



Title	ISMにおける合意形成支援法
Author(s)	栗原, 正仁; Kurihara, Masahito; 大内, 東 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 108, 21-32
Issue Date	1982-05-31
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41724">https://hdl.handle.net/2115/41724</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	108_21-32.pdf



## ISMにおける合意形成支援法

栗原正仁 大内 東 加地 郁夫

(昭和56年12月26日受理)

### Consensus Making Support Method in ISM

Masahito KURIHARA, Azuma OHUCHI and Ikuo KAJI

(Received December 26, 1981)

#### Abstract

A method is presented whereby two or more interpretive structural models may be compared, or combined, or both compared and combined to make a consensus.

A theory which specifies an implication relation on a disagreed element set is described. This theory is a generalization of the interconnection theory of Warfield.

It is demonstrated, using the theory, that consensus can be effectively accomplished with implication matrices and diagrams generated by the method.

#### 1. ま え が き

社会が高度に発達し多様化した現代では、システム工学の対象も大規模、複雑、多目的、かつあいまいなシステムへ広がってきた。このようなシステムを設計する際にまず重要なことは、開発に関係する部課間、会社間またメーカーとユーザーの間で十分な討論を行い、システムの構造を明らかにするとともに、関係者の十分なコンセンサスを得ることである。これを支援するシステム工学的的方法論に構造モデリングがあり、ISM (Interpretive Structural Modeling) はその代表的なものである。

ISM 過程を、目的木の生成を例にとり概観する。

大規模なシステムになると、普通、そのシステムの目的は上位レベルから下位レベルにわたり多数存在する。構造モデリングに当って、まず関係者間でブレーストローミングを行い、システム目的を網羅する。次に目的間の二項関係「目的  $i$  は目的  $j$  より上位にある」に着目する。コンピュータは次々と目的の二項対を表示してくるので、どちらが上位か（又は、どちらも上位ではないか）をグループで検討し入力していく。この間、二項関係の推移性（ $i$  が  $j$  より上位かつ  $j$  が  $k$  より上位ならば  $i$  は  $k$  より上位、 $i$  が  $j$  より上位でなく  $i$  が  $k$  より上位ならば  $k$  は  $j$  より上位でない等）から導き出される間接的情報はコンピュータが自動的に考慮する。こうして、目的間の厳密な二項関係を可到達行列の形で得る。

次にコンピュータは、グラフ理論に基づいて行列を解析し、多階層有向グラフ（目的木）をプロッタやグラフィックディスプレイに表示する。こうして、複数の目的間のトポロジー的な構造が明らかになる。モデル生成者はこの目的木を検討し、必要に応じてコンピュータとの対話により修正する。

このような一種の学習過程を繰り返すことにより、グループの合意を得た構造モデルが得られ

る。最後に、このモデルをもとに意味付けを行ない文書化する。この資料はシステムの全体像を客観的、概念的に述べたものであり、システム開発の手順・分担の決定等、その後のシステム設計の際の重要な資料とされる。

このように ISM は

- a) 複雑なシステムを構成している多数の要素の間に存在する何らかの二項関係をコンピュータとの対話によって明確化してゆく
- b) グループ意思決定の場合において当初統一した意見がない場合に ISM を介して徐々に合意を形成してゆき、グループの政策決定に役立てる

等の特徴を持っている。

さて、ISM においては、合意形成はコンピュータの質問の一つ一つに対する答を提出する際にグループ内で討論が行われることから得られるとしている。しかし、このような討論は次の 2 つの理由で幾分非生産的である。

第一に、モデル生成者はこれから開発しようとしているシステムに対しては大筋では同じイメージを抱いているはずであり、コンピュータが提出する質問の多くは討論するまでもなく答が決まるからである。このような質問に答えるためにシステム開発担当のリーダーが集まり、いちいち確認を取りながら答を入力するのはつまらないことである。

第二に、コンピュータの質問に対して意見が分れた場合、これに答えない限りは先へ進めないことである。しかもこの場合、まだシステムの全体像は未知の部分が多いので、普通はこの一つの質問にのみ固執してしまい、他のシステム要素との関連を考慮した大局的な見地に立てない場合が多い。このような質問に対しては答を保留して先へ進み、全員の意見が一致している部分のモデリングを済ませてしまい、システムに対する共通の認識を形成することが先決である。その後でゆっくり、意見の不一致をみた点を中心に総合的に討論を進めるのが生産的な討論といえる。

本論文では、上記の二点を解決する方法として次のような過程を考える。

まず最初のモデリング段階では、討論を行うことなしに各人が思うままにモデルを作成する。次に、このような複数のモデルをコンピュータが解析し、意見が異なっている点の相互関係を有向グラフとして表示する。このグラフにより、各人の主張の論理構造が明確になり、合意を形成するにはどの点を中心に議論すればよいかのかわかる。このようにして討論は生産的なものとなり、合意への素地が形成される。

本論文は上記過程を支援する理論的基礎として相互関連理論 (Interconnection theory) を一般化して推定行列 (Implication matrix) の生成および更新のアルゴリズムを示し、さらに推定図 (Implication diagram) という有効な情報提示法を提案するものである。

## 2. 推定行列の生成および更新

### 2.1 可到達行列モデル

システム要素の集合を  $J$  とし、 $J \times J$  の上での文脈的關係 (contextual relation) を  $R$  とする。いま、 $J$  と  $R$  が与えられたとき、二人の生成者により、 $R$  がそれぞれ  $J \times J$  上の二項関係  $R_1$ ,  $R_2$  として厳密に具体化されたとする。 $R_1$ ,  $R_2$  に対応する可到達行列モデル (添字集合は  $J$ ) をそれぞれ

$$M_1 = (m_{ij}^{(1)}), \quad M_2 = (m_{ij}^{(2)})$$

とする。ただし、 $d = 1, 2$  に対して

$$m_{ij}^{(d)} = \begin{cases} 1, & iR_d j \text{ のとき} \\ 0, & i\bar{R}_d j \text{ のとき} \end{cases} \quad (1)$$

