



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	三主応力下における異方性砂の弾塑性モデル
Author(s)	三浦, 清一; 土岐, 祥介; 三浦, 均也
Citation	北海道大学工学部研究報告, 116, 1-13
Issue Date	1983-10-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41815
Type	departmental bulletin paper
File Information	116_1-14.pdf



三主応力下における異方性砂の弾塑性モデル

三浦 清一 土岐 祥介 三浦 均也

(昭和 58 年 6 月 30 日受理)

An Elastoplastic Model for Anisotropic Sands under Different Three Principal Stresses

Seiichi MIURA, Shosuke TOKI and Kinya MIURA

(Received June 30, 1983)

Abstract

A three-dimensional stress-strain model for sands having the anisotropic fabrics is derived with the help of the concept of non-associated flow rule on elasto-plasticity. Yield function, plastic potential function and hardening function which are required to frame the theory for sand are formulated by investigating the relationship between plastic strain incremental ratio and stress ratio and the plastic strain work during shear. Parameters included in the proposed elastoplastic work hardening model can be determined easily from the conventional triaxial compression and extension tests and the isotropic consolidation-swelling test.

Comparison of the predicted and measured stress-strain relationships showed that the proposed theory is capable of simulating the anisotropic deformability obtained by the true triaxial tests on two different saturated sands. It was also clarified that the influence of inherent anisotropy on the deformation characteristics of sand may be evaluated from the comparison of the predicted isotropic and anisotropic deformability of sand in any stress system.

1. ま え が き

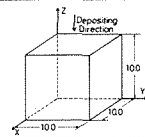
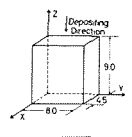
近年、土のような粒状材料に特有なダイレイタンスーなどの現象を予測できる応力-ひずみ関係式が提案されてきている。しかし、これらの関係式は土の等方性及び軸対称三軸条件などの限定された応力条件を前提として誘導されているものが多い。実際の地盤では、堆積過程などにおいて形成される異方的な粒子配列構造を反映して、その力学特性は強い異方性を示すことが認められている^{1), 2)}。また、平面ひずみ条件で代表されるように相異なる三主応力状態にある場合が普通である。したがって、このような事実を無視して土の力学を議論することは許されず、一般応力条件下にある異方性砂の応力-ひずみ関係式を確立することが急務であると考えられる。

本報告では、これまで軸対称三軸圧縮・伸張条件について提案している砂の弾塑性応力-ひずみ関係式^{3), 4)}を異方的な堆積構造を有し、かつ相異なる三主応力条件にある場合に適用できるよ
土木工学科 基礎地盤工学講座

うに拡張した。誘導した応力-ひずみ関係式は、Yamada ら⁵⁾が報告している富士川砂と筆者らが行なった豊浦砂について得られた三主応力制御試験の結果を良く説明できることが示されている。さらに関係式から予測される等方性砂と異方性砂の変形特性を比較検討することにより、応力系の相違及び構造異方性が砂の応力-ひずみ関係に及ぼす影響を明らかにしている。

なお、三主応力制御試験は表-1に比較して示されているものである。両試験では、砂の物理的性質や相対密度 D_r 、圧密圧力 p_c 、供試体作製法（堆積構造）、載荷システムなどに相違がある。後で示すように、このような違いによって両者の変形挙動に差が認められるが、砂の堆積時に形成される粒子配列構造を反映して両者の力学特性に強い異方性が見られる。特に筆者らが用いた多重ふるい落下法（MSP）⁶⁾ で作製した供試体の異方的な力学特性は、自然堆積砂地盤のそれと非常に類似していることが確認されている²⁾。

Table 1 Summary of true triaxial test condition, sample preparation method and physical properties of sands used by Yamada and Ishihara⁵⁾ and present authors

	True triaxial tests by Yamada and Ishihara (1979) ⁵⁾	True triaxial tests by present authors
Specimen dimension (cm)		
Loading system	X } Y } Pressure bag Z }	X-Hydraulic pressure Y-Pressure bag Z-Rigid platen
Sand used	Fuji River Sand (F-sand)	Toyoura Sand (T-sand)
Preparation method	Pluviation and tapping under water	Multiple sieving pluviation
p_c (kPa)	98	196
D_r (%)	34	53
G_z	2.73	2.65
e_{max}, e_{min}	1.03, 0.48	0.992, 0.625
D_{50} (mm)	0.40	0.21
U_c	2.14	1.36

2. 応力・ひずみの表示と応力経路

本研究では、図-1に示すように、重力の作用を受けて堆積した砂粒子の異方配列構造を有する砂要素を考える。直交座標系は Z 軸が砂の堆積方向（重力方向）に一致するように設定し、それ

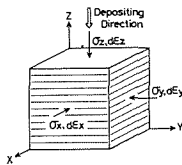


Fig. 1 Orientation of anisotropic sand element relative to Cartesian coordinate system and definition of principal stress and strain

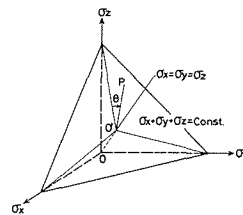


Fig. 2 Representation of octahedral stress system in principal stress space

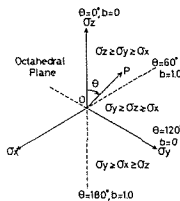


Fig. 3 Definition of parameter θ and stress paths employed in this study

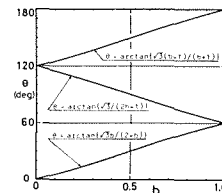


Fig. 4 Parameter θ vs. b -value relationship in any stress system

に対応する主応力，主ひずみ増分は圧縮を正として定義している。ただし，応力はすべて有効応力を表わしている。このように考える理由は，堆積中に重力の影響を受けるため，棒状または扁平状を呈している砂粒子は，より安定に，長軸が水平方向に卓越配列し水平面ではランダムな粒子配列となっていると想定されるからである。このような堆積条件では，その粒子配列は鉛直軸（ Z 軸）を対称軸とし，水平面においては等方的な二軸直交異方性体としてモデル化されよう。

