HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	擬似接続幾何学モデルによる両眼視空間について
Author(s)	山崎, 敏正; 山ノ井, 髙洋; 河口, 至商
Citation	北海道大學工學部研究報告, 112, 95-102
Issue Date	1983-01-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41766
Type	departmental bulletin paper
File Information	112_95-102.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第112号（昭和58年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 112 (1983)

擬似接続幾何学モデルによる両眼視空間について

山崎　敏正　　山ノ井高洋　　河口　至商

（昭和57年9月30日受理）

On Binocular Visual Space as a Model of Affinely Connected Geometry

Toshimasa YAMAZAKI, Takahiro YAMANOI
and Michiaki KAWAGUCHI

(Received September 30, 1982)

Abstract

A concrete geometrical structure as the affinely connected space is given for the binocular visual space. On the basis of the supposition that the parallel alley and the horopter are paths in the visual space, an asymmetric connection under the restriction of teleparallelism is obtained by fitting a curve to the parallel alley data points. Solving the geodesics, which are derived from the above connection, under the restriction of Riemannian geometry by a numerical method and plotting the solution, the distance alley curve is drawn independently of the experimental data. The resulting curve is found to lie outside the parallel alley curve as before. This result substantiates the theory of non-Riemannian visual space. Furthermore by means of the curve fitting to horopter based on Ogle's data analysis, the connections under the regulation of two directions of the parallel alley and the horopter are determined. Regarding this result, a numerical experiment was made based on the hypothetical experiment.

1. 序　　論

視知覚現象を通じて我々は外界の物理空間を1つの心理的な空間として認識する。この空間を視空間といい，特に両眼によって認識される場合を両眼視空間と呼ぶ。

最も簡単な構造を持つ物理空間として暗室内における光点刺激のみの空間が考えられる。これに対応する両眼視空間について Luneburg [1] が初めて数学的に定式化した。彼は心理距離関数を定義し，Ames [2] の実験から視空間に自由運動性をみいだし，視空間が負の定曲率 Riemann 空間であることを示した。

この理論の背景となった心理実験としては Helmholtz [3] の horopter 実験(暗室内で光点を使い見かけ上前額に平行な直線を構成する)，Hillebrand [4] の parallel alley 実験(暗室内で光点を使い正中線に対して平行な2直線を構成する）と Blumenfeld [5] の distance alley 実験（暗室内で光点を使い正中線から等距離にある2直線を構成する）がある（**Fig.1**)。特に最遠端の固定光点を同一にとり alley 実験を行うと両者は一致しない（**Fig.1-(b)**)。この結果は，平行性と等距離性が異なること，従って視空間が非 Euclid 的であることを示している。Luneburg はこの実験結果