である。本論文では、 $R_1 \cong R_2 (M_1 \cong M_2)$  のとき、両モデルの不一致点を中心に生成者が討論を行い、文脈的關係  $\mathbf{R}$  に対応する新たな数学的二項關係  $R$  及び可到達行列モデル  $M$  を形成する過程を扱う。その場合、各二項対  $(i, j) \in J \times J$  について

$$\begin{aligned} iR_1 j, iR_2 j \text{ ならば } iR j (m_{ij}^{(1)} = m_{ij}^{(2)} = 1 \text{ ならば } m_{ij} = 1) \\ i\bar{R}_1 j, i\bar{R}_2 j \text{ ならば } i\bar{R} i (m_{ij}^{(1)} = m_{ij}^{(2)} = 0 \text{ ならば } m_{ij} = 0) \end{aligned} \quad (2)$$

とし、 $i$  と  $j$  の関係は既知と考える。しかし、

$$iR_1 j, i\bar{R}_2 j \text{ 又は } i\bar{R}_1 j, iR_2 j (m_{ij}^{(1)} \neq m_{ij}^{(2)})$$

のときは、二人の生成者の意見は異なっており、 $i$  と  $j$  の関係は未知と考える。

既知二項対の集合、未知二項対の集合をそれぞれ  $K, U$  とする。

$$K = \{(i, j) \mid m_{ij}^{(1)} = m_{ij}^{(2)}\} \quad (3)$$

$$U = \{(i, j) \mid m_{ij}^{(1)} \neq m_{ij}^{(2)}\} = J \times J - K \quad (4)$$

また、 $(i, j) \in K$  のとき

$$m_{ij} = m_{ij}^{(1)} = m_{ij}^{(2)} \quad (5)$$

と定義する。

$K$  と  $U$  に着目して  $M_1$  と  $M_2$  を次のように変形する。

$$M_1 = A + B, \quad M_2 = A + C \quad (6)$$

ただし、

$$\begin{aligned} A = (A_{ij}), \quad B = (B_{ij}), \quad C = (C_{ij}) \\ A_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, & (i, j) \in K \\ 0, & (i, j) \in U \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

$$B_{ij} = \begin{cases} 0, & (i, j) \in K \\ m_{ij}^{(1)}, & (i, j) \in U \end{cases} \quad (8)$$

$$C_{ij} = \begin{cases} 0, & (i, j) \in K \\ m_{ij}^{(2)}, & (i, j) \in U \end{cases} \quad (9)$$

このとき、 $A$  は可到達行列となっていることを示す。

**定理 1** 可到達行列  $M_1, M_2$  を式(6)のように表したとき、 $A$  は可到達行列である。すなわち、次式が成り立つ。(I は単位行列、演算はブール演算である)

$$A + I = A, \quad A^2 = A$$

(証明)

$M_1, M_2$  は可到達行列であるから、

$$M_1 + I = M_1, \quad M_2 + I = M_2 \quad (10)$$

すなわち

$$A + B + I = A + B \quad (11)$$

$$A + C + I = A + C \quad (12)$$

が成り立つ。

いま,  $A+I \cong A$  と仮定する。この式は, ある  $i$  に対して  $A_{ii} = 0$  となっていることを意味する。このとき, 式(11)の  $(i, i)$  要素に着目して

$$B_{ii+1} = B_{ii}$$

すなわち,  $B_{ii} = 1$  を得る。従って, 式(8)と比較すれば,  $(i, i) \in U, m_{ii}^{(1)} = 1$  を得る。

一方, 上記の  $i$  に対して, 式(12)の  $(i, i)$  要素を書き下し, 式(9)と比較すれば同様に,  $(i, i) \in U, m_{ii}^{(2)} = 1$  を得る。

以上から,  $(i, i) \in U$  にもかかわらず  $m_{ii}^{(1)} = m_{ii}^{(2)}$  となり, 式(4)と矛盾する。従って,  $A+I = A$  が成り立つ。

$M_1, M_2$  が可到達行列であることから, また

$$M_1^2 = M_1, \quad M_2^2 = M_2 \quad (13)$$

すなわち

$$A^2 + AB + BA + B^2 = A + B \quad (14)$$

$$A^2 + AC + CA + C^2 = A + C \quad (15)$$

が成り立つ。

$A+I = A$  なので一般に  $A^2 \geq A$  が成り立っているが, ここで  $A^2 \cong A$  と仮定する。これは, ある  $(i, j)$  に対し

$$(A^2)_{ij} > A_{ij} \text{ すなわち } (A^2)_{ij} = 1, \quad A_{ij} = 0$$

であることを意味する。このとき, 式(14)の  $(i, j)$  要素に着目すると

$$1 = B_{ij}$$

同様に式(15)の  $(i, j)$  要素から

$$1 = C_{ij}$$

となる。これらと式(8), (9)を比較すれば  $(i, j) \in U, m_{ij}^{(1)} = m_{ij}^{(2)} = 1$  が得られる。これは, 式(4)に矛盾する。従って,  $A^2 = A$  が成り立つ。 (証明終)

