HOKKAIDO UNIVERSITY

| | |
|---|---|
| Title | 繰返し応力条件下における砂の弾塑性応力 : ひずみ関係 |
| Author(s) | 三浦, 清一; 土岐, 祥介; 稲, 直美 |
| Citation | 北海道大學工學部研究報告, 111, 13-23 |
| Issue Date | 1982-10-30 |
| Doc URL | https://hdl.handle.net/2115/41757 |
| Type | departmental bulletin paper |
| File Information | 111_13-24.pdf |

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第111号（昭和57年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 111 (1982)

# 繰返し応力条件下における砂の弾塑性応力～ひずみ関係

三浦清一　土岐祥介　稲　直美

(昭和57年6月30日受理)

# An Elastoplastic Stress-Strain Relationship for Sand Subjected to Cyclic Loading

Seiichi MIURA, Shosuke TOKI and Naomi INE

(Received June 30, 1982)

## Abstract

This paper presents an elasto-plasticity model for sand under monotonic and cyclic stress conditions.

First, a series of drained triaxial shear tests with various stress paths was performed to examine the fundamental stress-strain characteristics of sand. On the basis of these results, an elastoplastic stress-strain model under monotonic stress condition was developed. This theory is shown to predict sand behavior under various loading conditions with good accuracy.

Then, the monotonic stress-strain model above derived was extended to a cyclic stress condition, on the basis of sand behavior observed in a series of cyclic triaxial tests. The main aspect of the extended stress-strain model is that sand undergoes a combination of kinematic and isotropic strain hardening in order to simulate the observed behaviors of sand under cyclic stress condition. A Comparison of the predicted and measured cyclic stress-strain relationships showed that this theory is capable of simulating the important features of sand behavior under cyclic stress conditions, such as hysteretic behavior, and the subsequent change in the shape of hysteresis loop with the number of cycles and cumulative effect leading to large plastic strains.

## 1. はじめに

砂の応力～ひずみ関係のモデル化に関する研究は，砂地盤の液状化特性や支持力・変形問題の解析法を確立する上で重要かつ基礎的な問題である。

近年，砂の粒子間の相互作用の微視的考察[1]，あるいは砂の構造異方性を取入れて既成の弾性理

土木工学科 基礎地盤工学講座

論や塑性理論[2]にもとづいた，砂の応力～ひずみ関係式が提案され，単調応力載荷条件下における砂の挙動に限ればそれをある程度説明できるようになったと考えられる。しかし，この応力～ひずみ関係式を，地震などによって引き起こされる液状化のような繰返し応力載荷条件下の問題に適用するためには，応力～ひずみ関係のヒステリシス挙動や，間隙水圧およびひずみの累積現象など、解明しなければならない問題が多い。

本報告では，まず砂の三軸試験の結果をもとにして，巨視的かつ現象論的な立場から砂の変形機構を考察し，弾塑性理論を用いてその数式表示を試みた。さらに，この応力～ひずみ関係式を非排水繰返し応力載荷条件下における砂の液状化問題に適用するための基礎的研究として，種々の排水繰返し応力載荷条件下における砂の応力～ひずみ挙動を実験的に調べ，これにもとづいて上述の応力～ひずみ関係式を排水繰返し載荷条件に拡張し実測値との対比を示した。

この結果，単調応力載荷条件下で誘導した砂の応力～ひずみ関係式に，移動硬化の考え方を導入し，硬化関数に含まれるパラメータをせん断履歴の関数と考えることによって，排水繰返し応力載荷条件下における砂の応力～ひずみ挙動を比較的よく表現できることがわかった。

ただし，以下の議論はすべて軸対称三軸応力条件に限定している。

## 2.　試料および供試体作製法

実験に用いた試料は豊浦標準砂である。この砂の物理定数は，$G_s=2.65$，$e_{max}=0.992$，$e_{min}=0.625$ であり，土質工学会[3]で定められた方法によって求めたものである。

供試体はすべて多重ふるい落下法[4]（MSP法）で作成した。この作製法は，乾燥砂を7層のふるいを通して空中落下させることにより供試体を作製する方法で，均質で再現性の良い供試体を広範囲の相対密度にわたって供給しうるものである。

## 3.　試験方法と試験の種類

試験は通常の三軸試験装置を用いて実施した。三軸試験用供試体の寸法は，径50mm，高さ 120 mmである。供試体は作製後 $CO_2$ を通し，引続き脱気水で飽和させた。その後，196 kPa のバックプレッシャーを与えている。以上の方法で作製した供試体を，所定の有効拘束圧 $p'_c$ のもとで30分以上圧密し（このときの相対密度を $D_{rc}$ とする），その後，以下に示す試験を実施した。

(1)　平均主応力一定三軸圧縮および伸張試験（PC および PE 試験と略す）
(2)　側圧一定三軸圧縮および伸張試験（LC および UE 試験と略す）
(3)　軸圧一定三軸圧縮および伸張試験(UC および LE 試験と略す)
(4)　等方圧縮・膨張試験（ICR 試験と略す）
(5)　平均主応力一定繰返し試験

ただし，試験はすべて排水試験である。これらの中で，(2)の試験だけがひずみ制御（$\dot{\varepsilon}_a=0.23\,\%/\mathrm{min.}$）で行われ，他はすべて応力制御で実施された。また，(1)，(3)，(4)および(5)の試験は，側圧を変化させる試験なので，メンブレン貫入の補正を行っている。図-1に，(1)～(4)の試験の応力径路を示す。ただし，(5)の試験については後述する。