図-2 に示すように，主応力空間における正八面体面を考え，それに垂直・平行な応力成分はそれぞれ平均主応力 p ，せん断応力 q で，次のように定義される。

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (1) \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

なお， $\overline{OO'}$ ， $\overline{O'P}$ はそれぞれ $\sqrt{3}p$ ， $\sqrt{\frac{2}{3}}q$ である。主ひずみ増分についても同様に，体積ひずみ増分 $d\epsilon_v$ ，せん断ひずみ増分 $d\gamma$ を次のように定義する。

$$d\epsilon_v = d\epsilon_x + d\epsilon_y + d\epsilon_z \quad (3)$$

$$d\gamma = \frac{\sqrt{2}}{3}\{(d\epsilon_x - d\epsilon_y)^2 + (d\epsilon_y - d\epsilon_z)^2 + (d\epsilon_z - d\epsilon_x)^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

正八面体面上のせん断応力の方向は，図-3 に示されるように σ_z 軸から時計回り方向に取った θ で規定し，次式で表わされる。

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}(\sigma_y - \sigma_x)}{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y} \quad (5)$$

さらに，中間主応力の相対的な大きさは次式のパラメータ b を用いて表わすことにする。

$$b = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (6)$$

ただし $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ はそれぞれ最大，中間，最小主応力である。 b と θ の関係は，図-4 に示すようであるが， b 値は主応力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ の大きさの順序にはよらないので，応力系を規定するパラメータであるといえよう。

本研究では，Yamada ら⁵⁾と同様所定の圧密圧力 p_c で等方圧密し， p_c を一定にしたまま，図-3 に示されるように原点からの放射状直線（ θ = 一定 or b = 一定）となる応力経路に沿ってせん断応力 q が単調増加する応力条件で試験を行なっている。ここで供試体は，前述したように Z 軸を対称軸とする二軸直交異方性体とみなされるから，図-3 に示した正八面体面上の右半分（ $\theta = 0^\circ \sim 180^\circ$ ）の応力条件（ $\sigma_y \geq \sigma_x$ ）について調べるだけでよい。したがって，富士川砂では 15° ，豊浦砂では 30° の間隔で $\theta = 0^\circ \sim 180^\circ$ の範囲の変形特性が検討されている。

3. 弾塑性応力-ひずみ関係式の誘導

弾・塑性理論に従うと，砂が降伏し塑性変形が進行していく時，ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}$ は弾性成分 $d\epsilon_{ij}^e$ と塑性成分 $d\epsilon_{ij}^p$ の和で表わされる。

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (7)$$

ただし，本研究で対象にしているように平均主応力が一定の条件でせん断が進行する場合は，生じるひずみはその塑性成分が卓越し，弾性成分を無視できる。したがって，せん断中に生じるひずみ増分にはそのまま塑性理論による流れ則⁷⁾を適用できよう。

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^p = h \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \cdot df \quad (8)$$

ここで、 f, g, h はそれぞれ降伏関数、塑性ポテンシャル関数、硬化関数である。

以下に、砂のような粒状体に対するこれらの関数の定式化について説明する。

3.1 降伏関数と塑性ポテンシャル関数

ある応力状態で降伏している砂のような粒状体に、さらに負荷を与えると硬化を生じながら塑性変形が進行する。一般にこのような塑性変形を評価するためには、あるひずみ履歴を有する砂に新たな降伏を生じせしめる応力の組合せが主応力空間において形成する一つの閉曲面(降伏面)を規定する関数、すなわち降伏関数を設定する必要がある。ここで、連続な負荷を受ける砂の塑性変形を微小な降伏の連続とみなすことができるとすれば、降伏面を実験的に決定することができる。たとえば、Poorooshasb ら⁸⁾、Tatsuoka ら⁹⁾は三軸圧縮条件のもとで Stress Probe 試験を実施して、降伏面は三軸平面において原点を通る直線で近似できることを示している。ここで、砂がせん断応力の反転を伴うような負荷を受ける場合は、Bauschinger 効果による降伏面の移動が認められ⁴⁾、移動硬化則の適用が要求されるが、本報告ではせん断応力が正八面体面上で定方向に単調増加する場合を対象にしているので、等方硬化則の立場で議論することが許されると思われる。よって、降伏関数は一般応力条件下においても従来通り⁴⁾次式によって規定されるとする。

$$f = \eta (= q/p) \quad (9)$$

塑性ひずみ増分は、その時の応力状態やひずみ履歴にも依存する。したがって、塑性主ひずみ増分の方法は主応力空間内に設定される塑性ポテンシャル面に垂直な方向にあるとして規定することができる。ところが、式(9)で降伏面を定義する場合において、塑性ポテンシャル関数と降伏関数が同一であるとする関連した流れ則を適用すると、砂の場合にみられるせん断初期に生じる負のダイレイタンス(体積収縮)を表現することが不可能である。したがって砂のような土材料においては、非関連流れ則に基づいて議論することが必要である。

Roscoe ら¹⁰⁾は、平衡状態にある土要素に外部からなされる仕事量と内部で消費される仕事量との釣り合い式と、限界状態における土要素の正八面体面上の摩擦則から導かれる次式のエネルギー消散式に基づいて、粘性土に対する一つの弾塑性モデルを提案している。

$$p \cdot d\epsilon_v + q \cdot d\gamma = M \cdot p \cdot d\gamma \quad (10)$$

$$\text{or } (d\epsilon_v/d\gamma) = M - \eta \quad (10)'$$

ここで M は、限界状態における応力比 η である。

図-5 (a), (b) は、富士川砂と豊浦砂についての応力比-ひずみ増分比関係を示している。両試験において直線関係が認められ、(10)' 式が砂についても成立する可能性を示唆しているが、その直線の勾配及び切片は θ とともに変化している。その理由については次のようなことが考えられる。第一に、Roscoe ら¹⁰⁾は、正八面体面上において摩擦則を適用しているが、実際には θ の