次に後の議論の準備として  $A$  の性質をもう1つ示しておく。

**系1**  $(i, j) \in K, A_{ij} = 0$  であるとする。このとき,

$$[I] \quad A_{ik} = 1 \text{ ならば, } (k, j) \in K, \quad A_{kj} = 0$$

$$[II] \quad A_{kj} = 1 \text{ ならば, } (i, k) \in K, \quad A_{ik} = 0$$

(証明)

$(i, j) \in K$  のとき, 式(8), (9)より,  $B_{ij} = C_{ij} = 0$  である。また,  $A_{ij} = 0$  ならば定理1より,  $(A^2)_{ij} = 0$  である。従って, 式(14), (15)の  $(i, j)$  要素を書き下せば次式を得る。

$$\sum_l A_{il} B_{lj} + \sum_l B_{il} A_{lj} + \sum_l B_{il} B_{lj} = 0 \quad (16)$$

$$\sum_l A_{il} C_{lj} + \sum_l C_{il} A_{lj} + \sum_l C_{il} C_{lj} = 0 \quad (17)$$

従って,  $A_{ik} = 1$  ならば  $B_{kj} = C_{kj} = 0$  となる。ここで, もし  $(k, j) \in U$  と仮定すれば, 式(8), (9)より  $m_{kj}^{(1)} = m_{kj}^{(2)} = 0$  となり, 式(4)に矛盾する。よって,  $(k, j) \in K$  である。次に,  $A_{kj} = 1$  と仮定すると

$$(A^2)_{ij} = \sum_l A_{il} A_{lj} = A_{ik} A_{kj} + \sum_{l \neq k} A_{il} A_{lj} = 1$$

となり,  $(A^2)_{ij} = A_{ij} = 0$  の仮定に反する。ゆえに,  $A_{kj} = 0$  である。

同様に,  $A_{kj} = 1$  ならば,  $(i, k) \in K, A_{ik} = 0$  であることがいえる。 (証明終)

## 2.2 推移的具象化の過程

前節のように二つの可到達行列モデル  $M_1, M_2$  ( $M_1 \cong M_2$ ) が与えられたとき, 両者の意見が異

なる二項対について討論を繰り返す、最終的に合意モデル  $M$  をつくる 推移的具象化の過程を考える。行列  $M$  は次のように表される。

$$M = (M_{ij})$$

$$M_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, & (i, j) \in K \\ x_{ij}, & (i, j) \in U \end{cases} \quad (18)$$

ここで、 $m_{ij}$  は式 (5) で与えられる。 $x_{ij}$  は未知二項関係を表す論理変数である。

前節と同様に  $M$  は次のように表される。

$$M = A + X \quad (19)$$

$$A_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, & (i, j) \in K \\ 0, & (i, j) \in U \end{cases} \quad (20)$$

$$X_{ij} = \begin{cases} 0, & (i, j) \in K \\ x_{ij}, & (i, j) \in U \end{cases} \quad (21)$$

$A = (A_{ij})$  は式 (7) と同じ行列であり、 $X = (X_{ij})$  は式 (8), (9) の  $B, C$  に対応している。

このとき、 $M$  が可到達行列であるための必要十分条件を示す。

**定理 2**  $M$  が可到達行列であるための必要十分条件は、すべての  $(i, j) \in J \times J$  に対して以下が成り立つことである。

(i)  $(i, j) \in U$  ならば

$$x_{ij} + \sum_{p \in P_{ij}} x_{pj} + \sum_{q \in Q_{ij}} x_{iq} + \sum_{r \in R_{ij}} x_{ir} x_{rj} = x_{ij} \quad (22)$$

(ii)  $(i, j) \in K, A_{ij} = 0$  ならば

$$\sum_{r \in R_{ij}} x_{ir} x_{rj} = 0 \quad (23)$$

ただし、

$$P_{ij} = \{p \mid A_{ip} = 1, (p, j) \in U, p \neq i\}$$

$$Q_{ij} = \{q \mid (i, q) \in U, A_{qj} = 1, q \neq j\}$$

$$R_{ij} = \{r \mid (i, r) \in U, (r, j) \in U\}$$

(証明)

$A$  は可到達行列で  $A + I = A$  が成り立つ。従って、 $M = A + X$  に対しても  $M + I = M$  が成り立っているのは明らかである。よって、方程式  $M^2 = M$  についてだけ考えればよい。

方程式  $M^2 = M$  に  $M = A + X$  を代入し、 $A^2 = A$  に注意すると次式を得る。

$$A + AX + XA + X^2 = A + X \quad (24)$$

これを、 $(i, j)$  要素について書き下すと次のようになる。

$$A_{ij} + \sum_p A_{ip} X_{pj} + \sum_q X_{iq} A_{qj} + \sum_r X_{ir} X_{rj} = A_{ij} + X_{ij} \quad (25)$$

従って、 $M$  が可到達行列であるための必要十分条件は、すべての  $(i, j)$  に対して式 (25) が成立することである。いま、式 (25) を

$$(i) \quad (i, j) \in U$$

$$(ii) \quad (i, j) \in K, A_{ij} = 0$$

$$(iii) \quad (i, j) \in K, A_{ij} = 1$$

の 3 つの場合に分けて書き直してみる。

(i)  $(i, j) \in U$  の場合

式 (20), (21) に注意すると, まず

$$\sum_p A_{ip} X_{pj} + \sum_q X_{iq} A_{qj} + \sum_r X_{ir} X_{rj} = x_{ij}$$

が得られ, 左辺の非零の項だけ集めると

$$\sum_{\substack{A_{ip}=1 \\ (p, j) \in U}} x_{pj} + \sum_{\substack{(i, q) \in U \\ A_{qj}=1}} x_{iq} + \sum_{\substack{(i, r) \in U \\ (r, j) \in U}} x_{ir} x_{rj} = x_{ij}$$