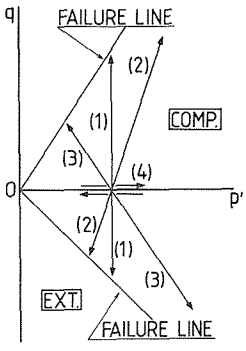



Fig.1 Stress paths used for probing monotonic stress-strain behavior of sand in triaxial loading

本研究で用いた応力・ひずみのパラメータは次のように定義されている。

$$q=|\sigma'_a-\sigma'_r| \quad (1) \qquad p'=\frac{1}{3}(\sigma'_a+2\cdot\sigma'_r) \quad (2) \qquad \eta=\frac{q}{p'} \quad (3)$$

$$\gamma=\frac{2}{3}|\varepsilon_a-\varepsilon_r| \quad (4) \qquad \varepsilon_v=\varepsilon_a+2\cdot\varepsilon_r \quad (5)$$

ただし，$\sigma'_a$，$\sigma'_r$はそれぞれ軸方向，側方向有効主応力，$\varepsilon_a$，$\varepsilon_r$はそれぞれ軸方向，側方向主ひずみで，圧縮を正とする。

## 4. 試験結果と考察

PC，LC，UC 試験および PE，LE，UE 試験から得られた応力～ひずみ関係を 図-2 に示す。圧縮側の体積ひずみ $\varepsilon_v$に着目すると，明らかに応力径路依存性がみられ，せん断時における

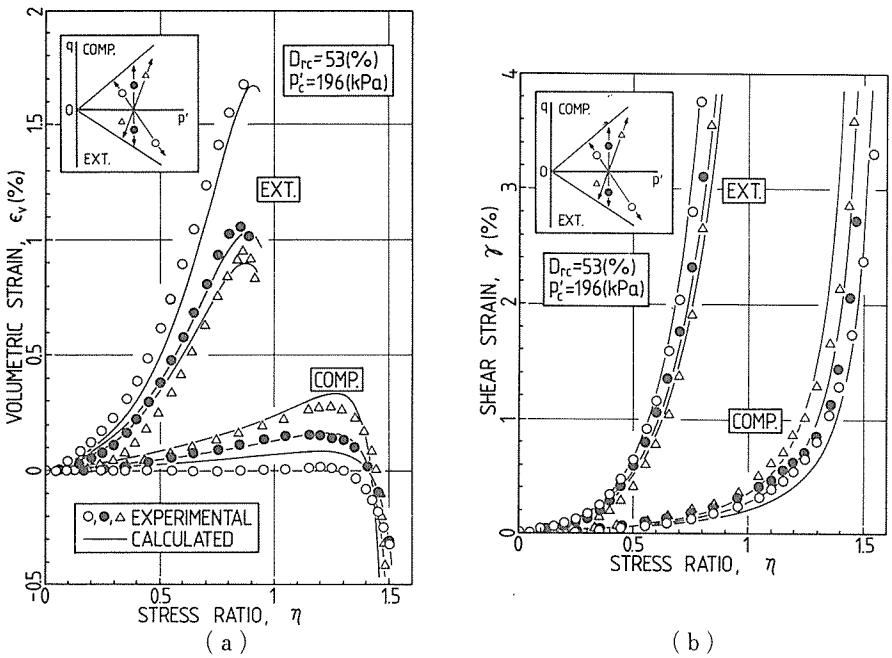
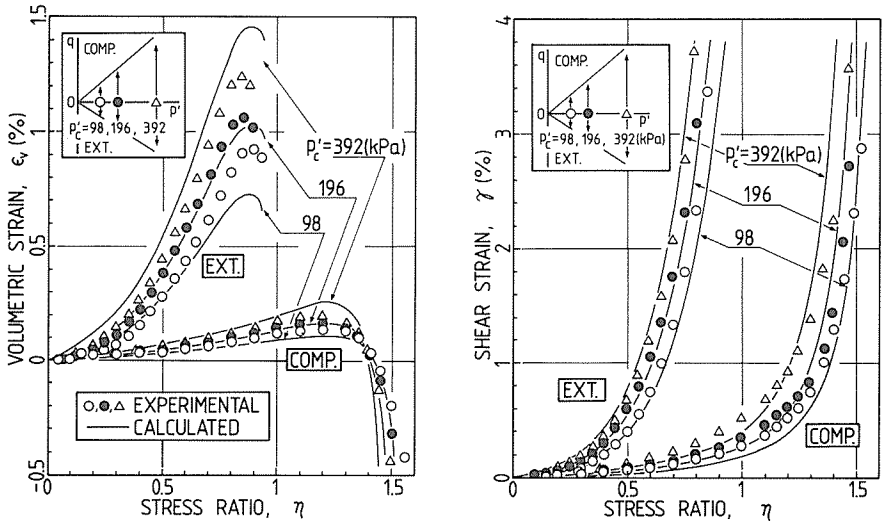



Fig. 2　Comparison of the experimental and calculated stress-strain relationships under various stress paths

平均有効主応力 $p'$ の $\varepsilon_v$に対する貢献の差を示している。同様の傾向は伸張側でもみられる。また，圧縮側と伸張側を比較すると，伸張側で発生する $\varepsilon_v$は圧縮側で発生するそれよりかなり大きいことがわかる。これは，三浦ら[4] が以前に指摘した MSP 法による供試体の強い構造異方性を考慮すると，応力径路依存性だけによるものではないと考えられる。

一方，せん断ひずみ $\gamma$の発生特性にも応力径路依存性がみられ，応力径路と $p'$ 軸の正の方向がなす角の小さいものほど，同一の応力比 $\eta$における $\gamma$が大きいことがうかがわれる。以上の事実は，他の $p'_c$（たとえば98，392 kPa）の試験でも確認されている。