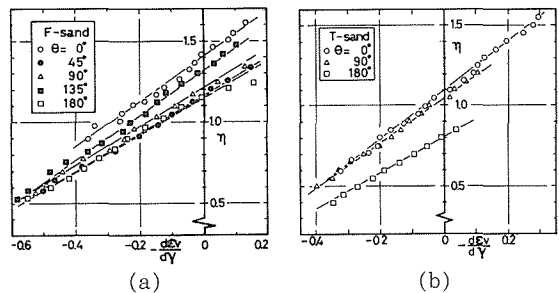


Fig. 5 Relationships between plastic strain incremental ratio and stress ratio in any stress paths; (a) F-sand (Test data from Yamada and Ishihara⁵⁾, (b) T-sand

変化に伴ない摩擦則の成立する面が変わっていると推定される。第二に、主応力、主ひずみ増分空間における正八面体面において、せん断応力とせん断ひずみ増分の方向が必ずしも一致していないことが考えられる。したがって、ここでは異方性砂に対する実験事実に基づいて、エネルギー消散式を次式のように与え、以下の議論を進めることとする。

$$p \cdot d\varepsilon_v + Cd \cdot q \cdot d\gamma = Cd \cdot m \cdot p \cdot d\gamma \quad (11)$$

$$\text{or } (d\varepsilon_v/d\gamma) = Cd(m - \eta)$$

ここで Cd, m は、それぞれ図-5 に示す直線の勾配の逆数、切片値である。パラメータ Cd と m の応力系及び構造異方性の依存性を調べてみると、図-6 (a), (b) に示されているように両パラメータとも b 値すなわち応力系にのみ依存しているようである。また、 Cd と m の積に着目すると、 $Cd \cdot m$ は b 値にかかわらず一定値を示していることが注目される。しかし、応力比一ひずみ増分関係を支配する Cd, m それぞれの値は、図-6 にみられるように b に対して直接定式化することは困難である。ここで Matsuoka¹¹⁾ の提案している SMP 上における最大体積圧縮点での垂直・せん断応力比 $R(=(\tau/\sigma_N) \text{ at } d\varepsilon_v=0)$ と m との関係性を求めると、次式が得られる。

$$R = (\tau/\sigma_N)_{\text{at } d\varepsilon_v=0} = \left(\frac{J_1 \cdot J_2 - 9J_3}{9J_3} \right)^{\frac{1}{2}}_{\text{at } d\varepsilon_v=0} = \left(\frac{6m^2 - 2m^3 \cos 3\theta}{27 - 9m^2 + 2m^3 \cos 3\theta} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

ただし、 J_1, J_2, J_3 はそれぞれ応力の第一、第二、第三不変量である。図-7 に示されているように、 R と b 値の関係は、豊浦砂の $\theta=60^\circ$ と 90° のデータが若干乱れているが、直線関係にある。

$$R = (1-b)R_C + b \cdot R_E \quad (13)$$

ここで R_C, R_E はそれぞれ三軸圧縮 ($\theta=0^\circ$)、三軸伸張 ($\theta=180^\circ$) 条件に対応する R の値である。

以上の実験事実から、一般応力条件下における応力比一ひずみ増分比関係 (式 (11)') が決定され、塑性ひずみ増分ベクトルの方向を規定する塑性ポテンシャル関数を誘導することができる。すなわち、塑性ポテンシャル面と塑性ひずみ増分ベクトルとの直交則 ($dq/dp = -d\varepsilon_v/d\gamma$) を適用し、式 (11)' を積分すると、次式の塑性ポテンシャル関数 g を得る。

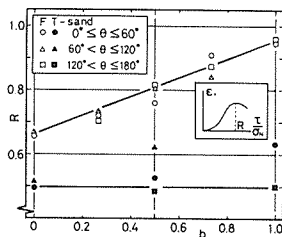


Fig. 7 Relationships between stress ratio R and b -value in F - and T -sand (Test data of F -sand from Yamada and Ishihara⁵⁾)

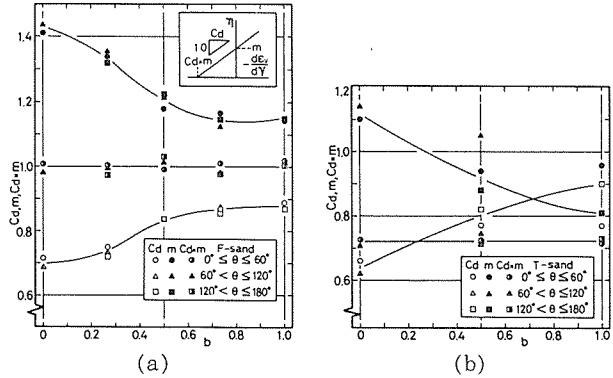


Fig. 6 Independence of $Cd \cdot m$ on b -value; (a) F -sand (Test data from Yamada and Ishihara⁵⁾), (b) T -sand

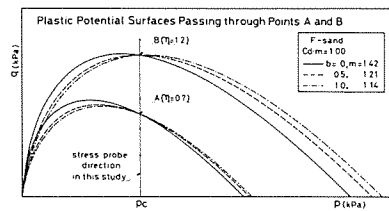


Fig. 8 Derived plastic potential function for F -sand in octahedral stress space (Test data from Yamada and Ishihara⁵⁾)

$$g = \eta + \frac{Cd \cdot m}{1 - Cd} (1 - p^{Cd-1}) \quad (Cd \neq 1) \quad (14)$$

$$g = \eta + m \ln p \quad (Cd = 1) \quad (15)$$

図-8 は、富士川砂の塑性ポテンシャル関数 g の応力系依存性を $q-p$ 面上に示している。

3.2 塑性ひずみ仕事と硬化関数

一般に、降伏・硬化を示す粒状体に対してなされる塑性仕事に着目すると、降伏面はその応力状態までになされた塑性仕事を規定するある面に等価であり、さらにひずみ硬化の程度を表わす硬化パラメータすなわち硬化関数は、塑性仕事の関数として定式化できる。ここでは、砂の圧密・せん断によってなされる塑性ひずみ仕事を明らかにするとともに、この塑性仕事は一般応力条件下にある異方性砂の硬化関数の設定において、重要な役割を演じていることを示す。

