



Title	エントロピー法による有効雨量の推定
Author(s)	藤田, 睦博; Fujita, Mutsuhiro; 道口, 敏幸 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 118, 59-67
Issue Date	1984-02-07
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41832
Type	departmental bulletin paper
File Information	118_59-68.pdf



エントロピー法による有効雨量の推定

藤田 睦博 道口 敏幸 山岡 勲

(昭和58年9月30日受理)

Structure of Entropy Model Used for Estimation of Effective Rainfall

Mutsuhiro FUJITA, Toshiyuki MICHIGUCHI and Isao YAMAOKA

(Received September 30, 1983)

Abstract

The law of entropy increase is assumed to be a governing principle of the rainfall-runoff process. Under this assumption, it was found that the entropy model could detect the underlying nonstationary change of unithydrograph and the effective rainfall.

The following procedure was selected for the examination using hypothetical data set to be found successful in detecting the nonstationary unithydrograph and the effective rainfall.

- 1) A set of nonstationary unithydrograph $u_{i,j}$ are prescribed and hidden as the true nature.
- 2) Series of the effective rainfall r_i 's and losses r_{li} 's are arbitrary selected.
- 3) Using the given unithydrograph $u_{i,j}$, a discharge series q_j 's are synthesized from the effective rainfall r_i 's as

$$q_j = \sum_i u_{i,j} r_i$$

- 4) Using the given q_j 's and $R_i (= r_i + r_{li})$'s, the maximum entropy solutions are calculated and compared with originally given $u_{i,j}$ and r_{li} .

Finally, the maximum entropy solutions are calculated using the observed daily runoff data at the Kanna River and hourly runoff data at the Teshio River.

1. はじめに

タンクモデルのように流域の雨水の保留機能を内蔵しているモデル以外は、流出量に対応する有効雨量の解析が必要になる。有効雨量の推定の是非が、流出量の計算結果に大きな影響をおよぼす。有効雨量を推定するには、逆に損失雨量も推定するとよいことになる。高水流出と低水流出とでは、降雨の損失特性が異なるが、従来の損失雨量の推定法を方法論的に大別すると次の二つに分類できる。

- (1) 物理的手法……現地での実験
- (2) 水文学的手法

(1)は実流域で直接各損失雨量を測定するものであり、(2)は適当なモデルを設定し、直接的、間接的に損失雨量を推定しようとするものである。本論文で採用した手法は後者に属するものである。雨量、流出量の観測値に基づいてエントロピー法による損失雨量の推定法について考察し、実流域の実測資料を用いた解析結果を示した。

2. 理 論

i 時刻に降った雨量 R_i のうち、 $j(j \geq i)$ 時刻に流域末端より流出する成分を $h_{i,j}$ とすると表-2・1のマトリックスを構成できる。 q_j は j 時刻の流出量を示す。また、 m, n は、それぞれ降雨、流出量の継続時間を示す。既知の R_i, q_j よりエントロピー法を用いて $h_{i,j}$ を決定するには、

表-2・1

	R_1	R_2	...	R_i	...	R_m
q_1	$h_{1,1}$					
q_2	$h_{1,2}$	$h_{2,2}$				
\vdots	\vdots	\vdots				
q_i	$h_{1,i}$	$h_{2,i}$...	$h_{i,i}$		
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		
q_m	$h_{1,m}$	$h_{2,m}$...	$h_{i,m}$...	$h_{m,m}$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
q_n	$h_{1,n}$	$h_{2,n}$...	$h_{i,n}$...	$h_{m,n}$
$\sum_{i=1}^n R_i - \sum_{j=1}^n q_j$	$h_{1,n+1}$	$h_{2,n+1}$...	$h_{i,n+1}$...	$h_{m,n+1}$

