北海道大学工学部研究報告
第108号（昭和57年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 108 (1982)

セールス巡回路に関する二・三の事実（その2）

榊　原　勝　昭

（昭和56年12月26日受理）

A Few Geometrical Properties on the Traveling Salesman Problem

Katsuaki SAKAKIBARA

(Received December 26, 1981)

Abstract

In the traveling salesman problem, the use of the character of a convex polygon which includes all points in and on is found to be useful for searching for the shortest route. As an example, we consider the route for the capital cities in U.S.A., which are composed of 42 points. In this example, the number of the routes to be considered is 10^{49}, but if we use the character of the convex polygon it becomes 10^{42}. Moreover, dividing the points by groups according to the properties of the distribution, we can reduce the calculating operations from 10^{49} to 10^{3}.

1. はじめに

与えられた点分布を，凹みのない多角形の頂点として何層かに組分けして，各組内における点の相互関係及び最短回路に関するそれら各組が持っている意味等を，先の報告で定性的に述べた。今回は，セールス巡回路の問題が点分布に関する問題であるが故に必然的に有しているいくつかの幾何的な特徴を抽出し一般化すると共に，検査すべき全数との比較において定量化し，その事によって上記の特徴を，最短回路形式に向けて，情報化する試みをなした。

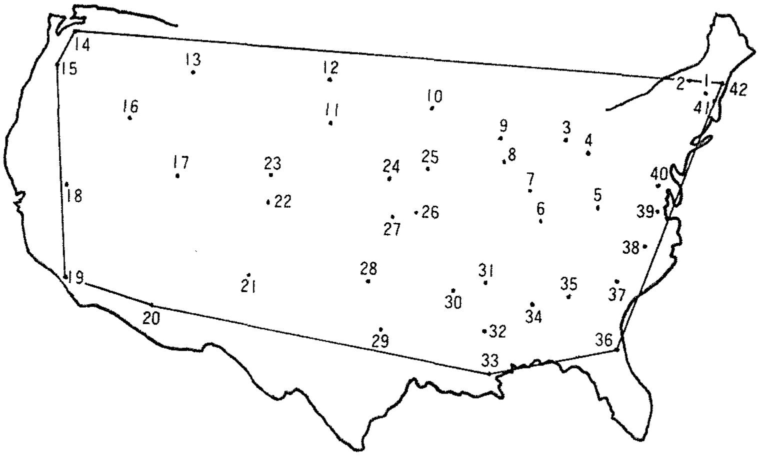
2. 検査範囲の大幅な削減法とその定量化

2.1 合衆国州都の例

この例題における42点を次の様に2分する。即ち，これらの点の中から，一つの凹みのない多角形の頂点をなす点のグループを選ぶ。この時，残余の点は全てその多角形の中に入いるものとするという条件をつけると，この多角形は一義的に定まる。そこで，この多角形の頂点をなしている点のグループと，この多角形の内部に残っている点のグループとに二分する。

前者の点のグループを，この多角形を一巡する時に出来る順序と結びつけて考えると，この例題における全42点を結んだ任意の周回路の交岐点についていえる事がある。即ち，任意の周回路を一巡する時，このグループに属する点が上記の順序と一致して周回路上に現われない場合に

電子工学科　電波応用工学講座



第 1 図

は，この周回路は交岐点を有する必然性を持つという事である。この事は，前の報告で指摘した通りである。従って，この様な周回路は，最短回路発見のための全数検査の対象からはずしてしまってかまわない事になる。

この例題の場合，第1図から分る通り，多角形に属する点は9ヶであり，他のグループは33ヶの点を持っている事になる。この9ヶの点が，この多角形による順序で現われる周回路の総数は次の様にして求められる。即ち，この多角形（9辺形）そのものを基本回路と見做し，残りの33点を9ヶの辺に添加する仕方を数えればよい。それには，9ヶの辺を入れ物と考え，且つ又，33点を各々異なる“入れられ物”として扱う事により，

$$ {}_{9}H_{33}\times 33\,! = {}_{41}C_{33}\times 33\,! = (42-1)\,!/(9-1)\,! \fallingdotseq 8.3\times 10^{44} \qquad (1) $$