3.2.1 圧密及びせん断によってなされる塑性仕事

砂要素が塑性変形中なされる仕事について説明する。等方圧密・膨張試験における砂の変形挙動は、図-9 に示すように ϵ_v と p が両対数紙上で直線となる関係にある。弾塑性論的には、載荷時に弾性、塑性の両ひずみが生じ、一方除荷・再載荷時には弾性ひずみのみが生じると考えることができるから、両ひずみ成分を分離することによって、圧密に伴う弾性ひずみ増分 $d\epsilon_v^e$ 、塑性ひずみ増分 $d\epsilon_v^p$ はそれぞれ次式のように表わされる。

$$d\epsilon_v^e = k \cdot n \left(\frac{p_0}{p_k} \right)^l \cdot \left(\frac{p}{p_0} \right)^n \cdot \frac{dp}{p} \quad (16), \quad d\epsilon_v^p = k(l-n) \cdot \left(\frac{p}{p_k} \right)^l \frac{dp}{p} \quad (17)$$

ここで、 l, n はそれぞれ図-9 に示した載荷、除荷直線の勾配、 k は圧密圧力 $p = p_k$ における体積ひずみ、 p_0 は先行圧密圧力である。

式(17)の関係から、等方圧密時になされる塑性ひずみ仕事増分 dW_I^p は次式となる。

$$dW_I^p = \sigma_x \cdot d\epsilon_x^p + \sigma_y \cdot d\epsilon_y^p + \sigma_z \cdot d\epsilon_z^p = p \cdot d\epsilon_v^p = k(l-n) \left(\frac{p}{p_k} \right)^l dp \quad (18)$$

したがって、せん断開始時 ($p = p_c$) までの等方圧密によってなされた塑性ひずみ仕事 W_I^p は次式によって算定できる。

$$W_I^p = \int_0^{p_c} dW_I^p = \frac{l-n}{l+1} k \left(\frac{p_c}{p_k} \right)^l \cdot p_c \quad (19)$$

一方、せん断過程での塑性ひずみ仕事増分は、3.1 での説明及び式(11)から次式となる。

$$dW^p = p \cdot d\epsilon_v + Cd \cdot q \cdot dr = Cd \cdot m \cdot p \cdot dr \quad (20)$$

したがって、せん断過程でなされる塑性仕事はせん断変形に基づいて規定することができる。

本研究では、砂のような粒状体の降伏・硬化現象はせん断変形によって定式化されており、その意味で硬化パラメータがせん断ひずみとなるせん断ひずみ硬化説に基づいている。

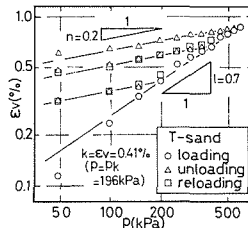


Fig. 9 Relationship between volumetric strain and effective mean principal stress of T-sand in isotropic consolidation-swelling test

3.2.2 一般応力条件下における異方性砂の硬化関数

式 (9), (14) (または (15)) を式 (8) に代入して得られる主ひずみ増分をせん断ひずみ増分の定義式 (4) に代入すると, せん断過程での硬化関数 h は次式の関係で与えられる。

$$h = p \cdot (d\gamma/d\eta) \quad (21)$$

この硬化関数 h は, 圧密圧力の大きさやせん断応力の方向にかかわらず, 塑性ひずみ仕事の一義的な関数として次式で表わされることが実験的に示されている¹²⁾。

$$h = A(W^p)^B \quad (22)$$

ここで, A, B は定数である。図-10 は, せん断過程における h は W^p の巾関数となっていることを示しており, 式 (22) が妥当であることを示唆している。ここで, 両者の関係は θ に依存しており, 式 (22) の A, B はそれぞれ θ とともに変化し一定値とはなっていない。しかし, A, B は図-11 に示されているように θ に対して一義的な関係にあることから, 硬化関数 h は応力系にはよらず, 砂の構造異方性に強く依存するということが明らかである。

このような実験事実は, 構造異方性による砂の異方的な変形特性を説明できる硬化関数を見出す必要があることを示している。ここでは, 複合滑動面の概念¹³⁾に基づいて, ひずみの異方的な発生特性を考慮できるように式 (22) の硬化関数を拡張する。図-12 は, 各主ひずみ増分 $d\epsilon_i$ を3つの二次元応力系に分割して議論する際の考え方を示している。各主ひずみ増分 $d\epsilon_i$ は, それぞれが属する2つの二次元応力系で生じる主ひずみ増分の和として表わせる(複合滑動面の概念)とする。

$$d\epsilon_i = d\epsilon_{iij} \text{ (or } d\epsilon_{iji} \text{)} + d\epsilon_{iki} \text{ (or } d\epsilon_{ik} \text{)} \quad (23)$$

ここで, サフィックス i, j, k はテンソルの指標ではなく, 重複せずに x, y, z のうち1つを示す。右辺における第1サフィックスは左辺に示す主ひずみ増分の方向を, 第2, 3のサフィックスは分割された主ひずみ増分が属する二次元応力系を大, 小の主応力の順で示している。式 (23) は, 主ひずみ増分 $d\epsilon_i$ が $i-j$ 応力系で発生する主ひずみ増分 ($\sigma_i \geq \sigma_j$ のとき $d\epsilon_{iij}$, $\sigma_j > \sigma_i$ のとき

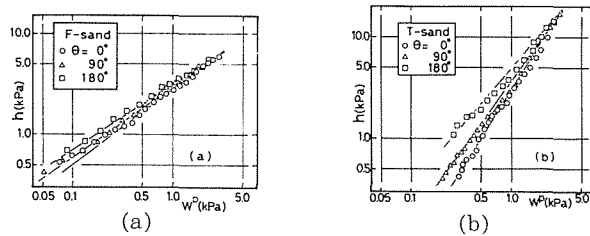


Fig. 10 Relationships between hardening function (strain hardening parameter) and plastic strain work during shear in any stress paths; (a) F -sand (Test data from Yamada and Ishihara⁵⁾), (b) T -sand