となる。ここで,  $A_{ii}=A_{jj}=1$ ,  $(i, j) \in U$  であるから,  $p=i, q=j$  の場合にはそれぞれ  $x_{ij}$  の項が生ずる。 $x_{ij}+x_{ij}=x_{ij}$  に注意して書きかえると式 (22) を得る。

(ii)  $(i, j) \in K$ ,  $A_{ij} = 0$  の場合

式 (25) は次のようになる。

$$\sum_p A_{ip} X_{pj} + \sum_q X_{iq} A_{qj} + \sum_r X_{ir} X_{rj} = 0$$

系 1 によれば,  $A_{ip} = 1$  ならば  $(p, j) \in K$  すなわち  $X_{pj} = 0$  となる。従って, 上式の第 1 項の総和は 0 である。同様に第 2 項の総和も 0 である。

左辺の非零の項だけに着目すると結局, 式 (23) となる。

(iii)  $(i, j) \in K$ ,  $A_{ij} = 1$  の場合, 式 (25) は恒等式  $1=1$  となる。

(証明終)

未知変数の 1 つの値が定まれば, 定理 2 に示した方程式系から他の未知変数の幾つかの値も定まる可能性がある。その後, 方程式は更新される。この過程を簡単な例でみておき, 次節で与えるアルゴリズムの準備とする。

いま, 2 つのモデル

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{および} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

が与えられたとする。これらに対応する有向グラフを図 1 に示す。

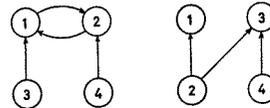


図 1 2 つの ISM モデル

この 2 つのモデルから, 合意モデルは

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x_{23} & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 1 & 0 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

と表される。 $M^2 = M$  を要素毎に書くと, 定理 2 で示したように次式が得られる。

$$x_{12} = x_{12} \quad (28-a)$$

$$x_{12} x_{23} = 0 \quad (28-b)$$

$$x_{23} = x_{23} \quad (28-c)$$

$$x_{31} + x_{32} = x_{31} \quad (28-d)$$

$$x_{32} + x_{31} x_{12} = x_{32} \quad (28-e)$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} x_{31} = x_{41} \quad (28-f)$$

$$x_{42} + x_{41} x_{12} + x_{43} x_{32} = x_{42} \quad (28-g)$$

$$x_{43} + x_{42} x_{23} = x_{43} \quad (28-h)$$

いま,  $x_{32} = 1$  と与えられたとする。このとき, 式(28-d)から  $x_{31} = 1$  がわかる。その結果(28-a)~(28-h)は次のように書きかえられる。

$$x_{12} = x_{12} \quad (29-a)$$

$$x_{12} x_{23} = 0 \quad (29-b)$$

$$x_{23} = x_{23} \quad (29-c)$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = x_{41} \quad (29-f)$$

$$x_{42} + x_{41} x_{12} + x_{43} = x_{42} \quad (29-g)$$

$$x_{43} + x_{12} x_{23} = x_{43} \quad (29-h)$$

式(28-d)及び(28-e)は共に恒等式  $1=1$  となる。

以上の過程をまとめると次のようになる。

1.  $M^2 = M$  から方程式を生成する。
2. 未知変数の値を1つ与える。
3. 与えられた情報と方程式から, 他の未知変数の値を推論する。
4. 方程式を更新し, ステップ2へ。

この過程を, 方程式ではなく推定行列(Implication matrix) $\Psi$ を用いて次のように対応させる。

1.  $M$  から  $\Psi$  を生成する。
2. 未知変数の値を1つ与える。
3. 与えられた情報と  $\Psi$  から, 他の未知変数の値を推論する。
4.  $\Psi$  を更新し, ステップ2へ。

ここで用いられる  $\Psi$  とは,  $\bar{V} + V$

$$V = \{x_{ij} \mid (i, j) \in U\}, \bar{V} = \{\bar{x}_{ij} \mid (i, j) \in U\} \quad (30)$$

を添字集合とする二値行列であり,  $\Psi(\alpha, \beta) = 1$  ( $\alpha, \beta \in \bar{V} + V$ ) ならば

$$\alpha \rightarrow \beta, \bar{\beta} \rightarrow \bar{\alpha}$$

が成立することを意味する。

上記の2つの過程を対比させれば,  $M^2 = M$  から得られる方程式と  $\Psi$  は等価にみえる。しかし, 後に明らかになるように実際はそうでない。方程式は一度生成すれば  $M$  を参照せずに更新できるが,  $\Psi$  は  $M$  を参照しながら更新される。

前述の例を用いて  $\Psi$  の生成・更新の流れを見てみる。まず,  $M$  から  $\Psi$  を生成すると, 図2(a)のようになる。図2では, 空白はエントリ0を表している。 $\Psi$  生成のアルゴリズムは後述する。

ここで前の例と同じく,  $x_{32} = 1$  が与えられたとする。このとき,  $\Psi(x_{32}, x_{31}) = 1$  から,  $x_{32} \rightarrow x_{31}$ , すなわち  $x_{31} = 1$  が得られる。

次に  $\Psi$  を更新すると図2(b)のようになる(アルゴリズムは後述)。新たなエントリ

$$x_{43} \rightarrow x_{41}, \quad x_{43} \rightarrow x_{42}$$

$$\bar{x}_{41} \rightarrow \bar{x}_{43}, \quad \bar{x}_{42} \rightarrow \bar{x}_{43}$$

が生じている。この理由を,  $x_{43} \rightarrow x_{41}$  について考えてみる。式(28-f)