次に，有効拘束圧 $p'_c$を変化させて行った PC および PE 試験から得られた応力～ひずみ関係を図-3 に示す。これらの図から，$\eta$～$\varepsilon_v$関係および $\eta$～$\gamma$関係はこの初期拘束圧にも依存することが明らかである。つまり，$p'_c$が大きいほど同一の $\eta$における $\varepsilon_v$，$\gamma$ の値は大きく，供試体がひずみやすくなっていることがわかる。同様の結果は他の応力径路の試験でも得られた。




(a)　　(b)

Fig. 3　Comparison of the experimental and calculated stress-strain relationships in PC and PE Tests at different confining pressures

以上の実験結果から，砂の応力～ひずみ関係の応力径路および拘束圧依存性が明らかになった。さらに，MSP供試体の三軸圧縮と三軸伸張条件での応力～ひずみ関係の大きな相違は，MSP供試体の構造異方性とは無関係ではない。これらの事実をふまえて，以下に砂の応力～ひずみ関係式を誘導する。

## 5.　弾塑性理論にもとづく応力～ひずみ関係式

弾塑性理論では，塑性変形の開始を定める降伏条件（応力空間では降伏曲面）を設定し，その状態に達するまでは弾性変形だけが，さらに降伏条件を満足する応力状態に至ると弾性変形と塑性変形が共存して変形が進行し，それとともに降伏曲面も拡大していくと考える。このとき発生するひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ は，弾性成分 $d\varepsilon^e_{ij}$ と塑性成分 $d\varepsilon^p_{ij}$ の和として表わすことができるとする。

$$d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon^e_{ij}+d\varepsilon^p_{ij} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3\quad i,\ j\text{は総和規則に従う}) \tag{6}$$

また，(6)式は，圧密によるひずみとせん断によるひずみに分離でき，

$$d\varepsilon_{ij}=(d\varepsilon^e_{ij})_c+(d\varepsilon^e_{ij})_s+(d\varepsilon^p_{ij})_c+(d\varepsilon^p_{ij})_s \tag{7}$$

と書けると仮定する。ただし，サフィックス $_c$，$_s$ は圧密成分およびせん断成分を表わす。

ここで，塑性ひずみ増分は塑性理論[5]から，

$$d\varepsilon^p_{ij}=h\cdot\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}\cdot df \tag{8}$$

で計算できる。ただし，$f$，$g$，$h$はそれぞれ降伏関数，塑性ポテンシャル関数，硬化関数である。塑性理論を用いて応力～ひずみ関係式を誘導するためには，$f$，$g$，$h$を具体的に決定する必要がある。一方，弾性ひずみ増分は，後述するように弾性理論により応力増分と関連づけることができる。

### 5.1.　圧密に関する応力～ひずみ関係式

任意応力径路下のせん断過程で発生するひずみ増分が(7)式で表わせると考えると，圧密項すな

わち平均主応力変化に伴うひずみ増分は次式となる。

$$(d\varepsilon_{ij})_c=(d\varepsilon^e_{ij})_c+(d\varepsilon^p_{ij})_c \tag{9}$$

$(d\varepsilon_{ij})_c$は，図-4 に示すように ICR 試験の結果より評価できると考えた。図より，ICR 試験から得られた $\varepsilon_{vc}$～$p'$ 関係は，両対数紙上で大よそ直線となり定式化可能である。つまり，等方圧密に関する降伏関数 $f_c$ は，任意の $p'$ が降伏点であると考えることができるから，

$$f\equiv f_c=p'-p'_y=0 \tag{10}$$

となる。ただし，$p'_y=p'_c$で圧密に関する硬化パラメータである。また，砂の異方構造のため等方圧密中に発生するせん断ひずみ $\gamma_c=\gamma^e_c+\gamma^p_c$は，実測によると微小であることから無視できると考えれば，$d\varepsilon^p_{vc}$ の方向は $p'$ 軸の正の方向に一致するから，

$$g\equiv g_c=p'-p'_y=0 \tag{11}$$

と書け，$f_c$ と $g_c$ が一致する関連した流れ則が採用できる。つまり，(8)式から，

$$(d\varepsilon^p_{ij})_c=h_c\cdot\frac{\partial g_c}{\partial p'}\cdot df_c=\frac{h_c}{3}\cdot\delta_{ij}\cdot dp' \tag{12}$$

となる。ただし，$\delta_{ij}$はクロネッカーのデルタである。ここで，図-4 における $\log\varepsilon_{vc}$～$\log p'$ の直線関係から圧密に伴う塑性体積ひずみ増分は，

$$d\varepsilon^p_{vc}=k\cdot(l-n)\cdot\left(\frac{p'}{p'_c}\right)^{l-n}\cdot\frac{dp'}{p'} \tag{13}$$

である。ただし，$k$，$l$，$n$ はそれぞれ，等方圧密(圧密圧力 $p'_c$) 終了時の $\varepsilon_{vc}$，載荷曲線の傾き，および除荷曲線の傾きである。(12) および(13)式より，$h_c$の具体形は次式となる。

$$h_c=k\cdot(l-n)\cdot\left(\frac{p'}{p'_c}\right)^{l-n}\cdot\frac{1}{p'} \tag{14}$$

また，弾性体積ひずみ増分は，図-4 の除荷曲線から次のように求められる。

$$d\varepsilon^e_{vc}=k\cdot\left\{l\cdot\left(\frac{p'}{p'_c}\right)^{l}-(l-n)\cdot\left(\frac{p'}{p'_c}\right)^{l-n}\right\}\cdot\frac{dp'}{p'} \tag{15}$$