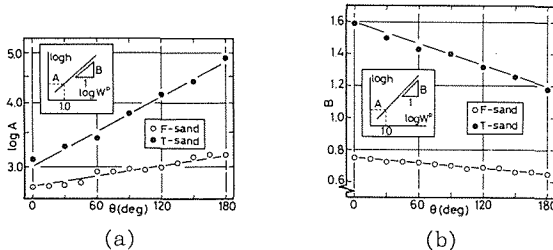


Fig. 11 Changes in parameters A and B due to the difference of stress system; (a) A vs. θ , (b) B vs. θ (Test data of F -sand from Yamada and Ishihara⁵⁾)

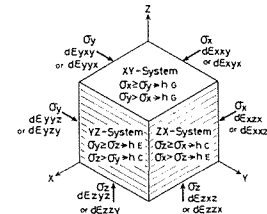


Fig. 12 Three two-dimensional stress and strain increment system

$d\epsilon_{iji}$) と $k-i$ 応力系で発生する主ひずみ増分 ($\sigma_k \geq \sigma_i$ のとき $d\epsilon_{iki}$, $\sigma_i > \sigma_k$ のとき $d\epsilon_{iik}$) との和として算出できることを示している。

一般応力条件下においては、各二次元応力系で発生する主ひずみ増分はその応力系における主応力の大小関係に対応した硬化関数を選択することによって、次式で計算されるとみなす。

$$d\epsilon_{iji} = D_{ij} h_{ij} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_i} \cdot df \quad (\sigma_i \geq \sigma_j) \quad (24-a)$$

$$d\epsilon_{iji} = D_{ij} h_{ji} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_i} \cdot df \quad (\sigma_j > \sigma_i) \quad (24-b)$$

ここで、

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_i} = \frac{1}{3p} \left\{ \frac{9}{2\eta} \cdot \frac{\sigma_i - p}{p} + Cd \cdot (m - \eta) \right\} \quad (25)$$

D_{ij} は三次元応力系を考慮するために導入したパラメータであり、ここではひずみの分配係数と称しておくことにする。

$$D_{ij} = \frac{|\sigma_i - \sigma_j|}{|\sigma_i - \sigma_j| + |\sigma_i - \sigma_k|} \quad (26)$$

なお、 h_{ij} や h_{ji} はそれに該当する二次元応力系における砂の粒子配列構造と主応力の大小関係とから具体的に決定される関数である。

ここで、通常の三軸圧縮 ($\theta = 0^\circ$)・伸張 ($\theta = 180^\circ$) 条件に対応する硬化関数をそれぞれ h_c , h_E とすると、式 (22) から次のようになる。

$$h_c = A_c (W^p)^{B_c} \quad (27), \quad h_E = A_E (W^p)^{B_E} \quad (28)$$

A_c, B_c 及び A_E, B_E はそれぞれ通常の三軸圧縮・伸張試験から求められる A, B の値である。図-12 に示しているように、YZ-平面及び ZX-平面は異方構造面であるから、主応力の大小関係に応じて h_c 及び h_E を選択することになる。一方、本報告で議論している異方性砂では水平面、すなわち XY-平面は等方構造面である。ここで、前述のように硬化関数は応力系によらず、構造異方性にのみ依存する関数であるから、XY-平面では σ_x, σ_y の大小関係によらず、 $\theta = 90^\circ$ に相当する硬化関数 h_G で与えられるはずである。それは、次式に従って h_c, h_E から求められると考えよう。

$$h_G = (h_c \times h_E)^{\frac{1}{2}} = (A_c \times A_E)^{\frac{1}{2}} \cdot (W^p)^{\frac{B_c + B_E}{2}} \quad (29)$$

以上をまとめると、次式のように表わすことができる。

$$h_{xy} = h_{yx} = h_G \quad (30-a)$$

$$h_{yx} = h_{xz} = h_E \quad (30-b)$$

$$h_{zx} = h_{zy} = h_c \quad (30-c)$$

したがって、このようにして得られる各二次元応力系で生じるひずみ増分を重ね合わせることにより、各主ひずみ増分に対応する硬化関数 h_i を新たに設定することになる。

$$d\epsilon_i = h_i \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_i} \cdot df \quad (31)$$

式 (31) を式 (8), (23) 及び (24) と比較することによって、 h_i は次式のように与えられる。

$$h_i = D_{ij} \cdot h_{ij} \text{ (or } h_{ji}) + D_{ik} \cdot h_{ki} \text{ (or } h_{ik}) \quad (32)$$

一般応力条件下のせん断においては、各主応力の大小関係が θ の変化に伴って交番するため、

h_i の具体形は次のようになる。すなわち $\theta=0^\circ\sim 180^\circ$ の範囲について示すと、

$$\left. \begin{aligned} h_x &= D_{xy}h_{yx} + D_{xz}h_{zx} = D_{xy}h_G + D_{xz}h_C & (33-a) \\ h_y &= D_{yz}h_{zy} + D_{yx}h_{yx} = D_{yz}h_C + D_{yx}h_G & (33-b) \\ h_z &= D_{zx}h_{xz} + D_{zy}h_{zy} = D_{zx}h_C + D_{zy}h_C = h_C & (33-c) \end{aligned} \right\} \quad (0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ)$$

$$\left. \begin{aligned} h_x &= D_{xy}h_{yx} + D_{xz}h_{zx} = D_{xy}h_G + D_{xz}h_C & (34-a) \\ h_y &= D_{yz}h_{yz} + D_{yx}h_{yx} = D_{yz}h_E + D_{yx}h_G & (34-b) \\ h_z &= D_{zx}h_{zx} + D_{zy}h_{yz} = D_{zx}h_C + D_{zy}h_E & (34-c) \end{aligned} \right\} \quad (60^\circ < \theta \leq 120^\circ)$$

$$\left. \begin{aligned} h_x &= D_{xy}h_{yx} + D_{xz}h_{xz} = D_{xy}h_G + D_{xz}h_E & (35-a) \\ h_y &= h_{yz}h_{yz} + D_{yx}h_{yx} = D_{yz}h_E + D_{yx}h_G & (35-b) \\ h_z &= D_{zx}h_{xz} + D_{zy}h_{yz} = D_{zx}h_E + D_{zy}h_E = h_E & (35-c) \end{aligned} \right\} \quad (120^\circ < \theta \leq 180^\circ)$$