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} x_{31} = x_{41}$$

からは,  $x_{43} \rightarrow x_{41}$  は得られないが, その後  $x_{31} = 1$  とわかり, 式(29-f)

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = x_{41}$$

となったため,  $x_{43} \rightarrow x_{41}$  が生ずるのである。

もし, 式(28-f)で  $x_{41} = 0$  が与えられたとすると,  $x_{42} = 0$  が推論され, 方程式は

$$x_{43} x_{31} = 0$$

と更新される。この場合は、新たなエントリー

$$x_{43} \rightarrow \bar{x}_{31} \quad x_{31} \rightarrow \bar{x}_{43}$$

を生ずることになる。

この例からわかるように、 $\Psi$  更新の原因は、 $(i, j) \in U$  に対応する方程式の左辺が線形でないことによる。Warfield の相互関連理論 (Interconnection theory) ではこれは線形であったため、 $\Psi$  に新たなエントリーを生じなかったのである。

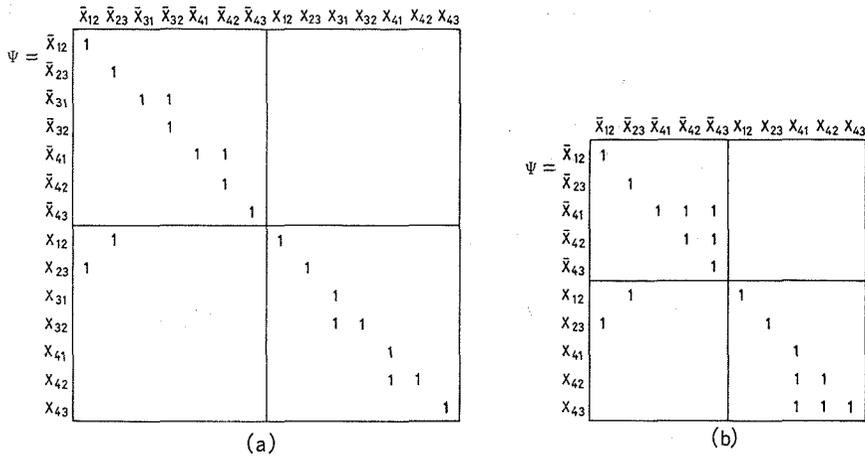


図2 推定行列の生成と更新

### 2.3 推定行列生成のアルゴリズム

定理2をもとにして、推定行列  $\Psi$  を生成するアルゴリズムを考える。

まず、式(22)の形をした方程式に着目する。左辺に現われるどの2つの未知変数も異なっていることに注意。式(22)から得られる推論をすべて挙げると次のようになる。

- (a)  $x_{pj} \rightarrow x_{ij}, \quad p \in P_{ij}, \quad (i, j) \in U$
- (a')  $\bar{x}_{ij} \rightarrow \bar{x}_{pj}, \quad p \in P_{ij}, \quad (i, j) \in U$
- (b)  $x_{iq} \rightarrow x_{ij}, \quad q \in Q_{ij}, \quad (i, j) \in U$
- (b')  $\bar{x}_{ij} \rightarrow \bar{x}_{iq}, \quad q \in Q_{ij}, \quad (i, j) \in U$

この他に、 $x_{ir} = 1$  ならば新たに推論  $x_{rj} \rightarrow x_{ij}$  及び  $\bar{x}_{ij} \rightarrow \bar{x}_{rj}$  が生ずる。これらは後に  $\Psi$  を更新する際に用いられる。このような場合を列挙しておく。

- (d)  $x_{ir} \rightarrow (x_{rj} \rightarrow x_{ij}), \quad r \in R_{ij}, \quad (i, j) \in U$
- (d')  $\bar{x}_{ir} \rightarrow (\bar{x}_{ij} \rightarrow \bar{x}_{rj}), \quad r \in R_{ij}, \quad (i, j) \in U$
- (e)  $x_{rj} \rightarrow (x_{ir} \rightarrow x_{ij}), \quad r \in R_{ij}, \quad (i, j) \in U$
- (e')  $\bar{x}_{rj} \rightarrow (\bar{x}_{ij} \rightarrow \bar{x}_{ir}), \quad r \in R_{ij}, \quad (i, j) \in U$
- (f)  $\bar{x}_{ij} \rightarrow (x_{ir} \rightarrow \bar{x}_{rj}), \quad r \in R_{ij}, \quad (i, j) \in U$
- (f')  $\bar{x}_{ij} \rightarrow (x_{rj} \rightarrow \bar{x}_{ir}), \quad r \in R_{ij}, \quad (i, j) \in U$

なお、(f) 及び (f') は

$$\bar{x}_{ij} \rightarrow \sum_{r \in R_{ij}} x_{ir} x_{ri} = 0$$

から得られる。

上記以外の場合も含めて表1にまとめたので参考にされたい。

次に、式(23)の形の方程式に着目すると容易に次の関係を得る。

- (c)  $x_{ir} \rightarrow \bar{x}_{rj}, \quad r \in R_{ij}, \quad (i, j) \in K, \quad A_{ij} = 0$

