



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	二次元デジタル信号の再離散化
Author(s)	下野, 哲雄; 北島, 秀夫
Citation	北海道大學工學部研究報告, 116, 71-78
Issue Date	1983-10-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41816
Type	departmental bulletin paper
File Information	116_71-78.pdf



二次元デジタル信号の再離散化

下野 哲雄 北島 秀夫
(昭和58年6月30日受理)

Resampling of Two-Dimensional Digital Signals

Tetsuo SHIMONO and Hideo KITAJIMA
(Received June 30, 1983)

Abstract

Recently, images play an important role in various fields. Because it is convenient for the handling data, images are represented mostly by sampled data. A digital image is given using a sampling manner, but for the requirements of the image processing the sampling manner needs be changed to an alternate one. It is referred to as resampling in which the newly sampled image from the original digital image is reconstructed. In the past, several resampling methods have been reported, however, these did not use the characteristic of the images itself.

In this paper, we deal with the resampling problem as the minimum mean square error estimation using the correlation of pixels which is one of the most remarkable characteristic included in the image signals. An optimal resampling method using all original data is presented at first, but is tremendous calculations are required. Assuming that the correlation is a function of the distance between the pixels, the mean square error of the estimated resampling point becomes sufficiently small using the four data in the nearest neighborhood of the point. Therefore, we propose secondly a convenient resampling method using the nearest neighborhood data. Since this method handles (4×4) dimensional matrix at most, it is easy to implement the resampling.

1. ま え が き

画像は、その持っている情報量の多さから、様々な分野で盛んに利用され、さらに、より有効な利用が望まれている。画像は、データの取り扱い易さから写真のような連続的な値として記録されているのではなく、離散的な(サンプルされた)値として記録されることが多い。

さて、このようなデジタル画像は、画質劣化の修復、符号化、さらに、特定の物体の抽出、分離などの処理がなされるわけであるが、処理する側の都合によって、または、処理後のデータを利用する側の要求によって、原画像データのサンプル数の増減(拡大、縮小)、サンプル座標の座標変換が必要となる場合が生じる。離散化データから、このように新たにもう一つの別の離散

化データを構成することは再離散化 (Resampling) と呼ばれている。

再離散化法として、例えば、画像の縮小では、数画素の平均値をとって、それを新たな画像の一画素に置き換えたり、拡大では、一つの画素を繰り返し使って画素数を増やす方法がある。また、サンプリング座標の変更 (回転, 平行移動など) では、新しい座標でのサンプル点は、その点と一番近い距離にある旧座標でのサンプル点で置き換える方法などがある¹⁾。しかしながら、これらの再離散化法は、ぼけたり、擬似的輪郭が現われたりして、簡便であるがあまり良い方法とは言えない。その他、cubic-spline, cubic-convolution などの補間関数を用いて、一度連続的な値を再現して、その後、新たに離散化信号を求めるという方法もある^{2), 3)}。これらの方法も、計算が複雑になる、信号の持つ性質をあまり良く利用していない、再離散化時の誤差の解析ができない、原データに雑音が含まれている場合はほとんど有効性を発揮できないなどの欠点がある。

本報告では、画像信号の持つ統計的性質を利用して、平均二乗誤差 (Mean Square Error: MSE) を尺度とした二次元デジタル信号 (画像) の再離散化法について述べる。

2. 画像の統計モデル

画像の統計モデルとして様々なものがあるが、従来からよく使われ妥当性の高いと言われている⁴⁾のモデルを用いる。

- (1) 定常過程とし、平均値零 (こう仮定すれば、式がむやみと複雑にならないというだけで、本質的条件ではない)、分数 σ_s^2 とする。
- (2) 点 P_1 と P_2 の相関 $R(P_1, P_2)$ は、点 P_1 と P_2 の距離 $\overline{P_1 P_2}$ と、1 より小さい正の定数 ρ とで、

$$R(P_1, P_2) = \sigma_s^2 \rho^{\overline{P_1 P_2}} \quad (1)$$

で表されるとする。

3. 最小平均二乗誤差推定法による再離散化法⁵⁾

図1 (a) で表されるサンプリング座標で画像が与えられたとする。サンプリング間隔は x, y 方向とも d , 新たに図1 (b) で表されるような角度 θ だけサンプリング座標を回転し、サンプリング間隔は u, v とも d' とした画像を求めるとする。このとき、 (x, y) と (u, v) の間には次の関係がある。

$$\begin{cases} x = u \cos \theta - v \sin \theta \\ y = u \sin \theta + v \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