以上のように、硬化関数と塑性ひずみ仕事の関係を明らかにすることによって、砂の構造異方性を考慮した三主応力条件下の硬化関数を誘導することができる。

4. 応力—ひずみ関係式の検証と考察

誘導した三主応力下の応力—ひずみ関係式を規定するパラメータは、すべて通常の軸対称三軸圧縮・伸張試験及び等方圧密・膨張試験から決定することができる。なお、 W_I^p は等方圧密・膨張試験から得られるが、富士川砂については龍岡¹⁴⁾が報告しているデータより適切な値を指定した。

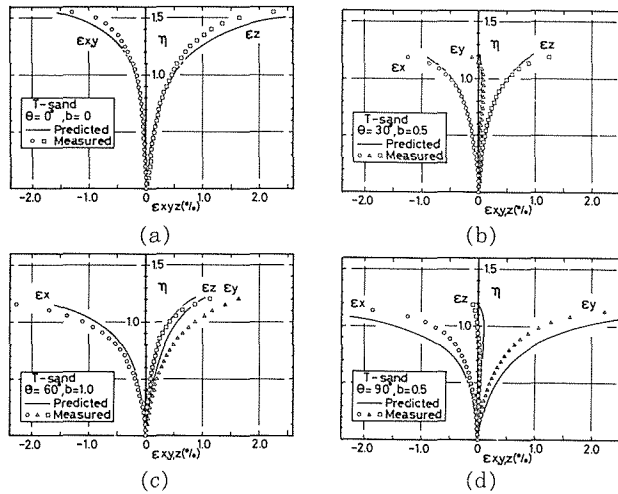
Table 2 Model parameters for *F*- and *T*-sand (Test data of *F*-sand from Yamada and Ishihara⁵⁾)

	<i>F</i> -sand	<i>T</i> -sand
$Cd \times m$	1.00	0.72
m_C	1.42	1.11
m_E	1.14	0.81
A_C	2.75	3.00
A_E	3.15	4.80
B_C	0.75	1.60
B_E	0.65	1.20
W_I^p (kPa)	.003	.237

予測に用いたパラメータは表-2 に示すとおりである。

4.1 異方性砂の三主応力制御試験結果との比較

図-13 (a)～(g) は、豊浦砂の主ひずみ—応力比関係における実測値と予測値の比較を示している。応力系の相違と異方性の影響が合成されるためにその変形特性は複雑に変化しているが、予測値（実線）は実測値の傾向を良く説明しているのがわかる。ここで注目すべきは、 $\theta=60^\circ$ （三軸伸張，(c)）と $\theta=120^\circ$ （三軸圧縮，(e)）において、等しい2主応力方向



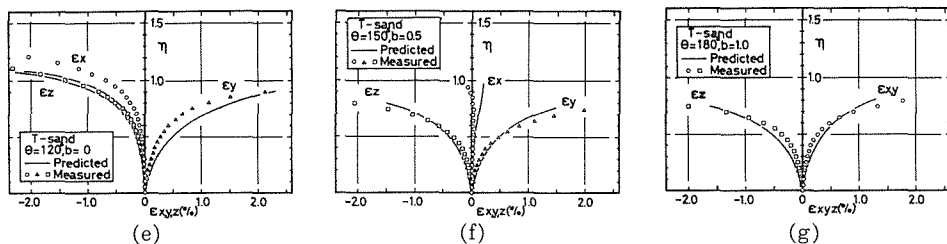


Fig. 13 Comparisons of the measured and predicted relationship between stress ratio and principal strains for *T*-sand in any stress paths

のひずみの値が異なる点である。応力条件は、 $\sigma_y = \sigma_z > \sigma_x (\theta = 60^\circ)$ 及び $\sigma_y > \sigma_z = \sigma_x (\theta = 120^\circ)$ であるが、それぞれ $\varepsilon_y > \varepsilon_z$, $\varepsilon_x > \varepsilon_z$ となっている。これは、この砂供試体が *X*, *Y* 方向では圧縮しやすく、*Z* 方向では伸張しやすいという異方的な力学特性を有していることによるものである。本提案モデルは、このような主ひずみの異方的な発生特性が良く表現されている。なお、富士川砂についても同様なことが言える¹⁵⁾。図-14は、富士川砂、豊浦砂について最大圧縮時における主ひずみの値の比較を示しており、予測値は実測値の傾向を定性的に良く表わしていることが認められる。

図-15(a)~(e)、図-16(a)~(e)は、それぞれ富士川砂のせん断ひずみ、体積ひずみと応力比の関係について示している。応力系が等しい場合すなわち *b* 値が同じでも、 θ が異なるとその変形特性は大きく違っている。すなわち、異方性の影響によって同じ η に対して θ が大きいほど発生するせん断ひずみ、体積圧縮ひずみは大きくなっている。図-17と図-18は最大圧縮時のせん断ひずみと体積ひずみの実測値と予測値の比較を示している。応力系の相違と異方性の影響が同時に現われているが、本提案モデルは実測値の傾向を良く把えているようである。

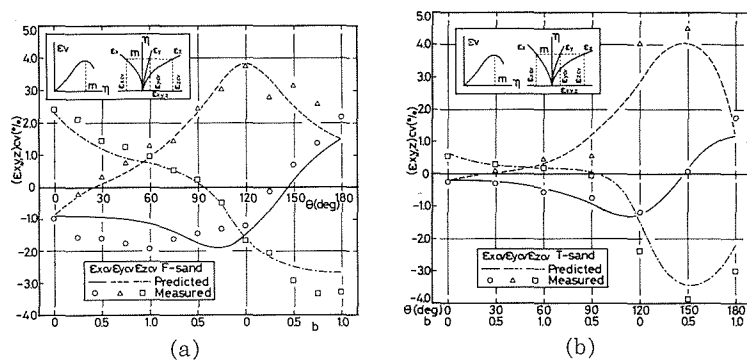
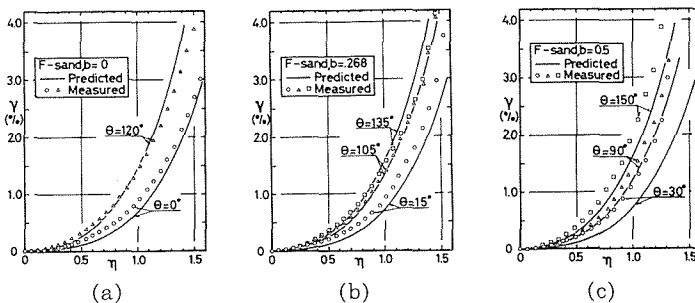