表1 方程式からの推論

前提条件	推論により値が定まる変数	更新された方程式
$x_{ij} = 1$	左辺の各項 $x_{pj} = x_{iq} = 0$	$1 = 1$
$x_{ij} = 0$		$x_{ir}x_{rj} = 0, r \in R_{ij}$
$x_{pj} = 1$	$x_{ij} = 1$	$1 = 1$
$x_{pj} = 0$		$x_{pj}$ が消える
$x_{iq} = 1$	$x_{ij} = 1$	$1 = 1$
$x_{iq} = 0$		$x_{iq}$ が消える
$x_{ir} = 1$		1次の項 $x_{rj}$ を生ずる
$x_{ir} = 0$		$x_{ir}x_{rj}$ が消える
$x_{rj} = 1$		1次の項 $x_{ir}$ を生ずる
$x_{rj} = 0$		$x_{ir}x_{rj}$ が消える

$$(c') x_{rj} \rightarrow \bar{x}_{ir}, r \in R_{ij}, (i, j) \in K, A_{ij} = 0$$

上に述べた(a) (a') (b) (b') (c) (c') の形の推論を二項推論, (d) (d') (e) (e') (f) (f') の形の推論を三項推論と呼ぶことにする。

(i, j) を固定したときの二項推論は(a) ~ (c') しかない。これをすべての  $(i, j) \in J \times J$  について考え、推定行列  $\Phi$  (添字集合は水平・垂直とも式(30)で述べた  $\bar{V} + V$ ) を作る。 $\Phi$  の推移的閉包  $\Psi$  が完全推定行列 (Complete implication matrix) となる。

いよいよ、 $\Psi$  生成のアルゴリズムを示す段階になった。(a') (b') (c') はそれぞれ(a) (b) (c) の対偶であるから、行列の転置により容易に得られる。そこで、(a) (b) (c) についてももう少し考察を進める。

いま、(a) (b) (c) の添字を適当に入れかえ、前提条件 ( $\rightarrow$  の左の変数) が  $x_{ij}$  になるようにする。さらに、 $P_{pj}$ ,  $Q_{iq}$ ,  $R_{ir}$  の定義 (定理2) に照らして書きかえると次のようになる。

$$(a) x_{ij} \rightarrow x_{pj}; A_{pi} = 1, p \approx i, (i, j) \in U, (p, j) \in U$$

$$(b) x_{ij} \rightarrow x_{iq}; A_{jq} = 1, q \approx j, (i, j) \in U, (i, q) \in U$$

$$(c) x_{ij} \rightarrow \bar{x}_{jr}; A_{ir} = 0, (i, r) \in K, (i, j) \in U, (j, r) \in U$$

上記(a) (b)において、 $p \approx i, q \approx j$  となっているが、これは、とり除いても実害はない。よって、最終的には次のようになる。

$$(a) x_{ij} \rightarrow x_{pj}; A_{pi} = 1, (i, j) \in U, (p, j) \in U$$

$$(b) x_{ij} \rightarrow x_{iq}; A_{jq} = 1, (i, j) \in U, (i, q) \in U$$

$$(c) x_{ij} \rightarrow \bar{x}_{jr}; A_{ir} = 0, (i, r) \in K, (i, j) \in U, (j, r) \in U$$

これを用いるとアルゴリズムが以下のように構成される。ただし、

$\Psi_{VV}$ :  $V$  の自己推定行列 (Self-implication matrix)

$\Psi_{\bar{V}\bar{V}}$ :  $\bar{V}$  の自己推定行列

$\Psi_{V\bar{V}}$ :  $V$  と  $\bar{V}$  の相互推定行列 (Cross-implication matrix)

$\Psi$ :  $\bar{V} + V$  の自己推定行列

であり、いずれも完全 (complete) である。

### $\Psi$ 生成のアルゴリズム

1°  $\Phi_{VV} \leftarrow I$ ;  $\Phi_{V\bar{V}} \leftarrow 0$ ; /\*  $I$  は単位行列,  $0$  は零行列 \*/

2° すべての  $(i, j) \in U$  に対し、(a) ~ (c) を行え。

(a) すべての  $(k, j) \in U$  に対し  $\Phi_{VV}(x_{ij}, x_{kj}) \leftarrow A_{ki}$ ;

(b) すべての  $(i, k) \in U$  に対し  $\Phi_{VV}(x_{ij}, x_{ik}) \leftarrow A_{jk}$ ;

(c) すべての  $(j, k) \in U$  に対し

もし  $(i, k) \in K$  ならば  $\Phi_{v\bar{v}}(x_{ij}, \bar{x}_{jk}) \leftarrow \bar{A}_{ik}$ ;

$$\begin{aligned}
 3^\circ \quad & \Phi_{v\bar{v}} \leftarrow \Phi_{v\bar{v}} + \Phi_{v\bar{v}}^t; \quad / * \quad t \text{ は転置オペレータ} \quad * / \\
 & \Psi_{v\bar{v}} \leftarrow \Phi_{v\bar{v}}^*; \quad / * \quad * \text{ は推移的閉包のオペレータ} \quad * / \\
 & \Psi_{\bar{v}\bar{v}} \leftarrow \Psi_{v\bar{v}}^t; \\
 & \Psi_{v\bar{v}} \leftarrow \Psi_{v\bar{v}} \Phi_{v\bar{v}} \Psi_{\bar{v}\bar{v}}; \\
 4^\circ \quad & \Psi \leftarrow \begin{pmatrix} \Psi_{\bar{v}\bar{v}} & 0 \\ \Psi_{v\bar{v}} & \Psi_{v\bar{v}} \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$

前述の (a') (b') (c') はステップ 3° の転置で表現されている。また、 $\Psi$  は本来

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{\bar{v}\bar{v}} & 0 \\ \Phi_{v\bar{v}} & \Phi_{v\bar{v}} \end{pmatrix}, \quad \text{ただし } \Phi_{\bar{v}\bar{v}} = \Phi_{v\bar{v}}^t \quad (31)$$