と求められる。

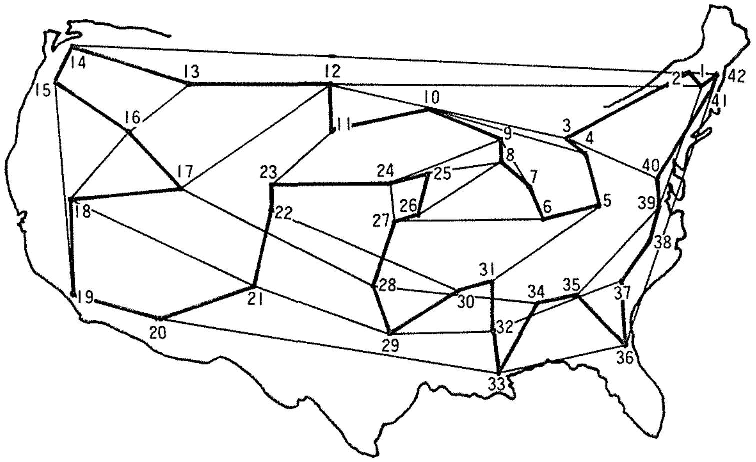
一方，42点による異なる周回路の総数は$(42-1)!/2 \fallingdotseq 1.7\times 10^{49}$であり，これと較べると(1)式の値は$4.9\times 10^{-5}$となる。この事は，42点のうちの9点が最短回路でなしているはずの順序が判かっただけで，全数検査の対象から99.995％の部分が除かれた事を意味している。

更に又，この例題においては第2図の如く，凹みのない多角形を外側から順に形成する点のグループは，それぞれ，9ヶ，10ヶ，7ヶ，8ヶ，5ヶ及び3ヶの点を含んでいる(第2図参照)。そして，外側から数えて第四番目の多角形の㉒一㉓の辺と④一⑤の辺をなす点は，合わせて“点”と見做してしまう事により，各グループの点は各々の多角形を同じ向きに一巡する時に定められる各々の順序で最短回路に現われてくるという規則性を得るが，これも前の報告で指摘した。

さてそこで今度は，その周回路の中にこの規則性を持っている周回路の総数を数えて見る。それには(1)式を求めた時の手法を繰り返えせばよく，

$$ \begin{aligned} &{}_{9}H_{10}\times 10\times {}_{19}H_{7}\times 7\times {}_{26}H_{6}\times 6\times {}_{32}H_{5}\times 5\times {}_{37}H_{3}\times 3 \\ &= \frac{(40-1)\,!}{(9-1)\,!\,(10-1)\,!\,(7-1)\,!\,(6-1)\,!\,(5-1)\,!\,(3-1)\,!} \fallingdotseq 3.3\times 10^{29} \end{aligned} \qquad (2) $$

通りとなる。この式の一行目で例えば，10！ではなく10が乗じてあるのは，10ヶの点は(1)式の時の点の様に任意に並ぶ事は許されず，一つの定まった順序が許されるだけであり，それは周回路



第 2 図

においてどこを先頭とするかの10通りの任意性を持っているだけであるからである。(2)の数値を42点による異なる周回路の総数 1.7×10^{49} と較べれば 2.1×10^{-20} となっている事が判るが，この減少ぶりは驚嘆に値するものであろう。合衆国州都の例題を離れて，以上の事を一般化して置くと次の様になる。

2.2　方法の一般化と式

(i)　一直線上にない3点以上からなる任意の点分布が与えられた時，それらの点のいくつかを頂点の全てとし，残余の点を全てその内部に含む凹みのない多角形は一義的に作られる。

何故かといえば，平面は直線によって二分され，直線は2点によって規定される一方，残余の点をその内部にのみ含む凹みのない多角形は，残余の点が直線の一方の側にのみ存在する直線群によって形成されるが，こうした直線群を規定する各2点は，与えられた点分布自体によって定まるからである。

(ii)　一直線上にない3点以上からなる任意の点分布（以後，単に任意の点分布という）が与えられた時，その全点が，凹みのない単一の多角形の頂点をなす事が出来れば，この多角形は，この分布の最短回路に外ならない。

というのは，これ以外の結び方の周回路は，この多角形を一巡する時に出来る順序を保つ事が出来ず，その事に起因する交岐点が生じてしまうからである（前の報告参照）。即ち，この場合にはこの多角形が交岐点を持たない唯一の周回路なのである。