R_i : 観測雨量

q_j : 流出量

$h_{i,n+1}$: 損失雨量

$h_{i,j}$ の生起確率が独立で一様に分布しているとする仮定のもとに、 R_i を $h_{i,j}$ に分割するその組合せの数を最大にするるとよいことになる。この種の問題は、交通工学の分野で $\bar{O}D$ 表より交通量の配分に用いられ、流出解析の分野では、竹内¹⁾によって研究されている。竹内は表-2・1の R_i, q_j をそれぞれ有効雨量および直接流出量として $h_{i,j}$ を求めている。ここでは R_i を観測雨量とし、問題をさらに一般化する²⁾。当然、観測雨量の全てが対象とする期間に流出するわけではないので、この量を表-2・1の最下端の $h_{i,n+1}$ で表わす。 $h_{i,n+1}$ は損失雨量に相当しており、有効雨量 r_i は次式で与えられる。

$$r_i = R_i - h_{i,n+1} \quad (2 \cdot 1)$$

$R_i, q_j, h_{i,j}$ に関して次式が成立している。

$$R_i = \sum_{j=i}^{n+1} h_{i,j} \quad (2 \cdot 2)$$

$$q_j = \sum_{k=1}^s h_{k,j} \quad s = \begin{cases} j & j \leq m \\ m & j > m \end{cases} \quad (2 \cdot 3)$$

$$\sum_{i=1}^m R_i - \sum_{j=1}^n q_j = \sum_{i=1}^m h_{i,n+1} \quad (2 \cdot 4)$$

R_i を $h_{i,j}$ に配分するその組合せの数 $W(h_{i,j})$ は、その重複順列を考えると、次のように書ける。

$$W(h_{i,j}) = \prod_i \frac{R_i!}{\prod_{j \geq i} h_{i,j}!} \quad (2 \cdot 5)$$

Stirling の式を用いて、式 (2・5) を簡略化すると

$$\begin{aligned} \ln W(h_{i,j}) &= \sum_i (\ln \sqrt{2\pi} - R_i + R_i \ln R_i) - \sum_{ij} (\ln \sqrt{2\pi} - h_{i,j} + h_{i,j} \ln h_{i,j}) \\ &= \text{Const.} - \sum_{ij} h_{i,j} \ln h_{i,j} \end{aligned} \quad (2 \cdot 6)$$

したがって、 $W(h_{i,j})$ を最大にするには、次式を最大にするのと等価となる。

$$\max \left\{ - \sum_{ij} h_{i,j} \ln h_{i,j} \right\} \quad (2 \cdot 7)$$

竹内¹⁾ の手法と同様に式 (2・2) ~ (2・4) の制約条件のほかに、次の制約条件を加え

$$\sum_{ij} c_{i,j} h_{i,j} = C \quad (2 \cdot 8)$$

Lagrange の係数を μ_i, λ_j, γ とすると次式を得る。

$$E_i \sum_{j=i}^{n+1} D_{i,j} q_j F_j = 1 \quad (1 \leq i \leq m) \quad (2 \cdot 9)$$

$$F_j \sum_{k=1}^s D_{k,j} R_k E_k = 1 \quad (1 \leq j \leq n+1) \quad s = \begin{cases} j & j \leq m \\ m & j > m \end{cases} \quad (2 \cdot 10)$$

$$D_{i,j} = \exp\{-1 - \gamma c_{i,j}\} \quad (2 \cdot 11)$$

$$E_i = \frac{\exp(-\mu_i)}{R_i} \quad F_j = \frac{\exp(-\lambda_j)}{q_j} \quad (2 \cdot 12)$$

$$h_{i,j} = D_{i,j} R_i E_i q_j F_j \quad (2 \cdot 13)$$

なお、式 (2・8) の $c_{i,j}$ は R_i が j 時刻に流出する間になす仕事と考えられるが、 $c_{i,j}$ の関数形を定めることは困難なので、ここでは竹内の採用した関数を若干修正して次式を用いることとする。

$$c_{i,j} = \ln(j-i+1) \quad j \geq i \quad (2 \cdot 14)$$

式 (2・11) の定数 γ の値が定まると、式 (2・9)、(2・10) より E_i, F_j が求まり、式 (2・13) より $h_{i,j}$ を得ることができる。単位図 $u_{i,j}$ は、 $h_{i,j}$ を r_i で規格化したものである。

$$u_{i,j} = \frac{h_{i,j}}{r_i} = \frac{h_{i,j}}{R_i - h_{i,n+1}} \quad (1 \leq j \leq n) \quad (2 \cdot 15)$$