図1 (a) の点 (i, j) と図1 (b) の点 (k, l) との距離 $d_{ij,kl}$ は、

$$d_{ij,kl} = \sqrt{\{di - d'(k \cos \theta - l \sin \theta)\}^2 + \{dj - d'(k \sin \theta + l \cos \theta)\}^2} \quad (3)$$

となるので、点 (i, j) と点 (k, l) との相関は式 (1) で求まる。

そこで、図1 (a) の離散化画像を $(2N+1)^2$ 次元ベクトル $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = [a_{-N, -N}, a_{-N, -N+1}, \dots, a_{0, 0}, \dots, a_{N, N-1}, a_{N, N}]^t \quad (4)$$

同図 (b) の再離散化画像を $(2M+1)^2$ 次元ベクトル $\mathbf{b}$

$$\mathbf{b} = [b_{-M, -M}, b_{-M, -M+1}, \dots, b_{0, 0}, \dots, b_{M, M-1}, b_{M, M}]^t \quad (5)$$

と表することになると、 $\mathbf{b}$ を $\mathbf{a}$ から次のように推定する。

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{W} \mathbf{a} \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{W}$ は $[(2M+1)^2 \times (2N+1)^2]$ 次元行列で、次式の平均二乗誤差 e が最小となるように

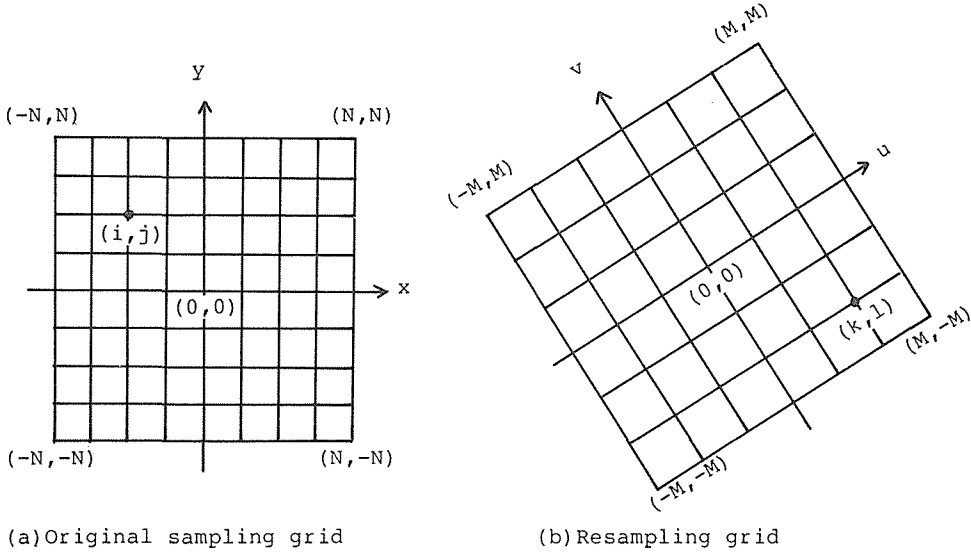


図1 再離散化例

選べばよい。

$$e = E\{(\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}})'(\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}})\} \quad (7)$$

ここで、 E は期待値を表わす。

MSE e が最小となる $\mathbf{W}$ は次式の直交条件⁶⁾を解くことで得られる。

$$E\{(\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}})\mathbf{a}'\} = 0 \quad (8)$$

式 (8) から $\mathbf{W}$ は

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}_{ba}\mathbf{C}_{aa}^{-1} \quad (9)$$

ただし、 $\mathbf{C}_{ba}$ は $[(2M+1)^2 \times (2N+1)^2]$ 次元行列でベクトル $\mathbf{b}$ とベクトル $\mathbf{a}$ の共分散行列、 $\mathbf{C}_{aa}$ は $[(2N+1)^2 \times (2N+1)^2]$ 次元行列でベクトル $\mathbf{a}$ の共分散行列である。