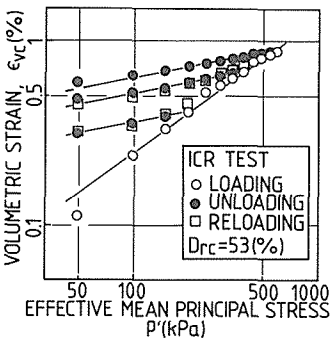



Fig. 4 Relationship between volumetric strain and effective mean principal stress in ICR Test

### 5.2. せん断に関する応力～ひずみ関係式

前節で圧密によるひずみ増分式を導いた。ここでは，せん断によるひずみ増分 $(d\varepsilon_{ij})_s$の誘導を述べていく。ただし，せん断に関する $f_s$，$g_s$，$h_s$は，基本的に平均主応力が変化しない試験から求めることができるから，以下，PC および PE 試験の結果をもとに議論を進めていく。

現在一般に，砂のせん断に関して，降伏条件式に対する Normality condition (降伏面に対して塑性ひずみ増分ベクトルは法線方向にあるとする条件) は成立しないと考えられ，実験的[6),7)]にも検証されている。これらの実験的研究によると，軸対称三軸応力条件下で砂の降伏関数は，原点を通る有効応力比一定線に近い形となることが示されている。すなわち，

$$f_s=\eta-\eta_y=0 \tag{16}$$

ここで，$\eta_y$はせん断に関する硬化パラメータである。

さて，塑性ポテンシャル関数がこの降伏関数と一致する関連した流れ則を採用すると，砂はせん断開始と同時に体積膨張をおこすことになり，明らかに 4 章で示した実験結果に反する。そこで，せん断に関する塑性ポテンシャル関数 $g_s$ を $f_s$とは別に決定する必要があると考えられる。

図-5は，PC および PE 試験の結果から得られた，応力比 $\eta$～塑性ひずみ増分比 $d\varepsilon^p_{vs}/d\gamma^p_s$関係

を示している。$\eta$ と $d\varepsilon_{vs}^{p}/d\gamma_{s}^{p}$ の間には，圧縮，伸張ともに拘束圧によらない良好な直線関係がみられ，

$$\frac{d\varepsilon_{vs}^{p}}{d\gamma_{s}^{p}} = C_d\cdot(m-\eta) \tag{17}$$

と表わせる。ここで，$1/C_d$ は直線の傾き，$m$ は $d\varepsilon_{vs}^{p}/d\gamma_{s}^{p}=0$ 点での $\eta$ である。$C_d$，$m$ は圧縮か伸張かの応力系だけに依存するパラメータである。(17)式は，いわゆる流れ則を表わし，塑性ポテンシャル上の直交条件，$d\varepsilon_{vs}^{p}/d\gamma_{s}^{p}=-dq/dp'$ を用いて次式のように $g_s$ を決定することができる。

$$g_s=(\eta-\eta_s)+m\cdot\ln\left(\frac{p'}{p'_s}\right)=0 \quad (C_d=1) \tag{18}$$

$$g_s=(\eta-\eta_s)+\frac{C_d\cdot m}{1-C_d}\cdot\left\{1-\left(\frac{p'}{p'_s}\right)^{C_d-1}\right\}=0 \quad (C_d\neq 1) \tag{19}$$

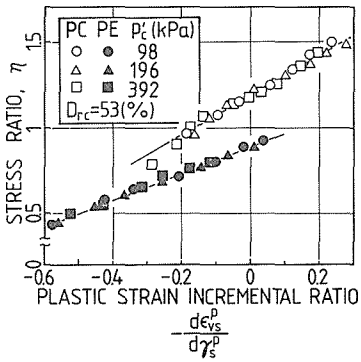



Fig. 5 Relationship between plastic strain incremental ratio and stress ratio in PC and PE Tests

ただし，$\eta_s$，$p'_s$ は定数である。

(8)式に (18) 又は (19) 式を代入すると，せん断に関する硬化関数 $h_s$ は，

$$h_s=p'\cdot\frac{d\gamma_{s}^{p}}{df_s}=p'\cdot\frac{d\varepsilon_{vs}^{p}}{C_d\cdot(m-\eta)\cdot df_s} \tag{20}$$

のように表現できる。$h_s$ は一般にせん断による塑性ひずみ仕事の関数である。ここで，Frydman[8] は，$h_s$ を塑性ひずみ仕事 $W^p$ の関数として(21)式の形に表わせることを実験的に示した。

$$h_s=A\cdot(W^p)^B \tag{21}$$

ただし，$W^p=C_d\cdot m\int p'\cdot d\gamma^p$ である。(21)式は，$h_s\sim W^p$ 関係が両対数紙上で，傾き $B$，$W^p=1$ における切片 $A$ の直線で表わせることを示している。

そこで，PCおよびPE試験結果から $h_s$，$W^p$ を計算しプロットしたものを図-6に示す。圧縮，伸張側ともに満足のいく直線関係がみられる。しかし，係数 $A$，$B$ は応力系に依存しており，圧縮側の $A$ は拘束圧の増大とともに小さくなる傾向を示している。

結局，(21)式を積分して $h_s$ を $\eta$ だけの関数として定めることができる。

$$h_s=\left\{\left(\frac{p'}{G^*}\right)^{\frac{1-B}{B}}+C_d\cdot m\cdot A^{\frac{1}{B}}\cdot(1-B)\cdot(\eta-\eta_0)\right\}^{\frac{B}{1-B}} \quad (B\neq 1) \tag{22}$$

$$h_s=\frac{p'}{G^*}\cdot\exp\left\{C_d\cdot m\cdot A\cdot(\eta-\eta_0)\right\} \quad (B=1) \tag{23}$$

