけるより高次の微係数

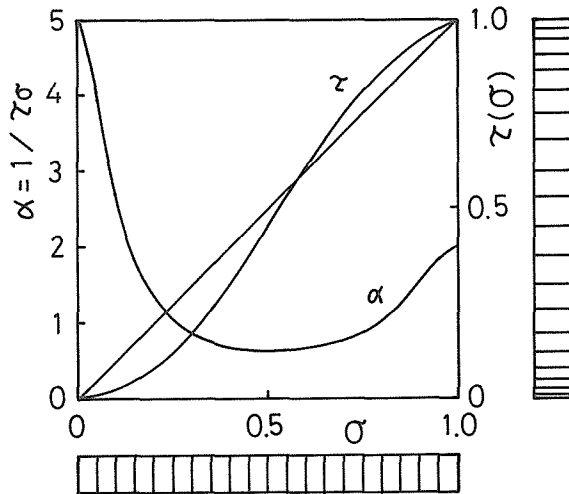


図5 両端で座標線密度を指定した場合の例 ($\alpha_a=5, \alpha_b=2$)

$d^n \tau / d\sigma^n$ (これを $\tau_{(n)\sigma}$ と書くことにする) を0とおく条件

$$\tau_{(n)\sigma} |_{\sigma=1} = 0 \quad (21)$$

を追加する。

したがって、変換係数 A_m ($m=1 \sim M$) を定める方程式の数 M は $n=2, 3, \dots$ に対応して、それぞれ $M=4, 5, \dots$ となるので、 A_m はこれら $M (=n+2)$ 元の連立方程式を解くことによつて決定される。表1に $M=4 \sim 7$ としたときの A_m を定める係数行列の要素と右辺の値を示す。た

表1 A_m を定める係数行列

$M=4$		5	6	7	右 辺
A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
1	1	1	1	1	$1 - \frac{1}{\alpha_a}$
6	12	20	30	42	0
6	24	60	120	210	0
0	24	120	360	840	0
0	0	120	720	2520	0

だし A_1 と A_2 については式(15), (16)から自明なので省略した。表2はこれら表1で与えられた連立方程式の解である。一例として $\alpha_a=5$ としたときの座標線密度 α と σ の関係を $M=4\sim 7$ について図6に示す。

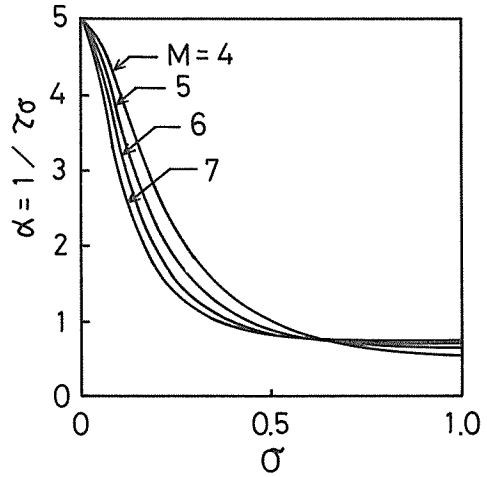


図6 一端で座標線密度を指定した場合の例 ($\alpha_a=5$)

表2 変換係数 $A_m (m=1\sim M)$ ただし, $K = \left(1 - \frac{1}{\alpha_a}\right)$

M	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
4	$\frac{1}{\alpha_a}$	0	2K	-K	—	—	—
5	$\frac{1}{\alpha_a}$	0	$\frac{10}{3}K$	$-\frac{10}{3}K$	K	—	—
6	$\frac{1}{\alpha_a}$	0	5K	$-\frac{5}{2}K$	$\frac{9}{2}K$	-K	—
7	$\frac{1}{\alpha_a}$	0	7K	-14K	$\frac{63}{5}K$	$-\frac{28}{5}K$	K