誤差共分散行列 $\mathbf{P}$ を次のように定義すると、

$$\mathbf{P} \triangleq E\{(\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}})(\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}})'\} \quad (10)$$

式 (9) から、

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= E\{(\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}})(\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}})'\} \\ &= \mathbf{C}_{bb} - \mathbf{C}_{ba}\mathbf{C}_{aa}^{-1}\mathbf{C}_{ab} \end{aligned} \quad (11)$$

となり、最小平均二乗誤差 $e_{\min}$ は

$$e_{\min} = \text{Tr} \mathbf{P} \quad (12)$$

で求まる。尚、 Tr は Trace で行列 $\mathbf{P}$ の対角項の和を表す。

さて、次に、再離散化の座標の回転角 θ と $e_{\min}$ の関係を調べてみよう。図 2 に、 $N=M=8$ ，すなわち (17×17) 画素の画像で、サンプリング間隔は $d=d'$ とし、分散 $\sigma_s^2=1$ ，相関 R は $\rho^d=0.92$ の場合を示す。尚、縦軸の $\bar{e}_{\min}$ は $e_{\min}$ を全画素数で割った値、すなわち、

$$\bar{e}_{\min} = \frac{1}{(2N+1)^2} e_{\min} \quad (13)$$

を表している。

座標の回転角が 0° と 90° の場合は再離散化のサンプル点は原画像のサンプル点と一致しているので、当然ながら、誤差は零になる。誤差が最大となるのは、角度が 45° の時であるが、それ

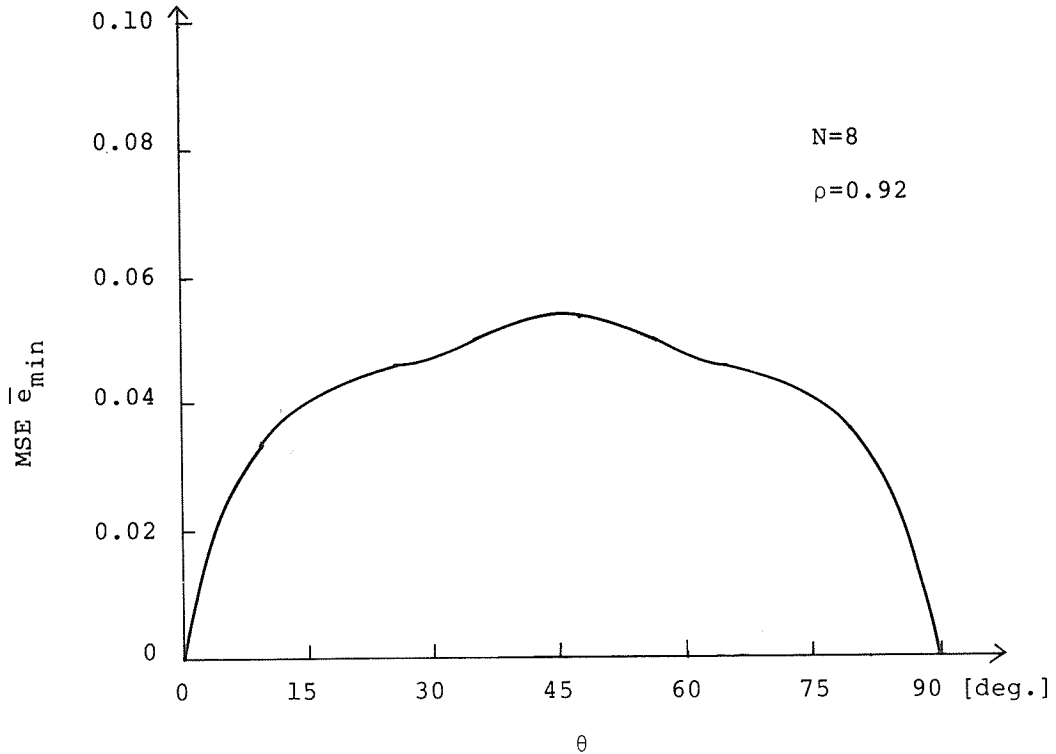


図2 再離散化法の平均二乗誤差

でも 0.06 程度の MSE である。

さて、この方法の一番の問題点は行列 C_{aa} の逆行列の計算である。画像データは小さなサイズの画像でも (128×128) 画素あり、従って、この場合でも行列 C_{aa} のサイズは (16384×16384) という大きなものとなり、計算の実行が困難となる。次章で、この点を考慮した再離散化法について述べる。