情報工学専攻　情報数理工学第一講座

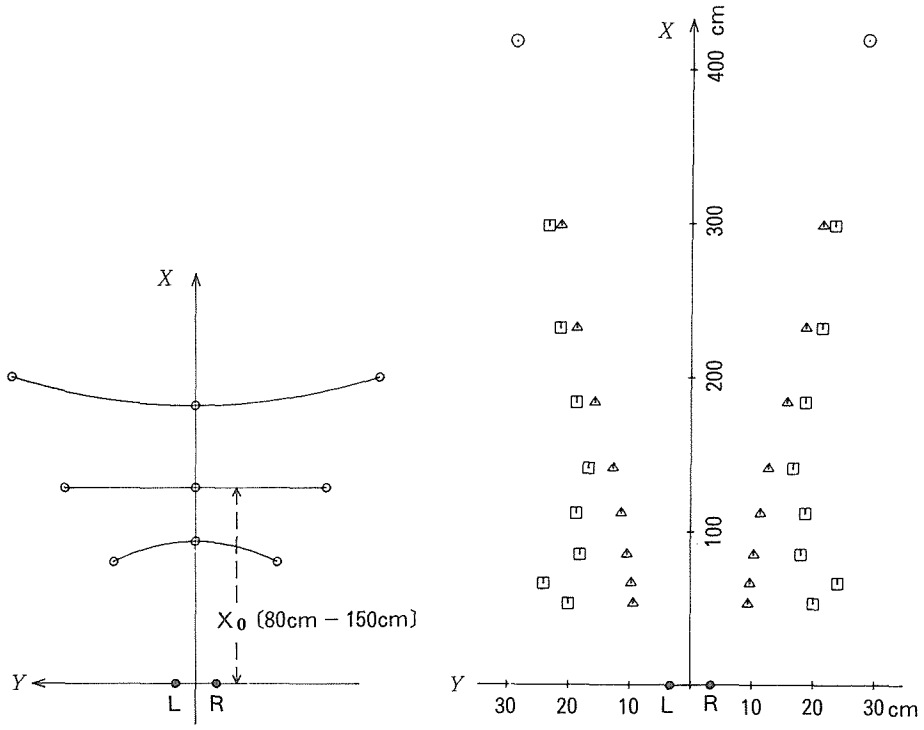


Fig.1 *Psychological experiment*

(a) Horopter
⊙ light stimulus
L : left eye, R : right eye

(b) Parallel alley and distance alley
⊙ standard stimulus
△ parallel alley
⊓ distance alley
L : left eye, R : right eye

に着目して，Riemann 空間の立場から両 alley を定式化し実験データから曲率の値を計算して理論の検証を行っている。

しかしながら「平行性」と「計量」とは本質的に独立な概念である。自平行曲線と極値曲線（後述）が一致する Riemann 空間においては自平行曲線としての parallel alley と極値曲線としての distance alley を明確に区別して定式化することは困難である。ここに Luneburg の理論における問題点がある。その後多くの研究者により alley 実験が繰り返され，主に曲率の符号が調べられた[6]。しかし曲率は負だけではなく正の場合も検出され，結果は必ずしも一貫性があったとはいえない。これに対して Shipley[7] は Luneburg とは異なる parallel alley の定式化を試みているが，同じく定曲率 Riemann 空間の範囲内での議論であったため無理があったように思われる。従って曲率と共に捩率を含む非 Riemann 空間の立場から両眼視空間をとらえる必要がある。こうして Foley[8] により非 Riemann 的視空間論の可能性を示唆する実験結果が報告され，更に新保ら[9][10] によりこの理論が提案された。

本論では視空間の平行性に着目し，非 Riemann 空間の 1 つである擬似接続空間の立場から両眼視空間をとらえる。parallel alley と horopter を path の方程式とみなし，1-parameter 曲線族で近似することにより非 Riemann 的視空間の具体的な数理モデルを与える。更に従来の心理実験データをもとに数値実験を行いこのモデルを実証する。

2. 擬似接続幾何学による視空間の特徴付け

新保らは物理空間と視空間の間の心理物理的認識過程を微視的構造模型とみなし，parallel alley と distance alley は物理空間から視空間への変換に際して，それぞれ線素の方向と位置が一意に規定されると考えた。こうして parallel alley 及び distance alley は遠隔平行性的制約（曲率テンソルが 0 ）及び Riemann 的制約（捩率テンソルが 0 ）の下での測地線であるとし，それらの理論曲線を次のように与えた。

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + L_j{}^i{}_k \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \quad \text{[註1]} \tag{1}$$

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \left\{ {i \atop j\ k} \right\} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{2}$$

ただし

$$L_j{}^i{}_k = \left\{ {i \atop j\ k} \right\} + S_{jk}^{\cdot\cdot i} - S_k^{\cdot i}{}_j + S^{\cdot i}{}_{jk} \tag{3a}$$

$$S_j^{\cdot i}{}_k = -S^{\cdot i}{}_{jk} = g^{ih}\, g_{kl}\, S_{jh}^{\cdot\cdot l} \tag{3b}$$

$$S_{jk}^{\cdot\cdot i} = \frac{1}{2}\left(L_j{}^i{}_k - L_k{}^i{}_j \right) \tag{3c}$$

とする。ここで g_{ij} は基本計量テンソル，$\left\{ {i \atop j\ k} \right\}$ は Christoffel の 3 添字記号，$S_{jk}^{\cdot\cdot i}$ は捩率テンソル，g^{ij} は $g^{ij}g_{jk} = \delta^i{}_k$ から決まる基本テンソルである。