R_i が有効雨量の場合 ($h_{i,n+1} = 0$) には、 $\gamma = -1$ が最適であることが知られている¹⁾³⁾。しかし、ここでは R_i を観測雨量としているので、 γ の最適値をシミュレーション法で調べることとする。シミュレーション法は、損失雨量 $h_{i,n+1}$ 、有効雨量 r_i 、単位図 u_i を仮定する。流出量は次式より計算できる。

$$q_j = \sum_{k=1}^s u_{k,j} r_k \quad s = \begin{cases} j & j \leq m \\ m & j > m \end{cases} \quad (2 \cdot 16)$$

R_i は式 (2.1) より求まるので, R_i, q_j 及び式 (2.9) ~ (2.13) より $h_{i,j}$ を計算し, 仮定した $h_{i,n+1}, u_i$ と比較することにより r の値を知ることができる。

図-2.1 は, 仮定した単位図を示したものである。また, 損失雨量としては図-2.2 のハイエントグラフ中に実線で示すホルトン型の浸透能曲線で表わされる場合と, 降雨の途中でピークをもつ (三角形型と呼ぶ) 2 種類の損失雨量を採用した。また, 有効雨量に関しては, 表-2.2 に示すようにホルトン型の損失雨量のとき 2 種の降雨波形を, 三角形型損失雨量については 1 種類の降雨波形を採用した。

r の値を仮定して式 (2.9) ~ (2.13) より得られる損失雨量 $h_{i,n+1}$ には「'」(ダッシュ) の記号を付して設定した損失雨量と区別する。誤差の評価を次式で行なうものとする。

$$\epsilon = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m (h_{i,n+1} - h'_{i,n+1})^2 / m}}{\sum_{i=1}^m h_{i,n+1} / m} \tag{2.17}$$

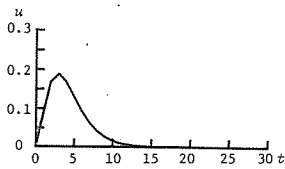


図-2.1 仮定した単位図

表-2.2 有効雨量のタイプ

損失雨量	有効雨量	略記号	線種
ホルトン型	一様乱数で近似	Case 1	-----
	一様乱数+三角形降雨	Case 2	—————
三角形型	一様乱数で近似	Case 3	-----

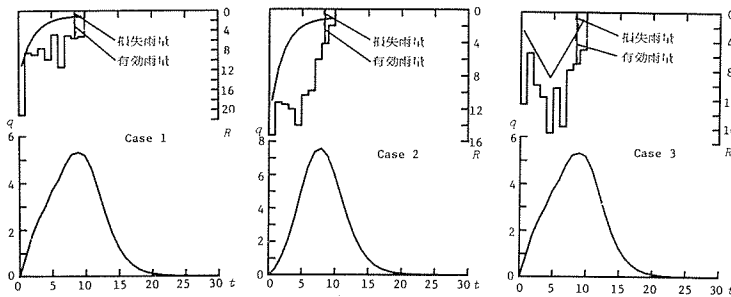


図-2.2 仮定した損失雨量, 有効雨量, 流出量

図-2.3 は, case 1, 2, 3 についてそれぞれ 3 種類の有効雨量を考えて, $\epsilon \sim r$ の関係を示したものである。 r の最適値は 2~2.5 の範囲であるが, ここでは $r=2.3$ として以後の計算を進める。

また, このとき得られる式 (2.15) の単位図を図-2.4 にその例を示すが, 設定した単位図とエントロピー法より得られる単位図は大きく異なっている。この原因は r の最適値を損失雨量 ($h_{i,n+1}$) だけに注目して決定したことによると考えられる。有効雨量は, 次式で求まるので,

$$r_i = R_i - h'_{i,n+1} \tag{2.18}$$

式(2.18)の r_i と q_j から単位図を求めるのに最適な $r = -1$ を採用した結果を図-2.5 に示す。図中の破線はいずれもエントロピー法による計算結果を示す。図-2.4 と比較するとほぼ設定した単位図を再現していることがわかる。また, 図-2.5 には, 本手法により得られた損失雨量