4. 簡略化した再離散化法⁷⁾

前章の方法は、再離散化点一点に注目すると、その点を原画像データ全てを用いて線形結合で推定しようというものである。ところで、画像が第2章の統計モデルで表される場合に、どのような位置にあるデータが推定に寄与するかを検討してみる。再離散化点一点に注目し、その点の回りに、図3に示すような位置関係で原データがあるとする。図3に示す番号順に推定に用いるデータの一つずつ増やした時の MSE を図4に示す。尚、統計量は前章と同じである。図4からわかるように、再離散化点の近傍の4個のデータがあれば十分に推定誤差が落着き、それ以上データを増やしても効果がない。そこで、この章では次のような再離散化法を提案する。

- (1) 新サンプル点と原データとの距離を計算する。
- (2) 距離が零のデータ点があればその点を新サンプル点の値とする。それ以外は図5で示すような b の近傍の4個のデータ点から次のように b を求める。近傍の4点を要素とするベクトル $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4]^t$ 、および、重みベクトル $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3, w_4]$ とで、

$$\hat{b} = \mathbf{w}\mathbf{a} \quad (14)$$

と推定する。ただし、 $\mathbf{w}$ は次の平均二乗誤差 e を最小とするように決める。これは、次

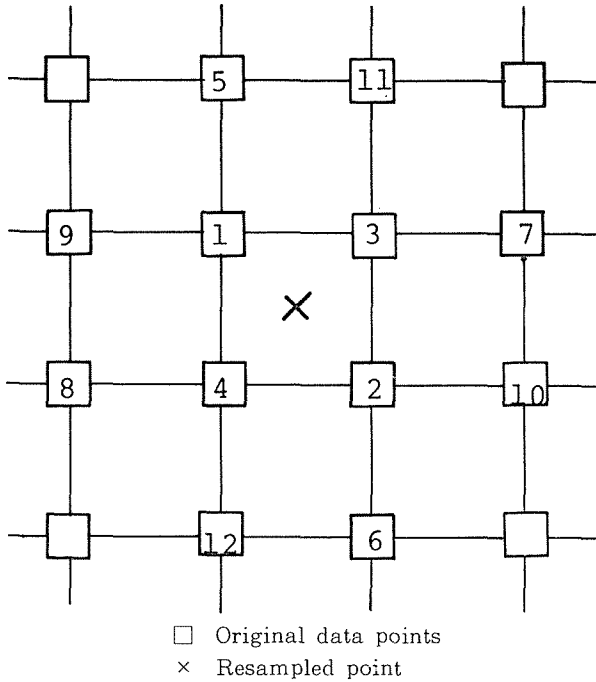


図3 再離散化点と推定に用いるデータ点の位置関係

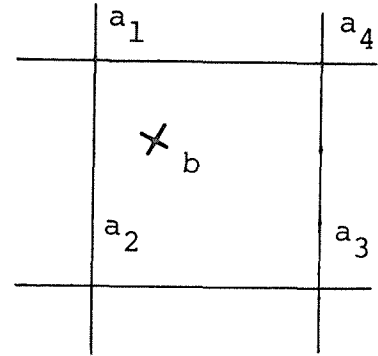


図5 再離散化点と近傍のデータ

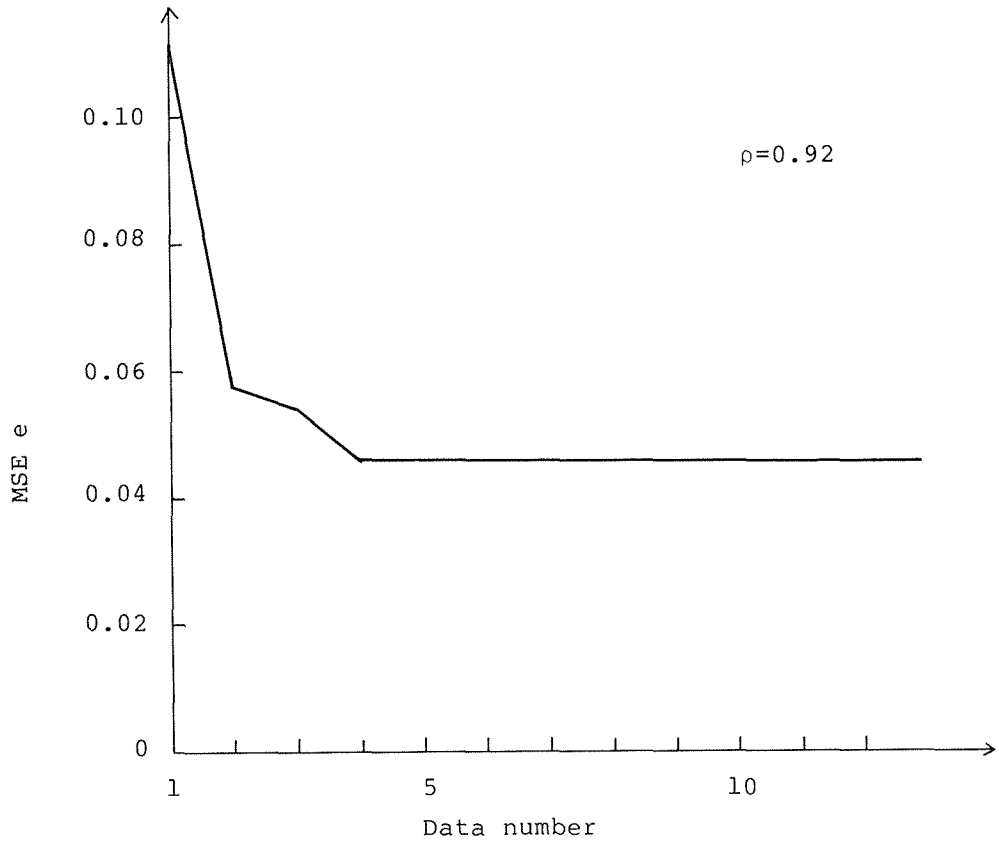


図4 推定に用いるデータの数と平均二乗誤差

の直交条件⁶⁾の式を解くことによって得られる。

$$E\{(b-\hat{b})\mathbf{a}^t\} = \mathbf{0} \quad (15)$$

式 (15) を解くと,