Riemann 空間においてベクトル v^i が微小変位 dx^i に伴い Euclid 的に平行移動しているという事実はその共変微分

$$\delta v^i = dv^i + \left\{ {i \atop j\ k} \right\} v^k dx^j$$

が微小変位に伴い $\delta v^i = 0$ を満足していることに帰着される。従ってある曲線 $x^i = x^i(s)$ の接ベクトル dx^i/ds がその曲線に沿って平行移動している，すなわち自平行曲線であるとは

$$\frac{\delta}{ds}\left(\frac{dx^i}{ds}\right) = \frac{d^2x^i}{ds^2} + \left\{ {i \atop j\ k} \right\} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0$$

で表される。上式は変分法により非常に近い 2 点間を結ぶ最短線として導くこともでき極値曲線となっている。ここで共変微分 δv^i を導く際に重要なことは座標変換に伴う $\left\{ {i \atop j\ k} \right\}$ の変換則だけであり計量テンソル g_{ij} には本質的に無関係である。

一般の空間では計量テンソル g_{ij} から求まる $\left\{ {i \atop j\ k} \right\}$ 以外にも同様の変換則を満たす関数 $L_j{}^i{}_k(x)$ は無数に存在する。従ってこの $L_j{}^i{}_k$ を使って共変微分を定義しその空間に平行性の概念を導入することは可能である。ここで $L_j{}^i{}_k(x)$ は擬似接続係数と呼ばれ，$L_j{}^i{}_k$ が与えられた空間を擬似接続空間という。こうして擬似接続空間には極値曲線としての測地線は存在せず，自平行曲線としての測地線のみが存在する。その方程式は

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + L_j{}^i{}_k \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{4}$$

で表され path と呼ばれている[11]。

註1] 指標はすべて 1 ，2 をとる。また特にことわりのない限り，繰り返された指標に関しては Einstein の総和規約を採用する。

上記の観点から視空間を擬似接続空間の立場から考察する。従って視空間内の平行性を基準にして構成される parallel alley 及び horopter は path として把握される。特に実験データから関数近似によって parallel alley が

$$f(x^i) = 0 \tag{5}$$

と与えられれば(5)は(4)の解曲線になっているはずである。更に共変ベクトル $f_i (= \partial f/\partial x^i)$ の平行性を

$$\frac{\delta f_i}{ds} = \frac{df_i}{ds} - L_{ij}^{k} f_k \frac{dx^j}{ds} = 0 \tag{6}$$

で定義すれば，(4)，(5)，(6)から

$$L_{jk}^{i} f_i = f_{jk} \tag{7}$$

が得られる。ただし $f_{jk} = \partial^2 f/\partial x^j \partial x^k$，$s$ は擬似 parameter である。

ここで擬似接続空間における次の定理[12]を利用する。

定理 1　r 個の平行反変ベクトル場を許容する n 次元擬似接続空間は，接続係数を(A)対称，(B)非対称の場合について，それぞれ以下のように選ぶことによって得られる。

(A)対称接続

$\Gamma_{\sigma\tau}^{i}$ は任意 $(\sigma, \tau = r+1, \cdots, n)$。その他の接続係数については(8)によって与えられる。

$$\Gamma_{\alpha k}^{i} = -\delta_{\alpha}^{i} \frac{\partial \log \varphi_\alpha}{\partial x^k} \tag{8}$$

ただし φ_α は x^α, x^{r+1}, $\cdots$, x^n の関数である。

(B)非対称接続

$$L_{\alpha k}^{i} = -\delta_{\alpha}^{i} \frac{\partial \log \varphi_\alpha}{\partial x^k} \qquad (\alpha = 1, \cdots, r) \tag{9}$$

で与えられ，他の接続係数は任意である。ただし φ_α は x^i の任意関数である。

なお(8)，(9)において指標 α について和をとらないものとする。

上述の定理に実験状況をよりよく反映させるために，この視空間においては平行反変ベクトル場として parallel alley のみが与えられているものとみなす。こうして非対称接続をとれば(7)と(9)から 1 つの解として

$$L_{jk}^{i} = \delta_{j}^{i} \frac{f_{jk}}{f_j} \tag{10}$$

が得られる。ただし(10)において指標 j について和をとらないものとする。更に曲率テンソル

$$L_{jkl}^{i} = \frac{\partial L_{jl}^{i}}{\partial x^k} - \frac{\partial L_{jk}^{i}}{\partial x^l} + L_{jl}^{h} L_{hk}^{i} - L_{jk}^{h} L_{hl}^{i}$$