(iii)　z ケの点からなる任意の点分布において，その中の l ケの点を頂点とする凹みのない l 辺形が残余の点を全てその内部に置いているなら，この分布点を一巡する周回路のうち交岐点を持たない可能性のあるものは，周回路を一巡する時上記の l ケの点が，上記の l 辺形によって定められる順序で現われる周回路だけである。そしてこの様な周回路の数は

$$\frac{(z-1)!}{(l-1)!} \tag{3}$$

で与えられる。

分布点を一巡する任意の周回路において，上記の l ケの点が上記の順序を保っていない場合

は，その事に起因する交岐点が必ず生じるからであり，この式は(1)式と同様にして求められる。又，任意の分布において，この l 辺形は必ず描けるわけであるから，任意の分布に関する最短回路捜索の範囲は $(z-1)!/(l-1)!$ 通り以下に必ず絞れるはず。

ちなみに，

$l=z$ とすれば(3)式の値は1となるが，これは，与えられた z ケの点が全体で単一の凹みのない多角形を形成している場合に相当し，この場合は，この多角形が交岐点を持たない唯一の周回路であるから，最短回路捜索の範囲がこの一本に絞ぼられるのは当然である。

更に又，$l=z-1$ とすれば(3)式は $(z-1)!/(z-2)!=(z-1)$ となるが，これは，凹みのない $(z-1)$ 辺形の中に1点だけが取り残されている場合に相当する。そしてこの場合には，この一点を $(z-1)$ 辺形のいづれかの辺に吸収させて出来る周回路のみが交岐点を持たないのは明らかである。そして，$(z-1)$ 辺形のどの辺に吸収させるかが $(z-1)$ 通りあり，最短回路捜索範囲はこの $(z-1)$ 通りに絞ぼってよいというわけである。

(iv) z ケの点からなる任意の分布において，その中の l と，m ケ，……n ケの点が，最短周回路の中で，各グループ毎にある定まった順序を保つべき何らかの必然（例えば，それを乱すと交岐点が必ず生じるといった様な必然）を持っている場合には，最短回路捜索の対象回路は更に絞られ

$$\frac{(z-1)!}{(l-1)!\ (m-1)!\cdots\cdots(n-1)!} \tag{4}$$

通り以下になる。但し，$l+m+\cdots\cdots+n\leqq z$

式の導びき方は(2)式と同じである。

ちなみに，

$l=z-3$ の場合を考える。これは凹みのない l 辺形の中に3点が残されている場合に相当するが，正に“内部に残っているのが3点だけである”という事の故に，最短回路の中でこの3点が現われる順序は規制されてくる。即ち，この3点をA，B，Cと名づければ，l の順序に添ってA—B—C 回りになるか，C—B—A と逆回りになるかの二通りしかあり得ない事になる。(4)式はこの回り方が順逆どちらかに定まれば，

$$\frac{(z-1)!}{(l-1)!(m-1)!}=\frac{(z-1)!}{(z-4)!(3-1)!}=\frac{1}{2}(z-1)(z-2)(z-3) \tag{5}$$

通りの周回路の検査で最短回路を見い出し得る事を示しているが，これは次の手順を思い浮べれば当然の事である。即ち，$(z-3)=l$ 辺形の基本回路に1点を加える加え方は $(z-3)$ 通りあり，その結果出来る $(z-2)$ 辺形に一点を加える加え方は $(z-2)$ 通りであり，それに更に一点を加える加え方は $(z-1)$ 通りとなる。結局，$(z-3)$ 辺形に3点を加える加え方は $(z-3)\cdot(z-2)\cdot(z-1)$ 通りという事になるが，これらの周回路での3点の現われ方は先に示した順逆の二様しかなく，従って，その一方のみの現われ方をする周回路は(5)の如く，半分という事になるのである。