$$\mathbf{w} = \mathbf{c}_{ba}\mathbf{C}_{aa}^{-1} \quad (16)$$

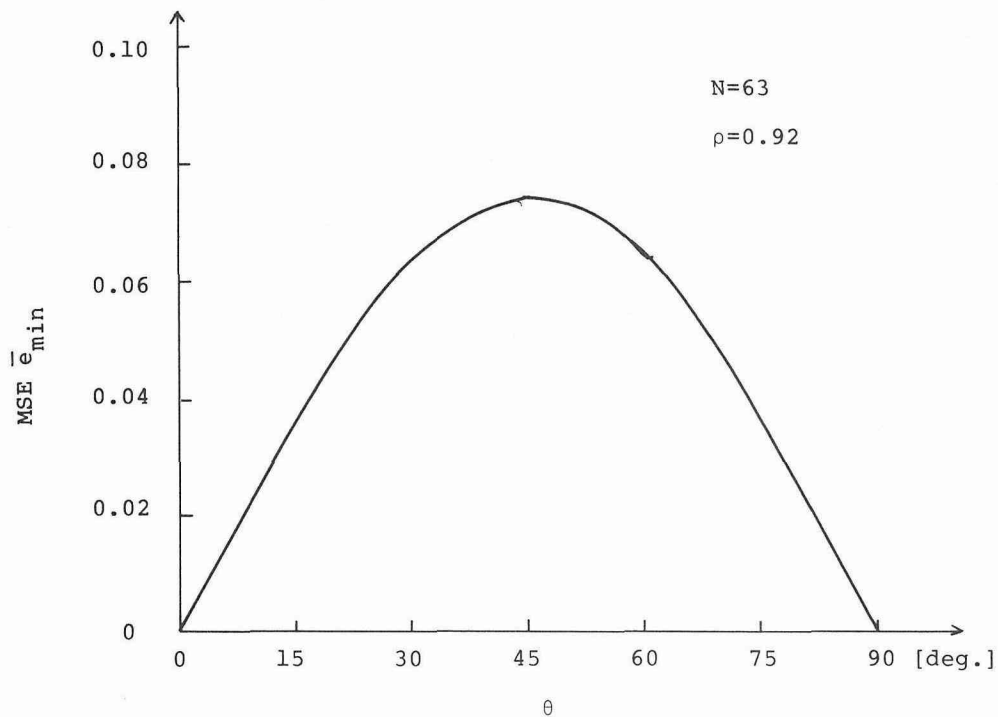


図6 簡略化した再離化法の平均二乗誤差



図7 原デジタル画像 (127×127画素)

尚, $\mathbf{c}_{ba} = E\{\mathbf{b}\mathbf{a}^t\}$, $\mathbf{C}_{aa} = E\{\mathbf{a}\mathbf{a}^t\}$ である。

また, この時の誤差 $e_{\min}$ は

$$e_{\min} = E\{(b - \hat{b})^2\} = \mathbf{c}_{bb} - \mathbf{c}_{ba}\mathbf{C}_{aa}^{-1}\mathbf{c}_{aa} \quad (17)$$

で与えられる。ここで, $\mathbf{c}_{bb}$ は $E\{b^2\}$ で当然 σ_b^2 となる。

図6に, $N=M=63$, すなわち, (127×127) 画素で, その他は前章と全く同じ条件での最小 MSE $e_{\min}$ を示す。尚, 縦軸の $\bar{e}_{\min}$ は



(a) 15°



(b) 45°

図8 再離散化の例題 (座標回転)

$$\bar{e}_{\min} = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{i=-N}^N \sum_{j=-N}^N e_{\min}(i, j) \quad (18)$$

を表わしている。結果を見ると、前章とほとんど同じとなっている。このことから、新しい離散点を求めるのに近傍の4点のデータがあれば十分であることが示された。この方法であると行列演算は画像サイズに関わらず高々(4×4)次元を扱えばよく、実行は非常に容易となる。

次に、この方法で再離散化を行なった例を示す。図7は(127×127)画素の原デジタル画像である。同図から、サンプリング座標を15°および45°回転して再離散化した画像が図8(a)および(b)である。この例からも、ここで述べた再離散化法が十分に実用化できることがわかる。