Fig. 14 Comparisons of the measured and predicted principal strains at maximum volume contraction during shear vs. θ ; (a) *F*-sand (Test data from Yamada and Ishihara⁵⁾), (b) *T*-sand



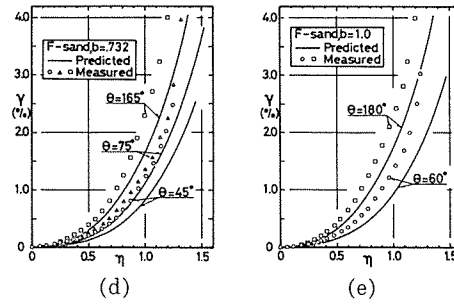


Fig. 15 Comparisons of the measured and predicted stress-strain relationship in the test with same b -value performed on F -sand (Test data from Yamada and Ishihara⁵⁾)

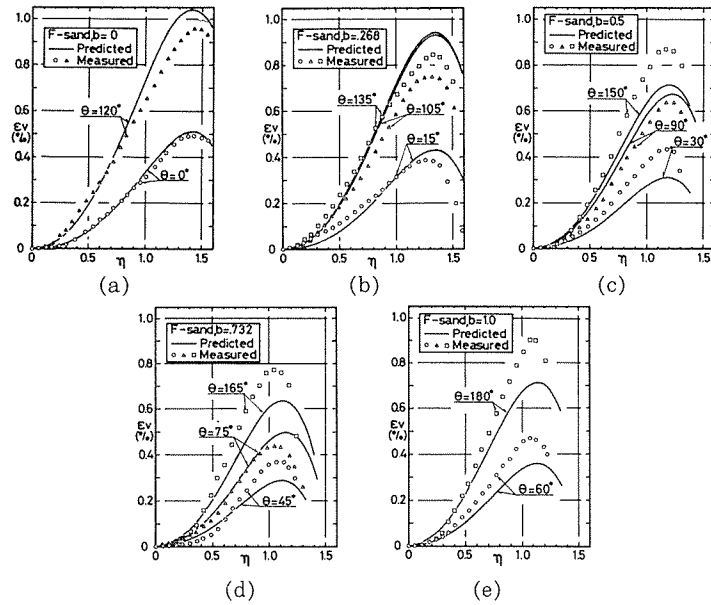


Fig. 16 Comparisons of the measured and predicted stress ratio-dilatancy relationship in the test with same b -value performed on F -sand (Test data from Yamada and Ishihara⁵⁾)

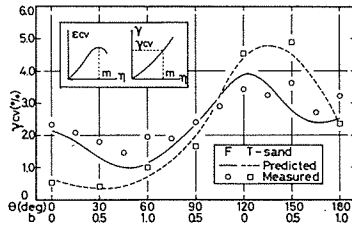


Fig. 17 Comparisons of the measured and predicted shear strain at maximum volume contraction during shear vs. θ for F - and T -sand (Test data of F -sand from Yamada and Ishihara⁵⁾)

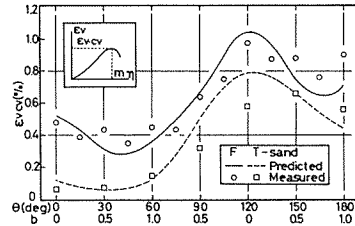


Fig. 18 Comparisons of the measured and predicted volumetric strain at maximum volume contraction during shear vs. θ for F - and T -sand (Test data of F -sand from Yamada and Ishihara⁵⁾)

図-19 (a), (b) は富士川砂、豊浦砂の破壊以前でのせん断過程における等せん断ひずみ線の実測値と予測値の比較を正八面体面上に示している。なお、図中の右半分には実測値、左半分には

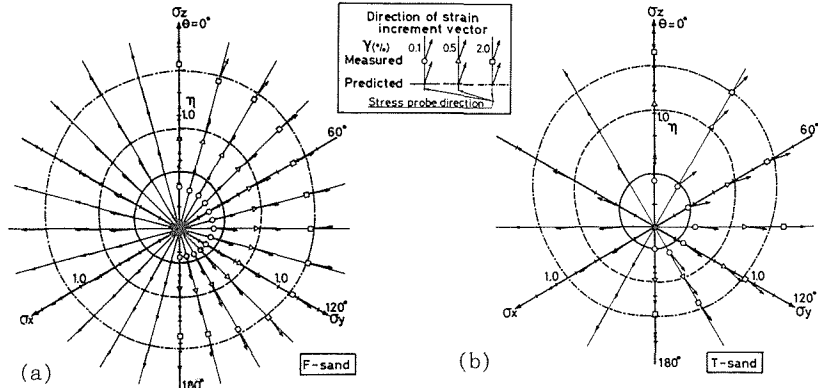


Fig. 19 Comparisons of the measured and predicted equi-shear strain lines and directions of strain increment vectors projected on the octahedral plane; (a) *F*-sand (Test data from Yamada and Ishihara⁵⁾), (b) *T*-sand

予測したひずみ増分ベクトルが $\rightarrow$ で与えられている。構造異方性を有しているために、実測のひずみ増分ベクトルは全体的に応力経路の方向から時計方向へ回転した方向になっている。本提案モデルは、実測の等せん断ひずみ線やひずみ増分ベクトルの方向を良く表わしていると思われる。

4.2 等方性砂の変形特性

前節で示したように、砂の変形特性は応力系の相違や異方性の影響を強く受ける。それぞれの影響要因を明らかにするためには、等方性砂の変形特性について調べる必要があり、力学的に興味を持たれる課題でもある。本提案モデルでは、異方性の影響を考慮して誘導された各二次元応力系の硬化関数をすべて等方面に対する h_c に置換することによって、等方性砂の変形特性を予測することができる。