の推移的閉包で与えられるものである。しかし、ステップ 4° のように推移的閉包は  $\Phi_{v\bar{v}}^*$  だけでよい。これを次に証明する。

**定理 3** 式 (31) で定義される  $\Phi$  の推移的閉包を  $\Psi = \Phi^*$  とする。このとき、

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{\bar{v}\bar{v}} & 0 \\ \Psi_{v\bar{v}} & \Psi_{v\bar{v}} \end{pmatrix}$$

である。ただし、 $\Psi_{\bar{v}\bar{v}}$ ,  $\Psi_{v\bar{v}}$ ,  $\Psi_{v\bar{v}}$  は、 $\Psi$  生成アルゴリズムで得たものである。

(証明)

数学的帰納法により

$$\Phi^n = \begin{pmatrix} \Phi_{\bar{v}\bar{v}}^n & 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_{v\bar{v}}^k \Phi_{v\bar{v}} \Phi_{\bar{v}\bar{v}}^{n-k-1} & \Phi_{v\bar{v}}^n \end{pmatrix}, \quad n \geq 1$$

が容易にわかる (行列の 0 乗は単位行列とする)。従って、

$$\begin{aligned}
 \Psi &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi^n \\
 &= \begin{pmatrix} I + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{\bar{v}\bar{v}}^n & 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{v\bar{v}}^k \Phi_{v\bar{v}} \sum_{n=k+1}^{\infty} \Phi_{\bar{v}\bar{v}}^{n-k-1} & I + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{v\bar{v}}^n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \Psi_{\bar{v}\bar{v}} & 0 \\ \Psi_{v\bar{v}} \Phi_{v\bar{v}} \Psi_{\bar{v}\bar{v}} & \Psi_{v\bar{v}} \end{pmatrix} \quad (\text{証明終})
 \end{aligned}$$

## 2.4 推定行列更新のアルゴリズム

未知変数のうちの 1 つの値がモデル生成者によって与えられると、 $\Psi$  を参照することにより、他の未知変数の値も何個か (0 個かもしれないが) 決まる。次のステップは、前節の (d) (d') (e) (e') (f) (f') に与えられた三項推論を用いて  $\Psi$  を更新することである。

いま、 $x_{ij}$  の値が生成者から与えられ、 $\Psi$  を参照して  $x_{kl}$ ,  $x_{mn}$ , …… の値も既知となったとする。このように新たに既知となった二項対の集合を

$$N = \{(i, j), (k, l), (m, n), \dots\}$$

とする。これを用いて、既知二項対集合  $K$ , 未知二項対集合  $U$  をそれぞれ

$$K \leftarrow K + N$$

$$U \leftarrow U - N$$

と更新する。 $\Psi$  の添字集合  $V$ ,  $\bar{V}$  も新たな  $U$  を用いて, 式(30)により更新する。こうして,  $\Psi$  は, 新しい添字集合  $\bar{V}+V$  を用いて縮小される。この他の変化として, 今まで0であった  $\Psi$  のエントリーが1になる可能性がある。このアルゴリズムを示すために前節の (d) (e) (f) の添字を適当に入れかえ,  $R_{ij}$  の定義をふまえて書き直す。

- (d)  $x_{ij} \rightarrow (x_{jr} \rightarrow x_{ir}), (i, j) \in U, (j, r) \in U, (i, r) \in U$
- (e)  $x_{ij} \rightarrow (x_{ri} \rightarrow x_{rj}), (i, j) \in U, (r, i) \in U, (r, j) \in U$
- (f)  $\bar{x}_{ij} \rightarrow (x_{ir} \rightarrow \bar{x}_{rj}), (i, j) \in U, (i, r) \in U, (r, j) \in U$

これを用いて,  $\Psi$  更新のアルゴリズムを構成する。(d) (e) (f) は,  $\Psi$  生成のときと同様に行列の転置で表現される。

**$\Psi$  更新のアルゴリズム**

- 1°  $U \leftarrow U - N; K \leftarrow K + N; V, \bar{V}$  を更新  
 $\Phi_{VV} \leftarrow \Psi_{VV}$  を縮小;  
 $\Phi_{V\bar{V}} \leftarrow \Psi_{V\bar{V}}$  を縮小;
- 2° すべての  $(i, j) \in N$  に対して  
 $A_{ij} = 1$  ならば (d) (e) を行え。  
 (d) すべての  $k \in \{k | (j, k) \in U, (i, k) \in U\}$  に対して  
 $\Phi_{VV}(x_{jk}, x_{ik}) \leftarrow 1;$   
 (e) すべての  $k \in \{k | (k, i) \in U, (k, j) \in U\}$  に対して  
 $\Phi_{VV}(x_{ki}, x_{kj}) \leftarrow 1;$   
 $A_{ij} = 0$  ならば (f) を行え。  
 (f) すべての  $k \in \{k | (i, k) \in U, (k, j) \in U\}$  に対して  
 $\Phi_{V\bar{V}}(x_{ik}, \bar{x}_{kj}) \leftarrow 1;$
- 3°  $\Phi_{V\bar{V}} \leftarrow \Phi_{V\bar{V}} + \Phi_{V\bar{V}}^t;$   
 $\Psi_{VV} \leftarrow \Phi_{VV}^*;$   
 $\Psi_{V\bar{V}} \leftarrow \Psi_{V\bar{V}}^t;$   
 $\Psi_{V\bar{V}} \leftarrow \Psi_{VV} \Phi_{V\bar{V}} \Psi_{V\bar{V}};$
- 4°  $\Psi \leftarrow \begin{pmatrix} \Psi_{V\bar{V}} & 0 \\ \Psi_{V\bar{V}} & \Psi_{VV} \end{pmatrix};$