を計算するとすべての成分について 0 になる（遠隔平行性）。なお対称接続の場合は関数 $f(x^i)$ の連続性により棄却される。

3. parallel alley と distance alley の理論曲線

従来の alley 実験では一定の観察距離からの 1 対の曲線しか得られていない。しかしながら実際には両眼を含む水平面上の任意の点を通る parallel alley 曲線が存在する。

本章では Blumenfeld[5] の実験データに基づき parallel alley の曲線族を共焦点放物線族

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+A_1y^2)^{1/2}-\frac{1}{2}x-\rho_1 \tag{11a}$$

と共焦点有心円錐曲線族

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+A_2y^2)-\left[\frac{1}{4}(x^2+A_2y^2-c^2)^2+c^2x^2\right]^{1/2}-\rho_2 \tag{11b}$$

の2つの1-parameter曲線族で近似する。ただし,$(x,y)=(x^1,x^2)$, A_1, A_2 は y の誤差を考慮に入れた個人定数, $y=\pm c$ は焦点の座標, ρ_1, ρ_2 は各曲線族の parameter とする。

上記の曲線族を用いて以下の手順で parallel alley と distance alley の理論曲線を具体的に計算する。

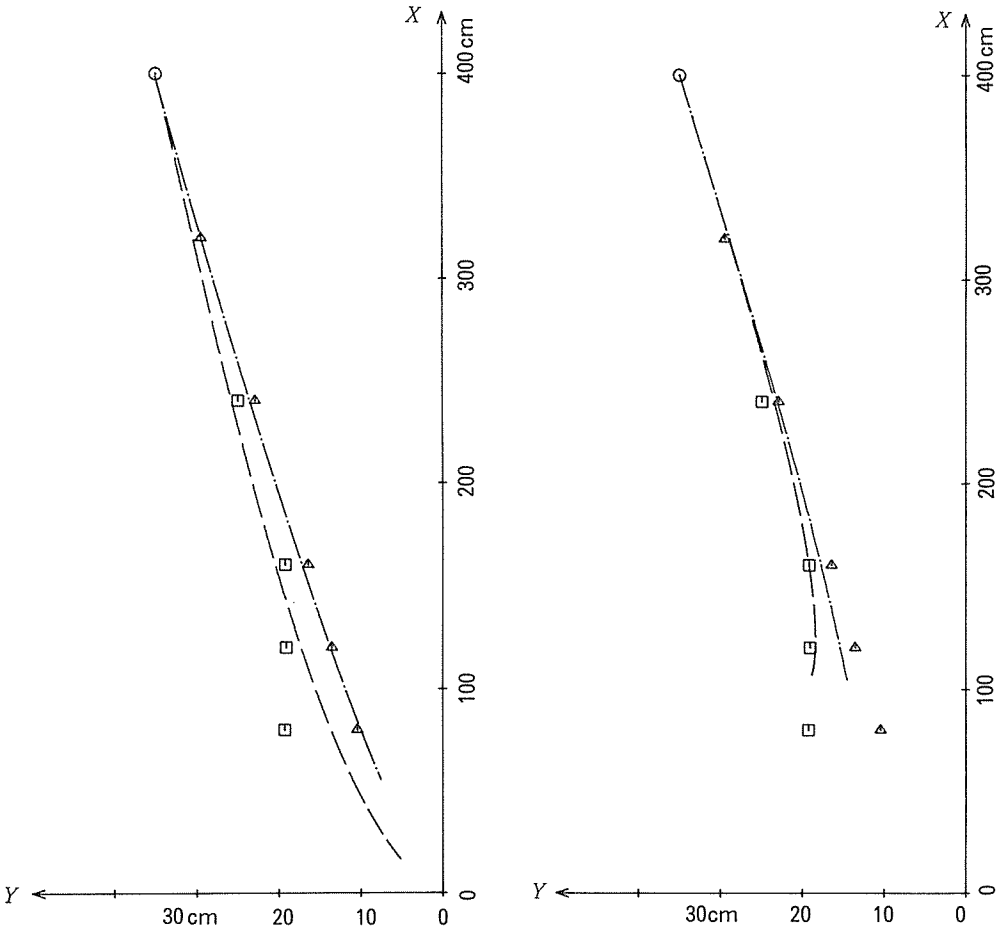


Fig.2 Numerical example

(a) by means of the family of confocal parabolas, alternate long and short dash line : parallel alley curve
broken line : distance alley curve
⊙standard stimulus
△parallel alley data point
□distance alley data point

(b) by means of the family of confocal central conics, alternate long and short dash line : parallel alley curve
broken line : distance alley curve
⊙standard stimulus
△parallel alley data point
□distance alley data point

［1］ (11a), (11b) に含まれている定数とparameterを Deming 法によって決める。

［2］ (10)から非対称接続係数を計算する。

［3］ (3a) を逆に解き, (10), (3b), (3c) から Christoffel の3添字記号を計算する。なお Eisenhart の主張[13]に基づき, 計量テンソル g_{ij} のかわりに