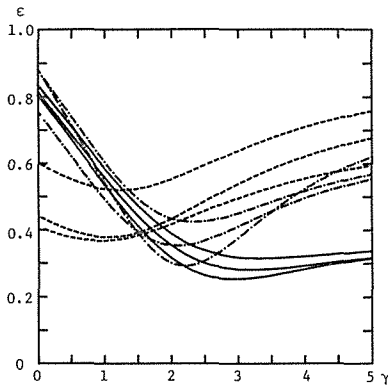


図-2.3 r と ϵ の関係

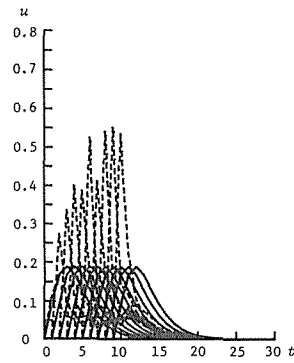


図-2.4 単位図の比較
 実線：設定単位図
 破線：計算単位図 ($\gamma=2.3$)

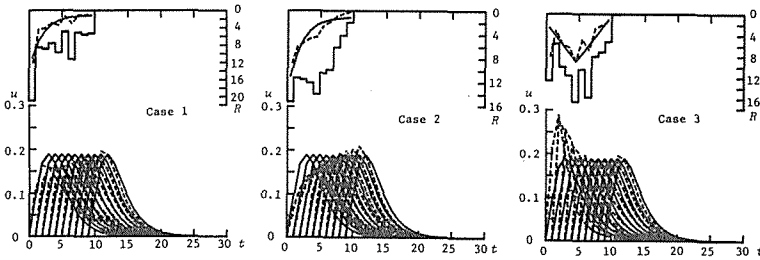


図-2.5 損失雨量, 単位図の比較

損失雨量 { 実線：仮定損失雨量
 破線：計算損失雨量 ($\gamma=2.3$) } 単位図 { 実線：設定単位図
 破線：計算単位図 ($\gamma=-1.0$) }

(破線)も図示しているが、実用上の精度で仮定した損失雨量を再現していると言える。このほか単位図が降雨毎に変化する場合についても計算したが、同様な結果の得られたことを付記しておく。

損失雨量および単位図の計算を要約すると表-2.3に示すように、まず $\gamma = 2.3$ として式(2.9)～(2.13)より損失雨量 $h_{i,n+1}$ だけを求め、次に式(2.18)より有効雨量を求め r_i, q_j より再び式(2.9)～(2.13)より $h_{i,j}, u_{i,j} (1 \leq j \leq n)$ を計算するとよいことになる。

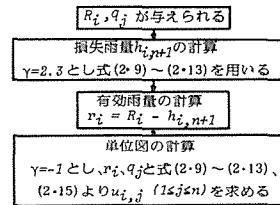


表-2.3 損失雨量, 単位図の計算過程

3. 実流域における計算例

3.1 神流川流域 (流域面積 373.6 km²) における解析

日野、長谷部⁴⁾は本流域における日降雨量、日流出量の実測資料を用いて、流出量より有効雨量を逆算している。また、日流出量を図-3.1に示すように表面流出成分 q_s 、中間流出成分 q_i 、地下流出成分 q_g に分離し、これらの流出成分に対応する降雨量をそれぞれ r_s, r_i, r_g とすると $r_s \sim q_s, r_i \sim q_i, r_g \sim q_g$ の関係は線形であるが $r(t)$ を r_s, r_i, r_g に分離する過程が非線形であることを示している。ここでは日野らが用いた資料を採用して、本手法より得られた有効雨量、単位図と日野らの解析結果を比較検討する。

図-3・2, 3・3 は, 採用した神流川流域の日雨量および流量資料を示したものである。図-3・4 は有効雨量を比較したものである。全く異なる二つの手法より得られた有効雨量が, ほぼ同一値を示している。図-3・5, 3・6 は, 本手法により得られた単位図を示したものである。各降雨ごとに単位図が大きく変動していることがわかる。本手法で得られた単位図は, 図-3・7 に示すように $r(t)$ と $q(t)$ 間で定義されたもので, 日流量のように時定数の異なる流出成分よりなっているときには, 当然予想される結果である。便宜上, 図-3・1 の $r_s(t), r_i(t), r_g(t)$ を次のように表わし,

$$\begin{aligned} r_s(t) &= C_s(t) r(t) \\ r_i(t) &= C_i(t) r(t) \\ r_g(t) &= C_g(t) r(t) \\ C_s(t) + C_i(t) + C_g(t) &= 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