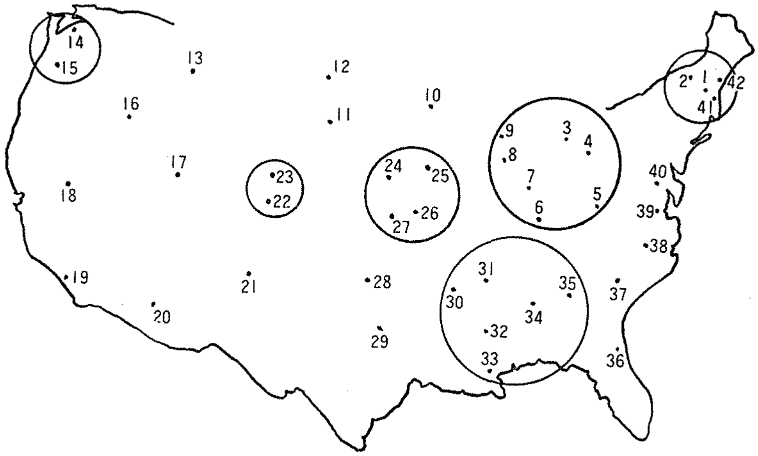
更に又，上の例で $z=10$，$l=7$ とすれば，有り得る全ての周回路の数は $(z-1)!/2=181,440$ 通りとなるが，(5)式の値は252通りとなる。これは極めて現実的な数まで捜索範囲が削減されたといえるのではないだろうか。しかもこれは，視察とか勘とかの生き物的行為を抜きにした機械的でぞんざいな方法で探す際の捜索範囲の最大限度を示しているのである。

3. 点分布の特徴の情報化への試み

基本的には全数検査を出発点として，最短回路発見のための捜索範囲をジリジリと狭め，それが一定の範囲に縮められた時点で一転して，今度はシラミ潰しに当たってしまうという上記の手法はローラー作戦とでも呼ぶべきものであろう。これに対して，点分布なるが故に有する断片的な特徴を基本回路に描き加える事によって，最短回路そのものを無理矢理描き出してしまおうとする以下の方法は，似顔のモンタージュ作りに似ているといえるかもしれない。強引とも思えるこの手法の中にも，点分布の単なる特徴を情報として最短回路発見の過程に組織立てて組み入れる事が出来る一般性が隠されているかもしれない。例題には合衆国州都の分布を使う。

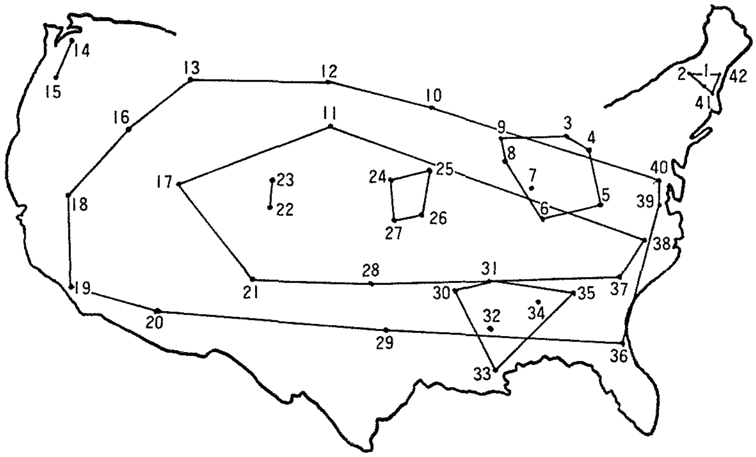
3.1

(i) 先ず全体的な分布の中で“孤立的な部分”と“特に密度の高い部分”をマークする。第3図において円で囲まれた部分がこれである。(14, 15)は孤立的な部分であり，(3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), (22, 23), (24, 25, 26, 27) 及び (30, 31, 32, 33, 34, 35)の4組は密度の高い部分である。又，(1, 2, 41, 42)は両方の特徴を持った部分である。