$$b_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma_h{}^h_i}{\partial x^j}+\frac{\partial \Gamma_h{}^h_j}{\partial x^i}\right)-\frac{\partial \Gamma_i{}^h_j}{\partial x^h}+\Gamma_i{}^h_\alpha \Gamma_h{}^\alpha_j-\Gamma_i{}^h_j \Gamma_h{}^\alpha_\alpha$$

を採用した。ただし,

$$\Gamma_j{}^i_k=\frac{1}{2}\left(L_j{}^i_k+L_k{}^i_j\right)$$

とする。

［4］ path の方程式(4)（parallel alley）と測地線の方程式(2)（distance alley）を Runge-Kutta-Gill 法によって解く。

［4］で求めた数値解を plot させたものが **Fig.2-(a)**（共焦点放物線族）と **Fig.2-(b)**（共焦点有心円錐曲線族）である。

4. parallel alley と horopter によって規定される視空間

horopter は視空間内における左右方向の平行性を基準にして構成される (**Fig.1-(a)**)。horopter の1-parameter 曲線族は Ogle の理論に基づき

$$h(x, y)=h^*(x, y)-b$$

で与えられる。ただし $h^*(x, y)$ は

$$A=1+\mu(y^2-a^2)/2ax,\ B=-\{(1-\kappa/2a)(y^2-a^2)/x+x-a\mu\}$$
$$C=a\kappa-a^2-a\mu/2\quad,\ D=-a\kappa x/2$$

としたときの t に関する3次方程式

$$At^3+Bt^2+Ct+D=0 \tag{12}$$

の正の実根とする。これは以下に示す数値実験的考察に基づいている。

Ogle[14]は正中線に関して対称な horopter 曲線を固定点と両眼を通る円錐曲線族

$$x^2[1+(a/2b)H]+y^2[1-(b/2a)H]$$
$$-x[(b^2-a^2)/b+aH]-a^2+(ab/2)H=0 \tag{13}$$

であると考えた。ただし H は固定点における horopter 曲線の曲率, $2a$ は瞳孔間の距離, b は観察距離（被験者から固定点までの距離）である。更に Ogle ら[15]は自ら horopter 実験を行い, 各の観察距離（20.2cm, 40.4cm, 75.6cm, 609.6cm）に対する H を求めた。縦軸にその H をとり, 横軸に観察距離の逆数をとって plot させたものが **Fig.3** である。

この結果から我々は次のような仮定を設ける。

$$H=\kappa/b+\mu \tag{14}$$

ただし κ, μ は定数である。(14)を(13)に代入して得られる b についての3次方程式が(12)である。(12)については, 半平面（$x>0$）上で計算機により解の探索を行った結果, 正の実根を1つだけもつことがわかった。なお(14)については Helmholtz[3] とZajaczkowska[16]の horopter 実験データからもその妥当性が示された。