ただし，$G^*$ は $(d\eta/d\gamma_{s}^{p})_{\eta=\eta_0}$，$\eta_0$ は硬化開始時の $\eta$ である。

以上の議論から，$f_s$，$g_s$，$h_s$ を具体的に決定できたので，(8)式を用いて，せん断による塑性ひずみ増分の一般式を次式のように誘導することができる。

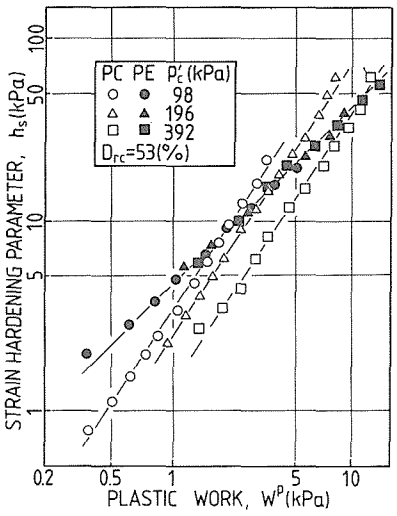



Fig. 6 Relationship between strain hardening parameter and plastic work during shear in PC and PE Tests

$$(d\varepsilon_{ij}^{p})_s=\frac{h_s}{3\cdot p'}\cdot\left\{C_d\cdot(m-\eta)\cdot\delta_{ij}+\frac{9}{2}\cdot\frac{s_{ij}}{q}\right\}d\eta \tag{24}$$

ただし，$s_{ij}(=\sigma_{ij}-p'\cdot\delta_{ij})$は偏差応力テンソルである。したがって，平均主応力一定径路下の塑性体積ひずみおよび塑性せん断ひずみ増分は次式で与えられる。

$$d\varepsilon_{vs}^{p}=\frac{C_d}{p'}\cdot\left\{\left(\frac{p'}{G^*}\right)^{\frac{1-B}{B}}+C_d\cdot m\cdot A^{\frac{1}{B}}\cdot(1-B)\cdot(\eta-\eta_0)\right\}^{\frac{B}{1-B}}\cdot(m-\eta)\,d\eta \quad (B\neq 1) \tag{25}$$

$$d\varepsilon_{vs}^{p}=\frac{C_d}{p'}\cdot\left(\frac{p'}{G^*}\right)\cdot\exp\left\{C_d\cdot m\cdot A\cdot(\eta-\eta_0)\right\}\cdot(m-\eta)\,d\eta \quad (B=1) \tag{26}$$

$$d\gamma_s^{p}=\frac{d\varepsilon_{vs}^{p}}{C_d\cdot(m-\eta)} \tag{27}$$

また，弾性ひずみ増分は，$\eta$ だけの関数として次式で表わすことができる[6),9)]。

$$d\varepsilon_{vs}^{e}=-\frac{d\eta}{D_e} \quad (28) \qquad d\gamma_s^{e}=\frac{d\eta}{\bar{G}} \quad (29)$$

ただし，$D_e$，$\bar{G}$ は定数である。

### 5.3. 実測値と計算値の比較

**5.1.**および**5.2.**で求めたひずみ増分式はすべて容易に積分でき，計算に必要なパラメータはすべて軸対称三軸試験で求めることができる。そこで，$p'_c=196$kPa の試験結果をもとにして求めた諸パラメータの値を表-1に示す。$m$値が圧縮と伸張で異っているが，$\phi_{cv}(d\varepsilon_{vs}^{p}/d\gamma_s^{p}=0$ 点での $\phi$) はほぼ一致している。

また，4章で指摘した応力～ひずみ関数の拘束圧依存性は $G^*$ を，次式のような平均有効主応力 $p'$ の関数とすることにより評価できることを実験結果は示している。

$$G^*=G_0^*\cdot\left(\frac{196}{p'}\right)^{\lambda},\quad(\lambda=0.5) \tag{30}$$

ただし，$G_0^*$ は $p'_c=196$kPa での $G^*$，$\lambda$ は定数である。上式は，せん断弾性係数 $G$ と $p'$ の間に，$G\propto(p')^{0.5}$ の関係があるという報告[10)]に一致している。

さらに，圧縮側における $A$ 値の拘束圧依存性は次式で評価した。

$$A=A_0\cdot\left(\frac{196}{p'}\right)^{0.8} \tag{31}$$

ただし，$A_0$ は $p'_c=196$kPa での $A$ である。

Table 1
Model parameters for Toyoura sand in monotonic loading condition ($D_{rc}=53\%$, $p'_c=196$kPa)

| | COMP. | EXT. |
|---|---|---|
| $C_d$ | 1 | 1.33 |
| m | 1.16 | 0.88 |
| A | 2.5 | 5 |
| B | 1.57 | 1 |
| $G^*$ | 1500 | 570 |
| $D_e$ | 3400 | |
| $\bar{G}$ | 1500 | |
| k | 0.23 | |
| l | 0.7 | |
| n | 0.2 | |

図-2，3に，計算値を実線で示した。計算値は十分に実測値の傾向を説明していると考えられ，(30) 式の考え方が有効であることがわかる。

以上のように，単調応力載荷条件下における砂の応力～ひずみ関係式を，弾塑性理論にもとづいて誘導し実測値と計算値の比較を行った。そこで，次章では，この応力～ひずみ関係式を繰返し応力条件に拡張することを試みる。