2.5 任意の離散位置で座標線密度を指定する問題

区間 $0 \leq \tau \leq 1$ の N 箇所の離散位置 $\tau = \tau_n (n=1\sim N)$ で座標線密度 $\alpha_n [=1/(\tau_n)_n]$ を指定することにし, 条件がすべて満たされた場合に τ_n に対応する σ の位置を σ_n とおく (σ_n はあとで決定される)。このとき, 2.3節で述べた条件は, まず各離散位置について

$$\tau_n = \sum_{m=1}^M A_m \sigma_n^m \quad (22)$$

$$\frac{1}{\alpha_n} = \sum_{m=1}^M m A_m \sigma_n^{m-1} \quad (23)$$

$$0 = \sum_{m=2}^M m(m-1) A_m \sigma_n^{m-2} \quad (24)$$

と書くことができ, さらに2.4節で例示した両端での条件の一部ないしすべてが加味される(少なくとも式(17)は加えられなければならない)。

いま, 式(22)~(24)および式(15)~(19)で与えた両端の条件のすべてを考慮した場合を例にとれば, 方程式の数は $(3N+5)$ 本, 未知数は $A_m (m=1\sim M)$ および $\sigma_n (n=1\sim N)$ の $(M+N)$ 個である。したがって, 変換係数は

$$M = 2N + 5 \quad (26)$$

個だけ指定できることになる。これら $(3N + 5)$ 本の方程式は、式(22)~(24)に見られるように未知量 σ_n のべき級数を含んで直接解くことは困難であり、次に述べるように *Newton* 法を利用して逐次的に解く。

解法

- (1) α_a, α_b ならびに N 組の (τ_n, α_n) が与えられているとして σ_n の近似値を適当に仮定する(たとえば $\sigma_n = \tau_n$ とおく)。
- (2) 式(22)を除いた $(2N + 5)$ 本の方程式 [(15)~(19), (23)および(24)] は A_m ($m = 1 \sim 2N + 5$) に関する多元1次連立方程式を構成するので、これを解いて変換係数の近似値とする。
- (3) このとき式(22)の右辺 $\sum A_m \sigma_n^m$ は τ_n の近似値を与えるので、この場合の誤差ならびに *RMS* 値を次式によって求める。

$$E_n = \sum_{m=1}^M A_m \sigma_n^m - \tau_n \quad (n = 1 \sim N) \quad (27)$$

$$R_{MS} = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N E_n^2 \right\}^{1/2} \quad (28)$$

- (4) この *RMS* 値が十分小さければ逐次計算を打切る。もし *RMS* 値が許容値をこえる場合には、以下に述べる *Newton* 法によって σ_n の修正を行う。
- (5) N 個の近似 σ_n に摂動 $\delta\sigma_n$ を与えて(最初は適当に仮定する)誤差におよぼす $\delta\sigma_n$ 個々の影響を算定する。その結果

$$F_n = 2 \sum_{j=1}^N E_j \frac{\partial E_j}{\partial \sigma_n} \quad (29)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial \sigma_j} = 2 \sum_{n=1}^N \frac{\partial E_n}{\partial \sigma_i} \frac{\partial E_n}{\partial \sigma_j} \quad (30)$$

が求まるので、連立方程式(実際には偏微分項を差分化して扱う)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_2} & \cdots \\ \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial F_N}{\partial \sigma_2} & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta\sigma_1 \\ \delta\sigma_2 \\ \vdots \\ \delta\sigma_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix} = 0 \quad (31)$$

を解いて解の摂動値 $\delta\sigma_n$ を予測する。*Newton* 法では $\partial^2 E_n / \partial \sigma_i \partial \sigma_j$ なる2階の導関数を0とおいているため $|\delta\sigma_n|$ が不自然に大きな値をとるときには逆に精度の低下を招く。したがって式(30)の解に対して、あらかじめ近似の度合に見合った $|\delta\sigma_n|$ の許容限界を定めておき、一度に大幅な修正が行われないように配慮する必要がある。

- (6) この摂動量 $\delta\sigma_n$ を用いて、解を

$$\sigma_n + \delta\sigma_n \longrightarrow \sigma_n \quad (n = 1 \sim N)$$

のように修正し(2)へ戻す。

計算例

表3に区間内の2点 ($N = 2$) および両端で座標線密度を指定した場合の例を示す。このとき式

(28)で定義した誤差の RMS 値は逐次近似の繰り返し回数 N_{TRY} とともに図7のように対数目盛線図上で鋸刃状に減少し, $N_{TRY}=25$ で $RMS=0.151 \times 10^{-5}$ に達した。計算結果から逆算した指定位置の精度は $\tau=0.4$ および 0.6 に対してそれぞれ 0.9×10^{-6} および 0.19×10^{-5} であった。