単位図 u_s, u_i, u_g を用いると次式を得る。

$$\begin{aligned} q(t) &= q_s + q_i + q_g \\ &= \int \{ u_s(\tau) C_s(t-\tau) + u_i(\tau) C_i(t-\tau) + u_g(\tau) C_g(t-\tau) \} r(t-\tau) d\tau \end{aligned} \tag{3.2}$$

したがって, 本手法で求まる単位図は式(3.2)の右辺の { } に相当しており, 単位図は t, τ の関数になっている。降雨の配分率 C_s, C_i, C_g を便宜上時間の関数としているが, 実際には $r(t)$ の関数と考えられる。いま, 日野らの解析結果より, 表-3・1 に示すようにこれらの配分率の平均的な値を用いて求めた式(3.2)の右辺 { } の値(実線)と著者らの結果(破線, 鎖線)を比較したものが図-3・8 である。図では, 昭和28年においては $t=80, 148$ 日, 昭和34年では $t=105, 149$ 日の単位図と比較したものである。(図-3・2, 3・3 の矢印にて示す) いずれの場合も日降雨量の大きい場合に比較したものであるが, 両者の結果は類似している。

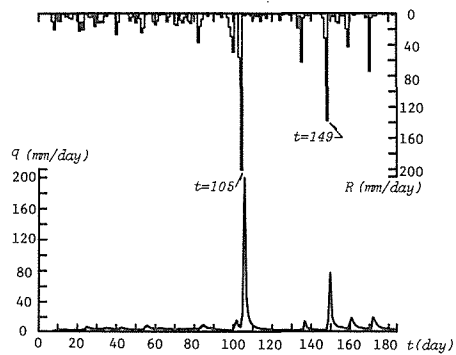
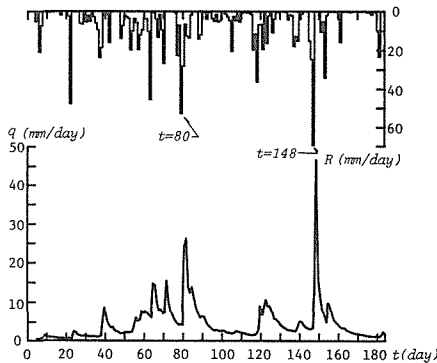
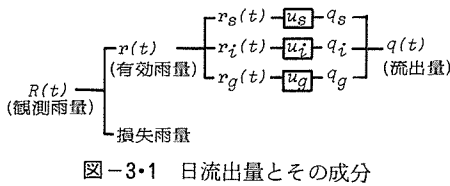