## 6. 繰返し応力条件下における砂の応力～ひずみ関係式

### 6.1. 繰返し応力条件下における砂の応力～ひずみ関係

繰返し応力を受ける砂の変形挙動を調べるために，3章で述べた平均主応力一定繰返し試験を

行った。図-7にその応力径路を示した。ここで，たとえば(a)のEC試験とは，等方圧密($p'_c$=196 kPa)ののち伸張側に所定の応力比$\eta_R$までせん断後除荷し，引続き圧縮側で破壊に至らしめた試験である（1→2→3)。また，CE試験は圧縮側からせん断を開始した試験である。

図-8は，(d)の繰返し試験から得られた応力～ひずみ関係の一例を示したものである。ここで，$R$は圧縮側，伸張側それぞれにおいて，応力反転時に動員される応力比と破壊時のそれとの比である。まず，体積ひずみ$\varepsilon_v$に着目すると，体積圧縮が1サイクル目において最も顕著に現れているのが明らかである。この1サイクル目で生ずる体積変化は塑性成分が卓越しているが，繰返し回数$N$の増加につれて徐々に弾性的な状態に近づいている。一方，せん断ひずみ$\gamma$に着目すると，明瞭なヒステリシスがみられ1サイクル目のものが最大である。しかし，$N$の増加につれてヒステリシスの大きさは小さくなる。これらのように，体積ひずみの累積現象あるいは$\eta$～$\gamma$関係のヒステリシス挙動が繰返し応力載荷条件下の砂の変形挙動を特徴づけている。

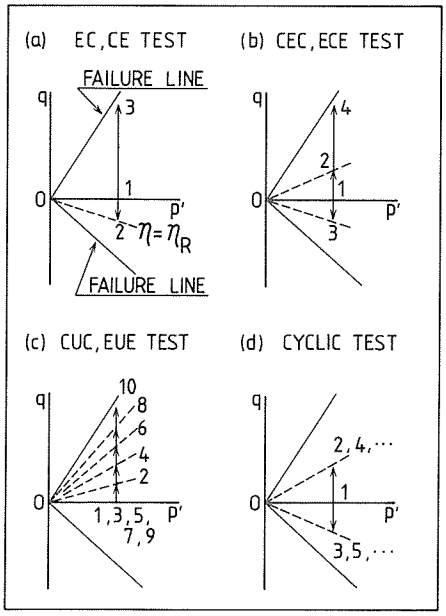



Fig. 7　Stress paths used for probing stress-strain behavior of sand under cyclic stress conditions

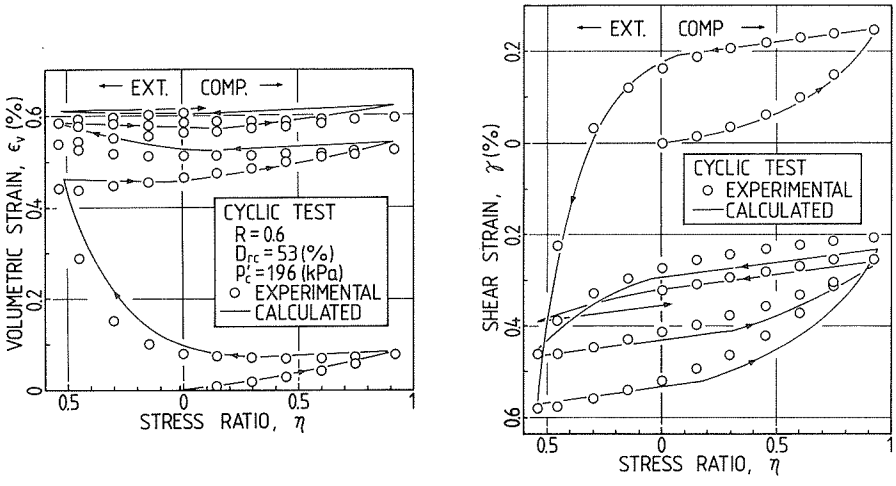
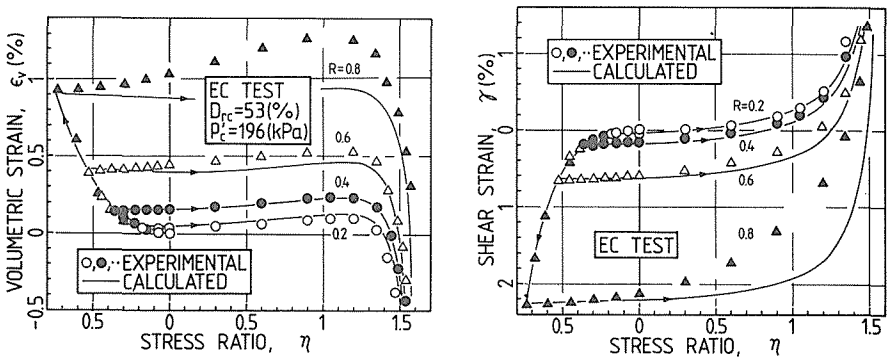



Fig. 8　Comparison of the experimental and calculated stress-strain relationships in cyclic test

繰返し応力の載荷による砂の変形特性の変化は，せん断履歴によってもたらされる砂の弾塑性的性質の変化を調べることによって明らかにできると考えられる。ここで，繰返しせん断履歴を有する砂の変形特性を調べる目的で実施した図-7(a)～(c)　の試験結果の一例を 図-9 に示す。試験結果の詳細はすでに報告している[11]が，ここでは得られた結果のいくつかを次にまとめておく。




(a)　　(b)

Fig. 9　Comparison of the experimental and calculated stress-strain relationships in EC Test

(i)　逆方向で受けたせん断履歴の大きさがある程度以下ならば，その後の変形・強度特性にはほとんど影響を与えない。しかし，$\gamma_R$(応力反転時の$\gamma$)がおよそ1％をこえる場合，その影響の程度は応力の大きさよりむしろ逆方向で受けたひずみの大きさで規定される。