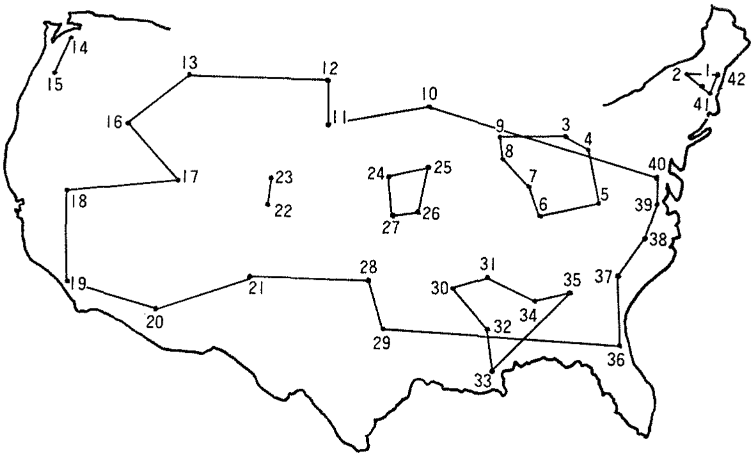


第 3 図

次に円で囲まれずに残っている点だけの分布に例の如く多角形の網をかぶせる。これが第4図であり，これから判る通り，第一（外側）と第二（内側）多角形だけの二層にしかならない。そこで外側の多角形の辺に，内側のそれの各点を視察により吸収させる。ここで吸収させるべき内側の点を多角形の頂点として結んである事は，この視察を大いに助ける。吸収させるべき辺の選択で迷うのは⑪を⑩—⑫に入れるか⑫—⑬に入れるかの一点だけである。この判定を幾何学的に行なう方法もあるが，それは次の報告に回し，今は合計5回の加算という簡単で一般性に勝る方法で決めてしまう。こうして作られたのが第5図に示してある大きな周回路であり，これが顔の輪廓とでもいうべき基本回路となる。この輪廓に，先に除いておいた目鼻立ちとでもいうべき断片を描き加えてモンタージュしてみようというのである。目鼻の方にも各々多角形の網をかぶせ，それぞれの最短回路を作っておく，これ位の小ささの点分布に関しては，この方法は極めて有効であり，迷うのは㉞を㉛—㉟に入れるか㉝—㉟に入れるかだけであり，これも今は5回の加算にまかせてしまう。第4，第5図参照。



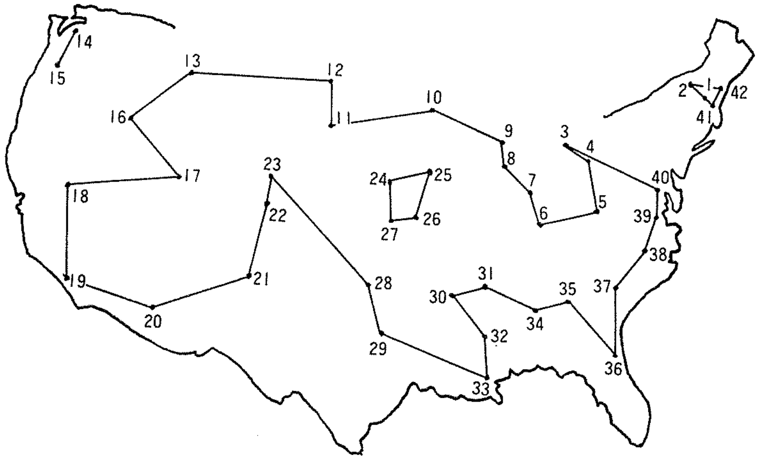
第 4 図



第 5 図

何故こうするかは次の理由による。例えば銀河系とアンドロメダ星雲双方の星を全て一巡する最短回路は恐らく，双方別々に作られた二つの最短回路を一対の往復路によって繋げられた回路の中にあるだろうという勘による。前の報告で㉒―㉓及び④―⑤を“点”として扱っている事もこの考えの流れのうちであろう。

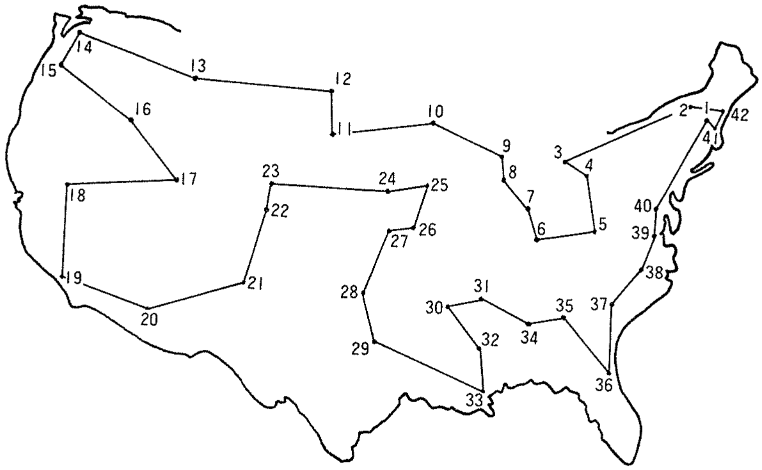
(ii) 次に，基本回路と交岐している孤立回路を，基本回路に組み入れる。その際，出来ている交岐点を解消し且つ叉，新たな交岐点を作らないように注意する。 すると (3，4，5，6，7，8，9) の組み入れ方には選択の余地はなくなる。(30，31，32，33，34，35) の方には，㉜―㉝を開いて㉙と㊱に繋げるか或いは，㉝―㉟を開いて㉙と㊱を繋げるかの二通りがある。視察により後者の方が短かめである事が判断出来る。こうして作られた結果が第6図の部分をなしている。