ここで parallel alley と horopter の2つの方向の平行性が同時に規定される実験的状況を考える。これは次のような仮想実験により可能となる。

［a］ horopter 実験を行う。

［b］ alley 実験を行う。その際に可動光点を［a］で得られた horopter 曲線上で動かす。

更に我々は以下の定理[12]を利用する。

定理 2　n 次元非対称接続空間で n 個のベクトル場 $\lambda^i{}_{(\alpha)}$ が平行反変ベクトル場であるための必要十分条件は接続係数が n 重系を用いて次式で表されることである。

$$\tilde{L}_j{}^i{}_k = -\lambda_j^{(\alpha)} \frac{\partial \lambda^i_{(\alpha)}}{\partial x^k} \qquad (15)$$

これまでの議論から共変ベクトル場 $\lambda_i{}^{(\alpha)}$ は

$$\lambda_i{}^{(1)} = f_i,\ \lambda_i{}^{(2)} = h_i \qquad (16)$$

とおいて決まる。ただし $h_i = \partial h/\partial x^i$ とする。(16)を(15)に代入すると $f(x, y)$, $h(x, y)$ の連続性から $\tilde{L}_j{}^i{}_k$ は対称接続係数となる。従って捩率テンソル $\tilde{S}_j{}^i{}_k$ は常に 0 となり，(3a) から

$$\tilde{L}_j{}^i{}_k = \left\{ {\tilde{i} \atop j\ k} \right\}$$

が成り立つ。すなわち上記の仮想実験で parallel alley と distance alley が一致するという予想が立てられる。

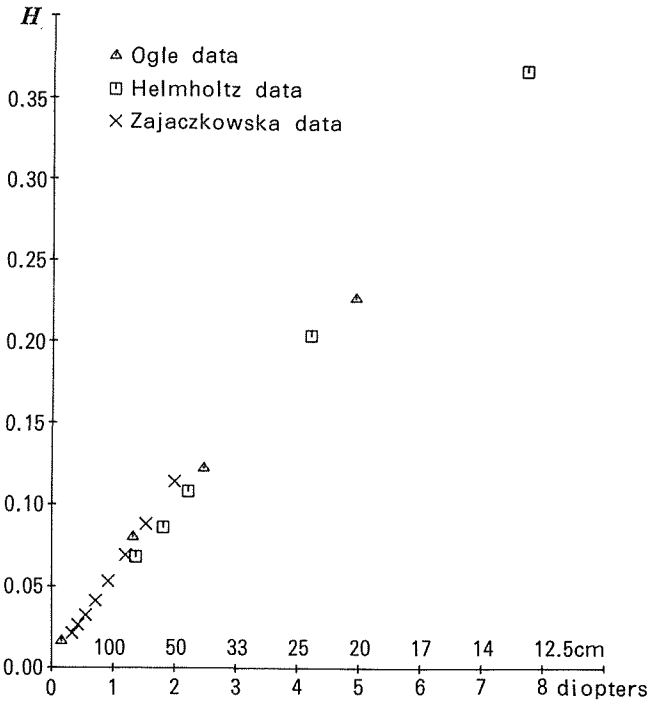


Fig.3　Relationship between H and observation distance

以上の考察に基づいて，接続係数に $\tilde{L}_j{}^i{}_k$ をもつ測地線の方程式を Runge-Kutta-Gill 法によって解き，その数値解を plot させた (**Fig.4**)。なお $\tilde{L}_j{}^i{}_k$ は具体的には

$$\tilde{L}_j{}^i{}_k = \frac{(-1)^i}{\Delta}\left(f_j h_{\langle i\rangle k} - h_j f_{\langle i\rangle k}\right) - \frac{(-1)^i \Delta_k}{\Delta^2}\left(f_j h_{\langle i\rangle} - h_j f_{\langle i\rangle}\right)$$