5. 結 論

本論文では、与えられたデジタル信号から新たに別のサンプリングを行なったデジタル信号を得る方法(再離散化法)を述べた。信号間の相関は信号の距離だけで決まると仮定し、再離散化を平均二乗誤差を尺度とした推定問題として取り扱うことによって良好な結果を得た。

また、本論文の中では原画像には雑音が含まれていないとして式を導出してあるが、信号と無相関の加算的白色雑音が存在している場合(ある程度細かな量子化ステップをとった場合の量子化雑音⁶⁾もこの場合に相当する)は、式(9)または(16)の C_{aa}^{-1} の代わりに、雑音の共分散行列 C_{nn} を用いて $(C_{aa} + C_{nn})^{-1}$ とすれば良く、十分に雑音成分を抑制できる。

最後に、日頃有益な御助言を頂く当講座小川吉彦教授に感謝致します。

参 考 文 献

- 1) Bernstein, R. and Silverman, H.: Proc. Amer. Inst. Aeronautics and Astronautics 8th Annu. Meeting, Vol. C21 (1971), Paper no. 71-978.
- 2) Hou, H. S. and Andrews, H. C.: IEEE Trans. ASSP-26 (1978), pp. 508-517.
- 3) Keys, R. G.: IEEE Trans. ASSP-29 (1981), pp. 1153-1160.
- 4) Kretzmer, E. R.: BSTJ, Vol. 31 (1952), pp. 751-763.
- 5) 下野, 北島: 電子通信学会通信部門全国大会予稿(1982), p. 1-305.
- 6) Papoulis, A.: Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, (1965), McGraw-Hill.
- 7) 下野, 北島: 電気四学会北海道支部連合大会予稿(1982), p. 244.
- 8) 岡本, 北島, 下野, 小川: 北海道大学工学部研究報告第115号(1983), pp. 65-72.