**3. 推 定 図**

本章の主題を説明するために図3の2つのモデルを考える。この合意モデルにおける未知変数は,  $x_{12}, x_{21}, x_{32}, x_{41}, x_{43}, x_{52}, x_{54}, x_{56}, x_{57}, x_{61}, x_{63}, x_{74}, x_{76}$  の13個であり, 推定行列は図4のようになる。図4ではスペースの都合上,  $\Psi_{VV}$  と  $\Psi_{V\bar{V}}$  を同じ表中で混在させている。空白はエントリー0, 1は  $\Psi_{VV}$  のエントリー1,  $\bar{1}$ は  $\Psi_{V\bar{V}}$  のエントリー1である。

さて,  $\Psi$  の視覚化について考える。 $V$  の要素 (未知変数) をノードとし,  $\Psi(x_{ij}, x_{kl}) = 1$  ならばノード  $x_{ij}$  から  $x_{kl}$  へ実線の弧をつける。同時に  $x_{kl}$  から  $x_{ij}$  へ破線の弧をつける。これらはそれぞれ,  $x_{ij} = 1 \xrightarrow{\text{ならば}} x_{kl}$

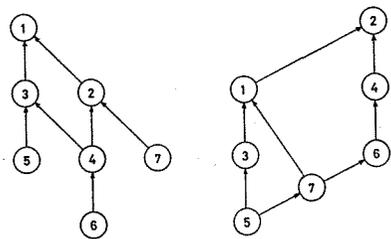


図3 2つのISMモデルの例

$= 1, x_{kl} = 0 \xrightarrow{\text{ならば}} x_{ij} = 0$  を表現している。一方,  $\Psi(x_{ij}, x_{kl}) = 1$  ならばノード  $x_{ij}$  から  $x_{kl}$  へ; また,  $x_{kl}$  から  $x_{ij}$  へ実線から破線に変わる弧をつける。これらは,  $x_{ij} = 1 \xrightarrow{\text{ならば}} x_{kl} = 0, x_{kl} = 1 \xrightarrow{\text{ならば}} x_{ij} = 0$  を表現している。

このような図を推定図 (Implication diagrams) と呼ぶ。図 4 の  $\Psi$  を推定図で表わすと図 5 のようになる。この図により, 未知変数間の関連が視覚的にとらえられ, 二つのモデルの構造の差が明らかになる。この例の場合, もし  $x_{52} = 0$  ならば破線をたどることにより  $x_{12}, x_{32}, x_{56}, x_{54}, x_{57}$  が 0 となることがわかる。また, もし  $x_{43} = 1$  ならば実線をたどることにより,  $x_{41}, x_{61}, x_{63}$  は 1, また, 途中から破線となるものがあり,  $x_{76}, x_{74}$  は 0 となる。

ここで図 3 に示したモデルの主張の構造を調べてみる。左側のモデルは,  $x_{52} = 0, x_{21} = x_{43} = 1$  が他の変数の値をすべて決めてている。右側のモデルは,  $x_{61} = 0, x_{56} = x_{12} = x_{57} = x_{76} = 1$  がその主張の基礎を形成している。

こうした解析を進めながら, 自分や他人のモデルの論理構造を図示することにより, モデルに対する認識が深まり, 合意への素地ができる。そのような意味で推定図は有効な情報提示技法といえよう。

$$\Psi_{VV} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_{12} & x_{21} & x_{32} & x_{41} & x_{43} & x_{52} & x_{54} & x_{56} & x_{57} & x_{61} & x_{63} & x_{74} & x_{76} \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_{12} \\ x_{21} \\ x_{32} \\ x_{41} \\ x_{43} \\ x_{52} \\ x_{54} \\ x_{56} \\ x_{57} \\ x_{61} \\ x_{63} \\ x_{74} \\ x_{76} \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & & & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & & 1 \end{matrix} \end{matrix}$$

図 4 推定行列  $\Psi_{VV}$  及び  $\Psi_{VV}$

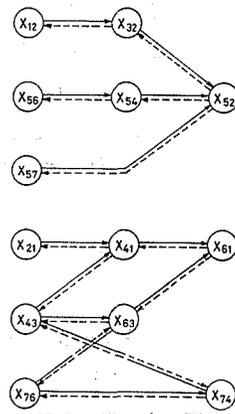


図 5 推定図

### 4. む す び

ISM における合意形成過程に関し, 推定行列の生成と更新のアルゴリズムおよび推定図について述べた。本稿で示した理論やアルゴリズムは応用範囲が広い。たとえば, 二つのサブモデルの統合 (coupling) は本稿のアルゴリズムの特別な場合であることは明らかである。その意味で, 本理論は統合理論の一般化 (general coupling theory) である。これを用いれば, 現在, 相 1 と相 2 に分けて行なっている具象化の理論も一般化できよう。また, 本手法で得られる  $\Psi$  を用いて, 2つのモデルの差あるいは距離を定義できる可能性もある。このように本論文の理論は ISM の原理をそのまま表現したものであり, その拡張は今後の課題となろう。

本研究に際し, 有益な御助言を頂いた室蘭工業大学山口忠助教授に感謝いたします。

### 参 考 文 献

- 1) John N. Warfield: "Implication Structures for System Interconnection Matrices", IEEE TRANS. ON SYSTEMS MAN AND CYBERNETICS, SMC-6, NO. 1, JAN. 1976
- 2) George G. Lendaris: "Structural Modeling—A Tutorial Guide", IEEE TRANS. ON SMC, SMC -10, NO. 12, DEC. 1980
- 3) 丹羽富士雄, 司馬正次: "オピニオン・テクノロジーの展望", オペレーションズ リサーチ, 25, NO. 8, p. 509-512 (1980)