図-3.2 昭和28年 神流川日雨量, 日流量

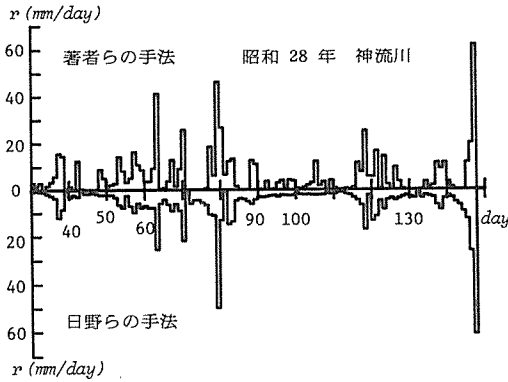


図-3-4 有効雨量の比較

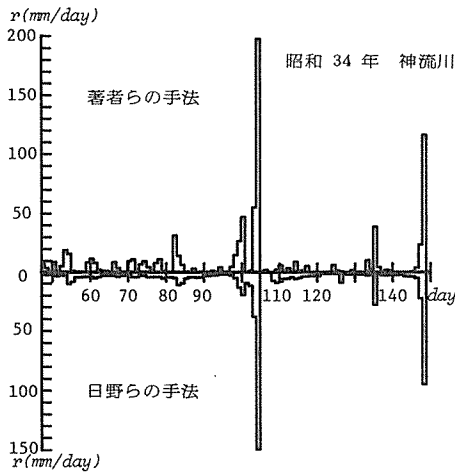


図-3-4 有効雨量の比較

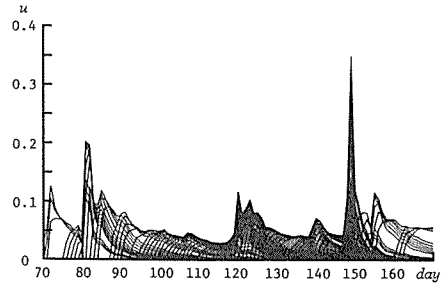


図-3-5 昭和28年 神流川単位図

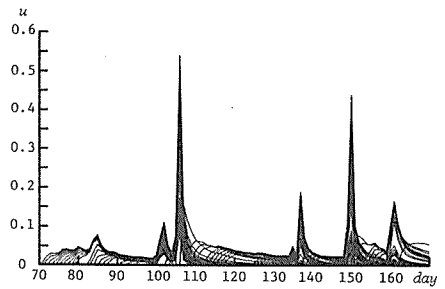


図-3-6 昭和34年 神流川単位図

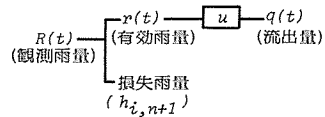


図-3-7 本手法による単位図の同定

3.2 天塩川名越橋流域（流域面積 612.4 km²）における解析

ここでは、時間雨量、時間流量を用いた解析をする。天塩川名越橋流域は、従来より線形流出解析が適応されている流域である。ハイドログラフの立上り以前の降雨を初期損失雨量として除去し、直接流出量の分離は水平分離法によった。

図-3・9は、得られた損失雨量（破線）および単位図の計算例である。名越橋流域では、全部で7例の出水について解析し、これらの結果を累加損失雨量～累加雨量の関係として図示したものが

表-3-1 降雨の配分率

	C_s	C_i	C_g
昭和 28 年	0.6		0.4
昭和 34 年	0.2	0.4	0.4

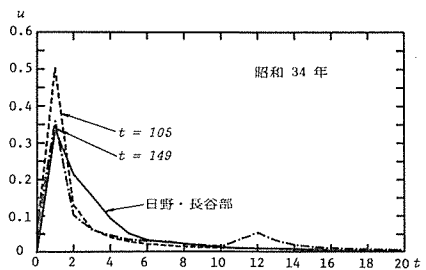
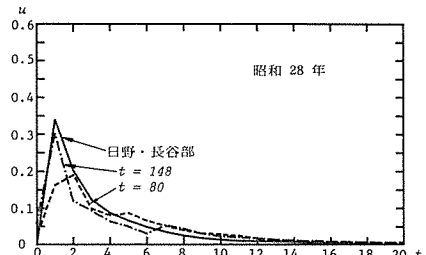


図-3-8 神流川における単位図の比較

図-3・10である。図中の番号は表-3・2の各出水に対応している。従来の手法による累加損失雨量～累加雨量の関係に比較して各出水ごとの変動は少ないものの、各出水ごとの変動は無視できず、初期流量、初期損失雨量などとの関連について検討したが、必ずしも明確な結果を得られなかった。一方、図-3・9の時間単位の資料から得られた単位図と図-3・5、3・6の日雨量、日流量資料から得られた単位図は、大きく異なっている。図-3・9では単位図のピーク値は大きく変化しないが単位図のピークの生起時刻が降雨の継続とともに早くなっている。この現象はここで解析した7例の出水について共通しており、流域内における雨水の移動機構と密接に関連していると思われる。名越橋流域だけの解析だけでは計算例が不足しており、今後他流域での解析を行ない、降雨ごとの単位図の変化と雨水の移動機構を検討することにより、エントロピー法で求められる損失雨量の妥当性が検証されるものと思われる。