図-20 (a), (b) は、 $b=0$ と $b=1$ の応力系に対する、等方構造を有する富士川砂と豊浦砂の主ひずみ-応力比関係を予測した例を示している。等方構造状態にあれば、 θ が異なっても等しい2主応力方向のひずみの値が一致することが明らかである。図-21 (a), (b) は同じく等方性砂

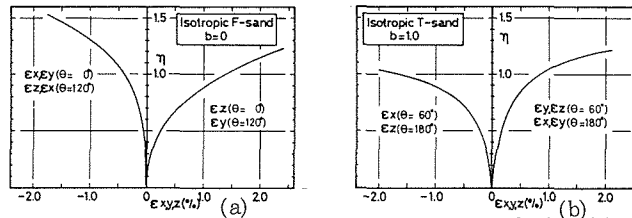


Fig. 20 Predicted stress ratio-principal strain relationships for sand with isotropic fabric; (a) *F*-sand, (b) *T*-sand

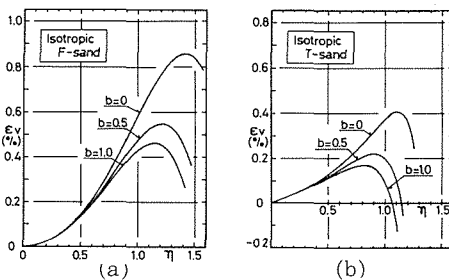


Fig. 21 Predicted stress ratio-dilatancy relationships for sand with isotropic fabric; (a) *F*-sand, (b) *T*-sand

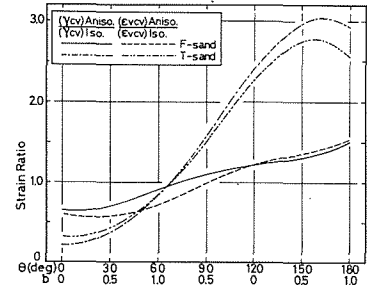


Fig. 22 Influence of inherent anisotropy on the deformability of sands in any stress systems

のダイレイタンス特性を予測したものである。ダイレイタンス特性は、応力系の影響を強く受けるが、異方性砂の場合とは異なり、三軸圧縮条件で体積収縮が一番大きくなっているようである。

図-22 は、最大圧縮時における等方性砂と異方性砂のせん断ひずみと体積ひずみの比較を示している。図から、構造異方性が変形特性に及ぼす影響は、 $\theta=70^\circ\sim90^\circ$ を境界として、それ以下ではひずみの発生を抑える傾向に、またそれ以上の θ では変形を大きくさせる傾向を導くようである。このような表示は、豊浦砂において異方性の影響が顕著であることを示しており、富士川砂供試体に比べて豊浦砂の方がその初期堆積構造の異方性が強いのではないかという一つの判断基準を与えているように思われる。

5. 結 論

相異なる三主応力状態にある異方性砂のせん断特性を調べ、応力系の違いや異方性による変形特性の相違を明らかにするとともに、一般応力条件下における二軸直交異方性砂の弾塑性応力-ひずみ関係式を誘導した。本提案モデルは、富士川砂及び豊浦砂の三主応力制御試験から得られた異方的な力学特性を良く説明できることが示されている。なお、実測値の検証に必要なパラメータは、通常実施される三軸圧縮・伸張試験と等方圧密・膨張試験から容易に決定できる。さらに誘導した応力-ひずみ関係式によって予測される等方性砂と異方性砂の変形特性を比較することによって、i) 砂の構造異方性が相異なる三主応力下の変形特性に及ぼす影響は、 $\theta=70^\circ\sim90^\circ$ を境に、それ以下の θ ではひずみの発生を抑える傾向に、またそれ以上の θ では変形を大きくさせる傾向を導いている。ii) 力学特性の異方性は、富士川砂供試体に比べて豊浦砂の方が強い、ことなどが推定された。

最後に、本研究について種々の御教示を頂いた土木工学科北郷 繁教授、実験・データ整理に協力を得た工藤 豊技官、江幡 敦司、林 法雄、竹野 聡君に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 小田匡寛, 小石川功 (1978): 土木学会論文報告集, No. 273, pp. 111-120.
- 2) 土岐祥介, 三浦清一, 中垣 健 (1983): 第18回土質工学研究発表会講演集, pp. 555-558.
- 3) 三浦清一, 土岐祥介, 永田永昌 (1981): 第16回土質工学研究発表会講演集, pp. 445-448.
- 4) 三浦清一, 土岐祥介, 稲 直美 (1982): 北海道大学工学部研究報告, 第111号, pp. 13-23.
- 5) Yamada, Y. and Ishihara, K. (1979): Soils and Foundations, Vol. 19, No. 2, pp. 79-94.
- 6) Miura, S. and Toki, S. (1982): Soils and Foundations, Vol. 22, No. 1, pp. 61-77.
- 7) Hill, R. (1950): Oxford Univ. Press, London, England.
- 8) Poorooshasb, H. B, Holubec, I. and Sherbourne, A. N. (1967): Can. Geotech. J. Vol. 4, No. 4, pp. 376-397.
- 9) Tatsuoka, F. and Ishihara, K. (1974): Soils and Foundations, Vol. 14, No. 2, pp. 63-76.
- 10) Roscoe, K. H. and Burland, J. B. (1968): Engineering Plasticity, Cambridge Univ. pp. 535-609.
- 11) Matsuoka, H. (1976): Soils and Foundations, Vol. 16, No. 1, pp. 91-100.
- 12) Frydman, S. (1976): Can. Geotech. J. Vol. 13, pp. 311-323.
- 13) Matsuoka, H. (1974): Soils and Foundations, Vol. 14, No. 2, pp. 47-61.
- 14) 龍岡文夫 (1975): 第20回土質工学シンポジウム論文集, pp. 61-70.
- 15) 三浦清一, 土岐祥介, 三浦均也 (1983): 第18回土質工学研究発表会講演集, pp. 343-346.