3. 菱形周辺の格子点網

内側境界の形状が平滑で円に近ければ通常の方法でも格子点網の創成は容易である。ここでは

表3 区間内の2点 ($\tau=0.4, 0.6$) および両端で座標線密度を指定したときの計算例

座標線密度 指定位置	τ			
	0.0	0.4	0.6	1.0
座標線密度	α			
	5.0	4.0	3.0	5.0
RMS 収束判定条件	0.5×10^{-5}			
収束状況	$N_{TRY}=25$ $RMS=0.151 \times 10^{-5}$			
変換係数 ($N=2, M=9$)				
$A_1=0.2$				
$A_2=0.0$				
$A_3=0.1999611342 \times 10^3$				
$A_4=-0.1625646474 \times 10^4$				
$A_5=0.5643212539 \times 10^4$				
$A_6=-0.1044030823 \times 10^5$				
$A_7=0.1074749718 \times 10^5$				
$A_8=-0.5811254259 \times 10^4$				
$A_9=0.1287338112 \times 10^4$				
解 $\sigma_n (n=1, 2)$				
$\sigma_1=0.33841127$				
$\sigma_2=0.66434324$				
式 (20) の右辺				
$\tau(\sigma_1)=0.4000009$				
$\tau(\sigma_2)=0.6000019$				

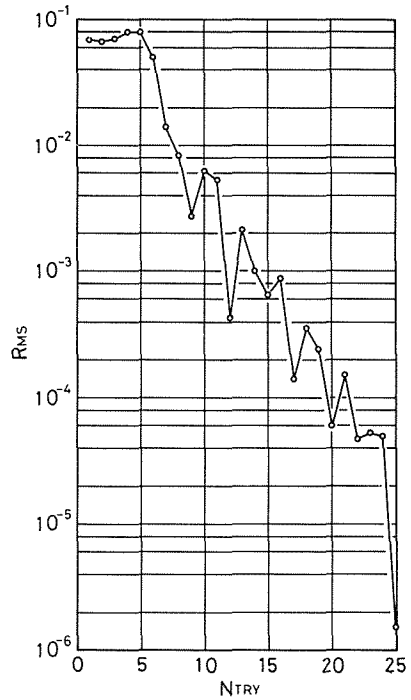


図7 収束状況

‘かど’の多い形状の例として菱形をとり上げる。

図8に示すように、計算領域の内側境界を長軸 $2A$ 、短軸 $2B$ の菱形とし、外側境界を半径 $r=F$ の円とする。このとき内側境界の周囲長は $S_0=4\sqrt{A^2+B^2}$ となるので、式(1)で定義した等価半径は $a_0=2\sqrt{A^2+B^2}/\pi$ である。これより計算領域は図2に示した同心2重円で囲まれた領域に移る。以下、具体例(最終

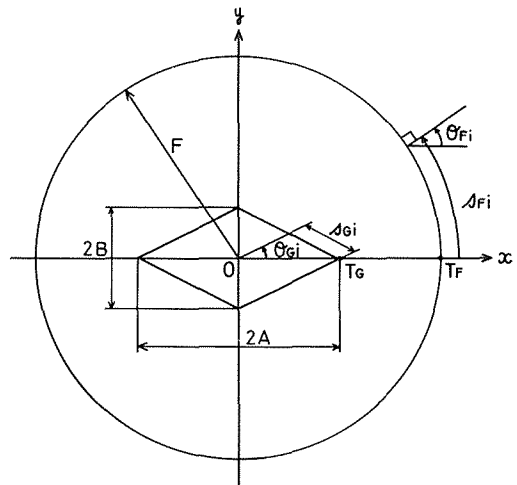


図8 菱形周辺の計算領域

結果は図9)をもって説明する。

設定条件

内側境界： 長軸 $2A=1$ アスペクト比 $2B/2A=1/2$

外側境界： 半径比 $a_F/a_G=12$

等間隔格子点網：

座標線の数 横方向 $M=91$ 本 縦方向 $N=46$ 本

格子間隔 (長方形メッシュ： $\sigma_b=1.0$ とする)

$$\Delta\sigma=1/90, \Delta\eta=1/45$$

不等間隔格子点網における座標線密度と変換係数：

2章に示した数値例をそのまま使用することにして次のようにおく。

横方向	位 置 (τ)	0.0	0.4	0.6	1.0	変換係数は表3の A_m ($m=1\sim 9$)
	座標線密度 (α)	5.0	4.0	3.0	5.0	