(ii)　応力除荷時には弾性領域が存在し，その大きさは応力反転時のひずみの大きさに依存する。

(iii)　応力除荷・再載荷時では新たな塑性ひずみが発生しており，この事実は降伏点が移動することを示している。これは，繰返し応力のような応力反転を伴う場合の変形特性のモデル化には移動硬化理論の導入が必要であることを示唆している。

### 6.2.　繰返し応力条件下における砂の応力～ひずみ関係のモデル化

ここでは，前節の結果をもとに，5章で誘導した応力～ひずみ関係式を繰返し応力条件に拡張することを試みる。ただし，簡単のため以下の議論はすべて平均主応力一定条件，つまり，せん断による砂の変形に限定する。

さて，前述したように，塑性理論をもとにして塑性ひずみ増分を計算するためには，$f$, $g$, $h$を求める必要がある。そこで，繰返し応力条件下の$f$, $g$, $h$を求めるために以下に述べる仮定をおく。

(1)　応力除荷時に存在する弾性領域の大きさは，柴田ら[12]の提案している等方硬化パラメータ$\alpha$(図-10参照)で評価できるものとする。

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\alpha_f \cdot \xi_0 \cdot \gamma^p}{\alpha_f + \xi_0 \cdot \gamma^p} \tag{32}$$

ただし，$\alpha_0$, $\alpha_f$, $\xi_0$は定数で，それぞれ，せん断初期の弾性領域の大きさ，最終的な弾性領域の大きさ，および弾性領域拡大の割合を表わす。このとき，降伏関数$f$は次式で表わされる。

$$f = \eta - \eta_y^{\pm} = 0 \tag{33}$$

$\eta_y^{\pm}$は硬化パラメータで，図-10に示すように$\eta_y^+$と$\eta_y^-$で囲まれた領域がが弾性領域を表わしている。

(2)　繰返し応力条件下の$\alpha$, $\beta$(図-10参照)を$d\alpha = s(\gamma^p)\cdot d\gamma^p$および$d\beta = t(\gamma^p)\cdot d\gamma^p$と表わすと，硬化関数は(20)および(33)式を用いて

$$h = \frac{p'}{a \cdot s + b \cdot t} \tag{34}$$

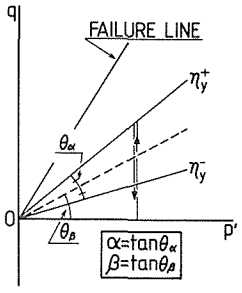



Fig. 10
Explanation of yielding for sand under cyclic stress condition

と書くことができる。ただし，$\alpha=\pm(1+\beta^2)/(1\mp\alpha\cdot\beta)^2$，$b=(1+\alpha^2)/(1\mp\alpha\cdot\beta)^2$ である。$\beta$ は硬化の移動硬化部分を表わすと考えられるが，$t(\gamma^p)$の関数形を簡単な形で求めることは困難と思われる。そこで，繰返し応力条件下の硬化関数 $h$ は，繰返し振幅がある大きさ($\gamma_R\simeq1\%$)以下ならば，基本的には単調応力載荷時のそれで表わせると仮定する。これは図-11 に示すように，繰返しせん断履歴を受けた後の $h\sim W^p$ 関係が $R\leqq0.6(\gamma_R<1\%)$ で処女供試体のそれとほとんど変わらないことから導いた。このとき，$t(\gamma^p)$は形式的に次式のように書ける。

$$t=\frac{H-a\cdot s}{b} \tag{35}$$

ただし，$H=d\gamma^p/d\eta$ である。

(3)　硬化関数に含まれるパラメータ $A$，$G^*$は，2サイクル目以降，繰返しせん断履歴の影響を受け，次式のように書けると仮定する。

$$A=A_0\cdot\exp\{c\cdot(N-1)\} \tag{36}$$

$$G^*=G_0^*\cdot\exp\{d\cdot(N-1)\} \tag{37}$$

ここで，$A_0$，$G_0^*$は単調応力載荷時の $A$，$G^*$を，$c$，$d$ は定数，$N$は第$N$サイクルを意味する。この仮定は，$A=(d\gamma^p/d\eta)_{\gamma^p=1/c_d\cdot m\cdot p'}$，$G^*=(d\eta/d\gamma^p)_{\eta=\eta_0}$で，図-8(b)に示すように $\eta\sim\gamma$ 関係のヒステリシスループが$N$の増加とともにねてくることから導いた。$N\to\infty$ のとき，$A\to0$，$G^*\to\infty$となるように定数を決めればよい。

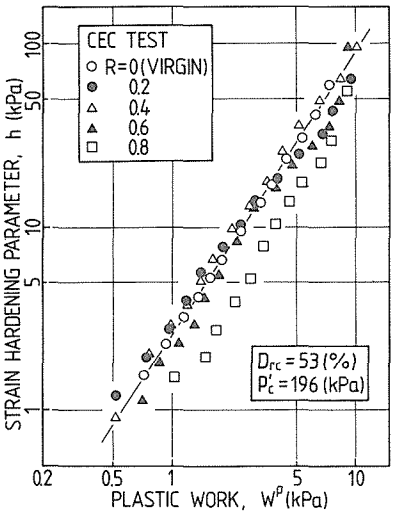



Fig. 11　Relationship between strain hardening parameter and plastic work for sand subjected to one cycle of stress history