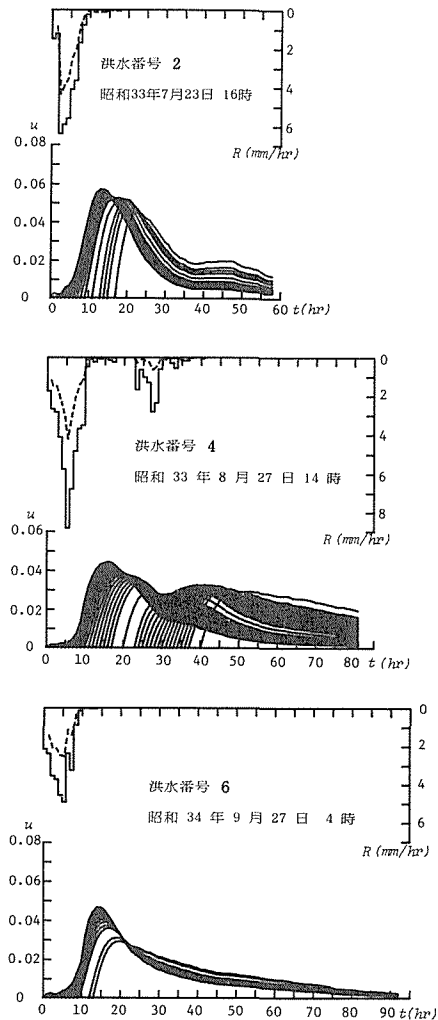


図-3・9 天塩川(名越橋)における観測雨量, 損失雨量(破線), 単位図

表-3・2 天塩川(名越橋)における洪水生起年月日

洪水番号	洪水生起年月日
2	昭和 33 年 7 月 23 日
3	昭和 33 年 8 月 20 日
4	昭和 33 年 8 月 27 日
5	昭和 34 年 9 月 6 日
6	昭和 34 年 9 月 27 日
7	昭和 35 年 8 月 2 日
8	昭和 36 年 7 月 25 日

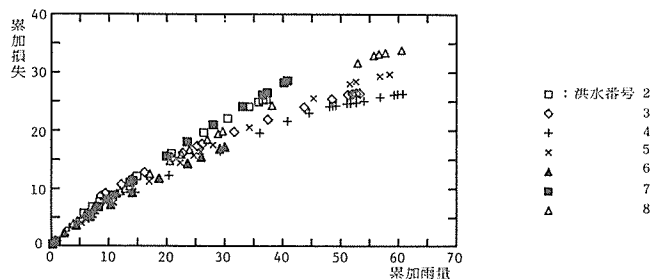


図-3・10 累加雨量と累加損失雨量との関係

4. ま と め

観測雨量（または流域平均雨量）とこれに対応する流出量が既知な場合に、損失雨量をエントロピー法により求めるアルゴリズムを開発した。本手法による計算結果をシミュレーション法で確かめるとともに、神流川流域における日雨量、日流出量の実測資料を用いて解析し、日野らが解析した結果と符合していることを確かめた。また、天塩川名越橋流域においては、時間雨量、時間流出量を用いてエントロピー法により損失雨量、降雨ごとの単位図を求めた。名越橋流域では降雨の継続とともに単位図のピークの生起時刻が次第に早くなり、流域内における雨水の移動機構を解析する一つの手がかりを与えるものと思われる。降雨ごとの単位図のピークの生起時刻が早くなることと、雨水の移動機構の関連が明確になると逆に本手法で得られる損失雨量（または有効雨量）の妥当性が検証されるわけで、今後他流域での計算を含めて解析を進める必要がある。

参考文献

- 1) Kuniyoshi Takeuchi: The law of entropy increase governing rainfall-runoff process, the Third International Symposium on Stochastic Hydraulics, p. 189-200, 1980.
- 2) 道口敏幸, 藤田睦博: エントロピー法を用いた有効雨量の推定について, 土木学会第38回年次学術講演会講演概要集, II, p. 135-136, 1983.
- 3) 山岡勲, 藤田睦博, 中平淳: エントロピー法を用いた非定常ユニットグラフに関する研究, 土木学会北海道支部論文報告集, 第39号, p. 161-166, 1983.
- 4) 日野幹雄, 長谷部正彦: 流量時系列のみによる流出解析, 土木学会論文報告集, 第300号, p. 43-56, 1980.