縦方向 内側境界での座標線密度だけを $\alpha_a=10$ と指定し変換係数を7個までとる。これを B_n ($n=1\sim 7$) と書くことにすれば、表2において $K=1-1/\alpha_a=0.9$ であるから

$$B_1=0.1, B_2=0, B_3=6.3, B_4=-12.6, B_5=11.34, B_6=-5.04, B_7=0.9$$

写像変換

等間隔格子点網の1節点を (σ_i, η_j) で表す。不等間隔格子点網での対応点 (τ_i, ξ_j) は、すでに求めた変換係数 A_m, B_n を用いて式(7)から

$$\tau_i = \sum_{m=1}^9 A_m \sigma_i^m, \quad \xi_j = \sum_{n=1}^7 B_n \eta_j^n \quad (32)$$

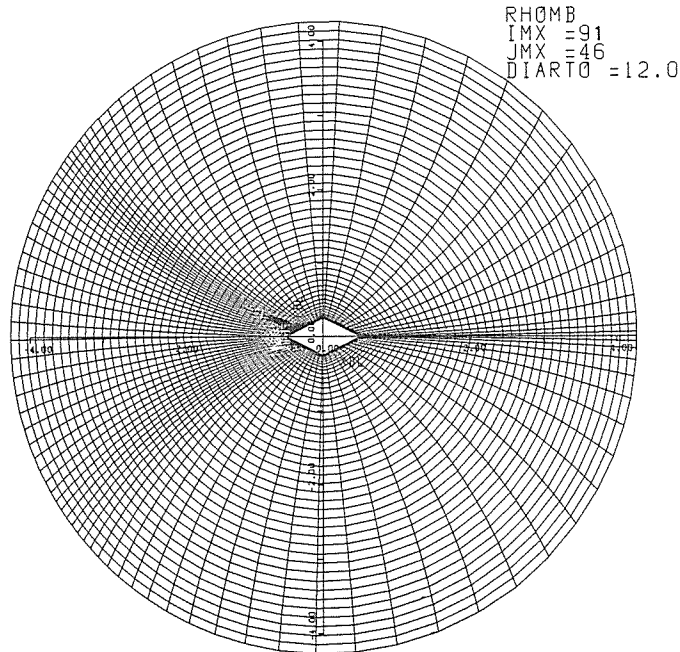


図9 菱形周辺の格子点網の例

同心2重円で囲まれた領域での偏角 φ_i および半径 a_j は式(5)から (ただし $\tau_b = \sigma_b = 1$)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i &= 2\pi\tau_i \\ a_j &= a_G + \xi_j (a_F - a_G) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

となる。 φ_i が与えられると内側および外側境界に添う距離がただちに求められ

$$s_{K_i} = a_K \varphi_i (K \rightarrow G, F) \quad (34)$$

そしてこれより内・外境界上の対応位置 (G_i, θ_{G_i}) , (F, θ_{F_i}) も決定される (図8参照)。

したがって、式(4)から

$$\left. \begin{aligned} r_{i,j} &= G_i + \xi_j (F - G_i) \\ \theta_{i,j} &= \theta_{G_i} + \xi_j (\theta_{F_i} - \theta_{G_i}) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

として物理面における格子点位置が求められる。

図9はこの場合の計算結果であって、周方向に3箇所： $\tau = 0.0$ (あるいは1.0), 0.4, 0.6, および半径方向に菱形近傍でとくに座標線密度が高くなっていることがわかる。

4. 翼型周辺の格子点網

ここでは鋭い‘かど’をもち、等角写像の行われやすい形状の例として翼型を取りあげる。

本論文の方法は、基本的には、第1段階として等間隔格子点網 (図4) を不等間隔格子点網 (図3) を介して同心2重円の内部に写像し、第2段階として物理面と同心2重円の対応を簡単な写像関数 [菱形の例では式(35)] で表わすものである。第1段階での座標線群 ($\sigma = const$, $\eta = const$) は互いに直交するが、第2段階 (物理面) では一般に直交性は失われる。流れ場を表す方程式を数値的に取扱う場合、座標線の直交性は結果の精度に存外関係し、著しい直交性の欠如は望ましいものではない。