(4)　繰返し応力条件下の塑性ポテンシャル関数 $g$ も，$h$ と同様に，単調応力載荷時の $g$ で表わすことができると仮定する。図-12 に示すように，1サイクルの繰返しせん断履歴を受けた後の $\eta\sim d\varepsilon_v^p/d\gamma^p$ 関係は，処女供試体のそれとほとんど変わらないことがうかがわれる。

以上のように，(1)〜(4)の仮定をおくことによって繰返し応力条件下の $f$，$g$，$h$ が決定されるので(8)式を用いて塑性ひずみ増分を計算できる。このモデルは，上述の仮定(1)および(3)より明らかなように，移動硬化則を導入し，硬化関数に繰返しせん断履歴の影響を取入れたものになっている。

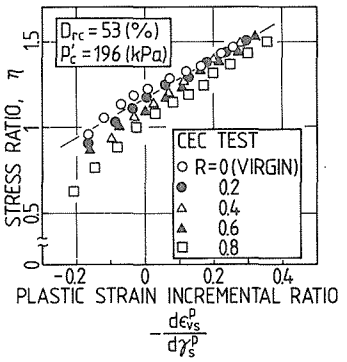



Fig. 12　Relationship between plastic strain incremental ratio and stress ratio for sand subjected to one cycle of stress history

### 6.3.　実測値と計算値の比較

図-8および9に計算値を実線で示した。計算に用いたパラメータは表-1および2に示すとおりである。また，弾性ひずみは繰返し応力載荷の影響を受けないと考え，(28)および(29)式で評価した。

Table　2　Model parameters for Toyoura sand in cyclic loading condition ($D_{rc}=53\%$, $p_c'=196$kPa)

| | COMP. | EXT. |
|---|---|---|
| $\alpha_0$ | 0 | |
| $\alpha_f$ | 0.5 | |
| $\xi_0$ | 5 | |
| c | -0.07 | -0.5 |
| d | 0.15 | 0.8 |

図-9を見ると，計算値は実測値の傾向をよく説明していると思われる。また，図-8からは繰返し応力載荷に伴うひずみの累積の様子，ヒステリシス現象が適確に表現されていることがわかる。しかし，繰返し応力振幅が大きいとき，計算値は発生するひずみをわずかながら過小評価する傾向にある。前節で述べているように，繰返し応力振幅が大きいとき，単調載荷時の$g$，$h$の適用にさらに検討を必要としている。

## 7. おわりに

弾塑性理論をもとにして，単調および繰返し応力載荷条件下の砂の応力～ひずみ関係のモデル化を試み，実測値と計算値の比較を示した。得られた結果をまとめると次のようである。

(1) 単調応力載荷条件下の砂の応力～ひずみ関係は，応力径路および拘束圧依存性を示す。

(2) 弾塑性理論をもとにして導かれた砂の応力～ひずみ関係式は，簡単な試験から求まるパラメータを用いて，砂の変形挙動の応力径路および拘束圧依存性を比較的よく表現できる。このとき，パラメータ$G^*$を拘束圧$p'$の関数（(30)式）とする考え方が有効であることがわかった。

(3) 繰返し応力載荷条件下の砂の変形挙動を調べるため，平均主応力を一定とした種々の繰返し試験を実施した。その結果，繰返し応力載荷条件下の砂の変形挙動は，ひずみの累積，ヒステリシス現象，応力除荷時における弾性領域の存在および応力除荷・再載荷時における新たな塑性ひずみの発生などによって特徴づけることができる。

(4) (3)の事実をもとにして，単調応力載荷時の応力～ひずみ関係式に移動硬化の考え方を導入し，硬化関数中のパラメータ$A$および$G^*$にせん断履歴の影響（(36)および(37)式）を取入れることによって繰返し応力載荷条件下の砂の応力～ひずみ関係のモデル化を行った。提案したモデルは実測値の傾向をかなりの精度で近似しうることがわかった。

さて、ここで得られた砂の応力～ひずみ関係式を砂の液状化問題に適用するためには，関係式を非排水条件におきかえればよい。しかし，砂の応力～ひずみ関係におよぼす過圧密履歴の影響など検討すべき問題が多い。また，(36)および(37)式に含まれるパラメータをいかに簡単な試験から求めるかも問題のひとつであろうと考えられる。今後の課題としたい。

最後に，本研究について種々御教示頂いた土木工学科北郷　繁教授に感謝の意を表します。

## 参考文献

1) Matsuoka, H.(1974)：Soils and Foundations, Vol.14, No.3, pp.13-24.
2) 三浦清一，土岐祥介，永田永昌（1981)：第16回土質工学研究発表会講演集，pp.445-449.
3) 土質工学会編（1979)：土質試験法，第2回改訂版
4) Miura, S. and Toki, S.（1982)：Soils and Foundations, Vol.22, No.1, pp.62-77.
5) Hill, R.（1950)：The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford Univ. Press, London, England.
6) 三浦清一，土岐祥介，佐々木史朗（1979)：土質工学会北海道支部技術報告集，第19号，pp.35-44.
7) Tatsuoka, F. and Ishihara, K.(1974)：Soils and Foundations, Vol.14, No.2, pp.63-76.
8) Frydman, S.(1976)：Can. Geotech. J., 13, pp.311-323.
9) 三浦清一，土岐祥介，成田凡史(1981)：第36回土木学会年次学術講演会概要集，pp.29-30.
10) Tatsuoka, F. et al.(1979)：Soils and Foundations, Vol.19, No.1, pp.39-54.
11) 土岐祥介，三浦清一，稲　直美（1982)：土質工学会北海道支部技術報告集，第22号，pp.33-42.
12) 柴田　徹，佐藤忠信，伊東亮治（1980)：第15回土質工学研究発表会講演集，pp.353-356.