第　6　図

(iii)　次に内部に残っている部分を上記までに得た回路に加える事を考える。その順序は視察により，まぎれの少ない部分からつけ加えて行けばよい。そこで，㉒—㉓を⑪—⑫に加えるか，それとも㉑—㉒に加えるかという事になる。これは合計７回の加算で後者が有利である事が判る。ここまでの結果が第６図であり，更にこれに内部に残った孤立回路を加える手順を続ける。視察と９回の加算によって(24，25、26，27)は㉓—㉘の間に入れるべき事が判る。

(iv)　最后に外側に存在している孤立回路を加えて行く，これには全く迷う余地はなく，第７図に示した巡回路を得る事になる。



第　7　図

以上の過程で自明の通り，このモータージュ回路は，分布の特徴を利しての要領のよい作図と，それ故に容易となった視察と並びに合計17回の加算だけによって得られている。これを第２図に太線で示した“最短回路”と較べて見ると極似している事が判る。しかし残念ながら，一致ではなく，極似でしかない。そこで，一致させるにはどの程度の手間を掛ける必要があるのか概算しておく。

一致していない部分は，(41，42，1，2)と(30，31，32，33，34，35)を加える二ケ所であり，これらの加え方を実測（加算）によって最短のものを選ぶとする。すると㊵と③の間に(41，42，1．2)を入れる入れ方は4！通り，㉙と㊱の間に(30，31，32，33，34，35)を入れる入れ方は6！通りで全てであり，これらの1通り毎に前者は5回，後者は7回の加算を要し，その結果から最短のものを選ぶのに最大で(4！＋6！)回の加算が必要となる。この過程には交岐点を持つものも含まれるが，委細かまわず実測してしまう事にすれば，結局，最大でも5,904回の加算で足りる事になる。更に又，同段階の手順にある部分には，同じ操作を施すものとする（例えば，(41、42，1、2)を㊵一③に入れるのと同じ段階の(14，15)を⑬一⑯に入れる際も有り得る全てを実測する）と更に，45,368回の加算を要する。しかしこれらの加算は総計でも6×10^4よりは小さい。

一方，完全な全数検査では(42－1)！/2通りの各々に関して42回の加算を要し，その結果を較べるのに又，(42－1)！/2回の加算が必要となるわけであり，6×10^4をこの事情と比較すると，これは全数検査のうちの1.2×10^3通り相当の実測にしか当らない勘定になっている事が判る。即ち1.7×10^{49}通りの検査範囲が，1.2×10^3通りにまで削減された事に相当する。これ位の数字，従ってこれに見合った作業量であれば，生き物のペースでかれこれ間に合いそうに思える。

4．おわりに

多角形の網をかぶせるローラー作戦にしろ，孤立部分や稠密部分をマークしてのモンタージュ法にしろ，それらは共々，点分布なるが故に必然的にもっている属性や特徴を抽出して，最短回路像を浮び上がらせる情報として活用しており，接近の仕方としては本筋を行っているのではないかと思う。更に又，この報告でテーゼ化したり定量化した点分布に関するいくつかの属性及び最短回路発見に向けてのそれらの活用法等，なかなかに有効なものであると思われる。しかし，不幸な事に更に更に迫るべき余地が到る所に存在している事も自認しており，それらにはオイオイ迫まってみたいと思っています。最後に，文中“前の報告”とあるのは工学部研究報告第101号（昭和55年12月）にある“セールス巡回路の問題に関する二・三の事実”の事です。