いま、物理面での内部および外部境界が、何らかの方法によって同心円 (近似円であってもか

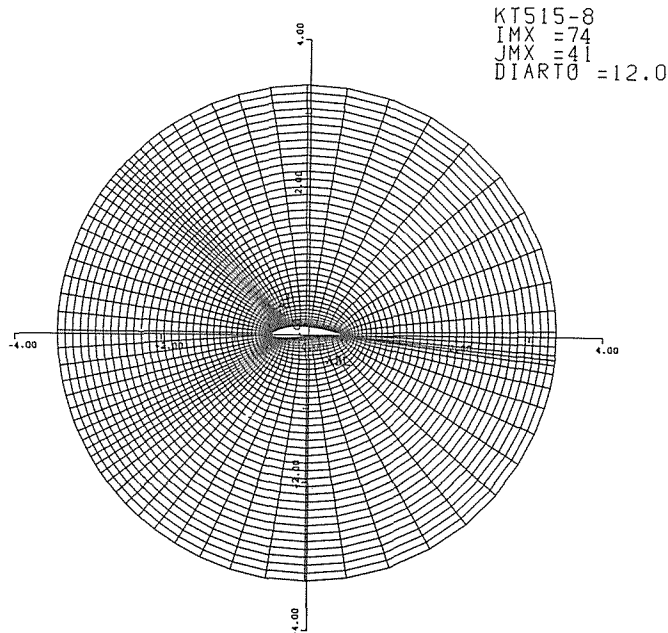


図10 Kármán-Trefftz 翼周辺の格子点網の例

まわらない)に写像できる場合には、第2段階でそのような写像関数を用いるのが有利である。

ここでは *Kármán-Trefftz* 翼まわりの格子点網について述べる。よく知られているように、同心円の平面 (a, φ) を複素平面 $\zeta = ae^{i\varphi}$ にとるとき、翼を表す平面 $Z = X + iY$ は

$$\frac{Z - nc}{Z + nc} = \left(\frac{\zeta + \zeta_0 - c}{\zeta + \zeta_0 + c} \right)^n$$

で与えられる。ただし ζ_0 , n , c は翼型の厚さ, 反り, 後縁角, 翼弦長を指定すれば決定される定数である。この場合 (a, φ) 平面の $a = a_0$ なる円の軌跡は翼の輪郭に対応し, $a = a_F$ なる円は $a_F \gg a_0$ のとき直径が翼弦長のおよそ (直径比/2) 倍の近似円になる。

図10は、厚さ15%, 反り5%, 後縁角 8° の翼に対し、前章の菱形で採用したのと同じ設定条件によって得た結果である。翼の近傍でも明らかに直交性の得られていることがわかる。

5. 結 言

計算領域内の座標線密度を任意に制御でき、しかも物体形状の特異性によらず迅速に格子点網の創成ができる一般的な方法を提案した。例として、1) 計算領域の両端で座標線密度を指定する場合、2) 計算領域の一端で座標線密度を指定する場合、3) 任意の離散位置で座標線密度を指定する場合を取り上げ、指定した座標線密度が隣接する格子点に及ぼす影響、および指定位置の精度について検討を加え満足できる結果を得た。またこの方法を実際問題に適用するために、‘かど’の多い形状の例として菱形を、鋭い‘かど’をもち等角写像の容易な形状の例として翼型 (この場合座標線群は直交する) を取り上げ、この方法の有用性を示した。今後この格子点網の創成法を境界層のはく離問題、あるいは衝撃波を含む圧縮性流れなどに適用する予定である。

なお、本研究の数値計算は北海道大学大型計算機センターの **HITAC M-200** によった。

参 考 文 献

- 1) Barfield, W. D.: *J. Comp. Phys.*, **5** (1970), p. 23~33
- 2) Thompson, J. F., Thames, F. C. and Mastin, C. W.: *J. Comp. Phys.*, **15** (1974), p. 299~319
- 3) Eiseman, P. R.: *J. Comp. Phys.*, **26** (1978), p. 307~338
- 4) 磯貝紘二: 日本航空宇宙学会誌, **29** (昭56), 324, p. 1~13
- 5) 磯貝紘二: 日本航空宇宙学会誌, **29** (昭56), 326, p. 119~128
- 6) 飯田誠一: 日本機械学会講演論文集, **14** (昭55), 800, p. 160~162