で与えられる。ただし

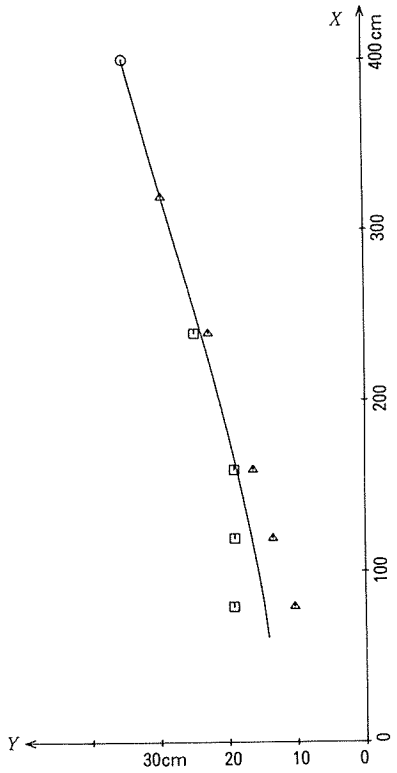
$$\Delta = (-1)^l f_{\langle l\rangle} h_l$$
$$\Delta_k = (-1)^l f_{\langle l\rangle} h_{kl} - (-1)^l h_{\langle l\rangle} f_{kl}$$

とし，$\langle i\rangle = 3 - i$ と表す。また指標 i について和をとらないものとする。

結果として従来の両 alley 曲線の中間に位置する曲線が得られた。

5. 結　　論

parallel alley の曲線近似により視空間の非対称接続係数が具体的な形で導入された。これを基に distance alley の理論曲線を求めた所，従来の alley 実験データに酷似した結果が得られ，非 Riemann 的視空間論の妥当性が示された。また，Ogle の理論により horopter の曲線近似を行い，parallel alley と horopter の両者の方向によって規定される視空間の接続係数を導出した。これ



については仮想実験を設けて数値実験的考察を行った。しかし，この結果に対する評価は仮想実験の実現を待たなければならない。

今後の課題として

(1) 観察距離をかえた alley 実験，並びに 4 の仮想実験の実現化

(2) 3 次元視空間論の構成。すなわち両 alley，horopter の空間曲線としての把握，並びにこれに伴う心理実験の実現化

(3) 視空間の計量的性質についての再検討

などが挙げられる。

この研究にあたって多くの有益な御助言を賜った本学新保勝教授，伊達惇教授，並びに佐藤義治講師に深く感謝致します。

Fig.4 Numerical experiment based on hypothetical one (under the restriction of two parallelism)
⊙ standard stimulus
△ parallel alley
□ distance alley

参 考 文 献

1) Luneburg, R. K.: *Mathematical Analysis of Binocular Vision.* Princeton Univ. Press, 1947: *Courant Anniversary Volume,* New York Univ. Press, New York, 1948, p. 215: *J. Opt. Soc. Am.*,**40** (1950), p. 627.
2) Ames, A., Jr.: *Amer. J. Psychol.*, **59** (1946), p. 333.
3) Helmholtz, H. V.: *Treatise on Psychological Optics,* J. P. C. Southall, Editor (Optical Society of America, 1925), p. 482.
4) Hillebrand, F.: *Denkschr. Akad. Wiss. Wien, Math. -Nat. Kl.*, **72** (1902), p. 255.
5) Blumenfeld, W.: *Zeits. f. Physiol. d. Sinnesorgane,* **65** (1913), p. 241.
6) 石井克己：九大文学部40周年記念論文集 (1966), p. 235.
7) Shipley, T.: *J. Opt. Soc. Am.*, **47** (1957), p. 795: **ibid.**, p. 804.
8) Foley, J. M.: *Vision Res.*, **13** (1972), p. 323.
9) 新保勝，山ノ井高洋：北大工学部研究報告，**87** (1978), p. 169.
10) Shimbo, M. *et al.*: *Proc. Int. Conf. on Cybern. Soc.*, '78, **I,** (1978), p. 394.
11) 矢野健太郎：接続の幾何学，数学ライブラリー **4**，森北出版，1968.
12) Eisenhart, L. P.: *Non-Riemannian Geometry.* Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, New York, 8, 1927.
13) Eisenhart, L. P.: *Ann. Math.*, **24** (1923), p. 367.
14) Ogle, K. N.: *J. Opt. Soc. Am.*, **22** (1932), p. 665.
15) Ogle, K. N.: *Researches in Binocular Vision.* W. B. Saunders Company, Philadelphia & London, 1950.
16) Zajaczkowska, A.: *J. Opt. Soc. Am.*, **46** (1956), p. 514.